

力学丛书

陀螺力学

（第二版）

刘延柱 著



(O-3653.0101)


ISBN 978-7-03-025256-2

定 价：79.00 元

国家科学技术学术著作出版基金资助出版

力 学 丛 书

陀 螺 力 学

(第二版)

刘延柱 著



科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书系统叙述一般力学的分支学科——陀螺力学，以具有高速旋转特性即陀螺特性物体的动力学问题为研究对象．书中对万向支架支承陀螺仪的进动理论和章动理论作简要的总结，对静电支承的转子陀螺和挠性支承的动力调谐陀螺建立较系统的动力学理论．并叙述包括自旋卫星、充液陀螺、滚动陀螺等更广义陀螺运动的动力学原理．全书共分 13 章．阅读对象为工程力学、导航系统、精密机械、航空航天、船舶海洋等工程专业的研究设计人员及高等学校相关专业的教师和研究生．

图书在版编目(CIP)数据

陀螺力学/刘延柱著．—2 版．—北京：科学出版社，2009
(力学丛书)
ISBN 978-7-03-025256-2

Ⅰ.陀… Ⅱ.刘… Ⅲ.陀螺理论 Ⅳ.O318

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 143207 号

责任编辑：刘延辉 胡 凯 鄢德平／责任校对：陈玉凤
责任印制：钱玉芬／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009 年 8 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2009 年 8 月第一次印刷 印张：26 1/4
印数：1—2 000 字数：496 000

定价：79.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈双青〉）

作 者 简 介



刘延柱　1936年生. 1959年毕业于清华大学工程力学研究班. 1960—1962年进修于莫斯科大学. 1962—1973 年任教于清华大学工程力学系. 1973年起于上海交通大学工程力学系任教授、博士生导师、工程力学研究所所长. 2006 年退休. 现任中国力学学会名誉理事, 力学史与方法论专业委员会委员,《力学与实践》副主编. 著有《陀螺力学》、《静电陀螺仪动力学》、《航天器姿态动力学》、《多刚体系统动力学》、《理论力学》、《高等动力学》、《振动力学》、《非线性动力学》、《非线性振动》、《充液系统动力学》、《弹性细杆的非线性力学》、《刚体动力学理论与应用》等著作. 曾获1987年国家自然科学四等奖, 教育部和上海市四项科技进步二等奖, 两项优秀教材一等奖和三项二等奖.



再版序言

《陀螺力学》第一版于 1986 年出版, 写作的意图是希望将这门一般力学分支学科作较系统的总结. 除传统的框架陀螺仪以外, 也包括静电支承的转子陀螺和挠性支承的动力调谐陀螺等新型陀螺仪的动力学原理. 本书第一版出版至今已超过 20 年. 在此期间, 随着科学技术的发展, 陀螺力学学科有不少新进展. 研究范围已不限于陀螺仪实用原理, 而是包括一切具有高速旋转特性或称为陀螺特性的工程对象的动力学问题. 其中航天工程中自旋和双自旋卫星作为特殊类型的转子陀螺, 其姿态稳定性的理论研究在陀螺力学中占据重要位置. 从而使陀螺力学的研究对象从简单的刚体和刚体系统发展为包括刚体、弹性体和液体在内的复杂动力学系统. 此外, 对平面上滚动陀螺的理论分析必须考虑库仑摩擦的非线性特性, 方能对一些有趣的力学现象作出理论解释. 关于陀螺仪混沌运动的研究改变了对陀螺仪漂移现象的传统认识, 即随机漂移现象不仅由外界随机干扰引起, 而且还可来源于陀螺的内禀随机性.

本书第二版除对原书内容作必要的修订和补充以外, 增加了与上述问题有关的新内容. 书中保留原有的 1—9 章, 删去第 10 章的惯性导航简介, 增加充液陀螺、自旋卫星、平面上滚动陀螺和陀螺的混沌运动 4 章, 与原章节纳入同一体系. 作为一本力学著作, 书中不涉及具体陀螺仪表的原理和设计问题, 仅叙述具普遍性的力学规律. 与第一版相同, 本书避免使用过于抽象的数学工具, 与正文有关的理论知识在附录中给出.

本书的再版得到国家科学技术学术著作出版基金和上海交通大学船舶海洋与建筑工程学院的支持, 作者在此谨表示衷心感谢. 并望读者对书中错误和不妥之处不吝指正.

刘延柱

2009 年 4 月于上海交通大学



第一版序言

陀螺力学是一般力学的一个重要分支. 它以经典刚体动力学为基础, 并随着陀螺仪技术的发展逐渐形成为一门不同于经典刚体动力学的独立力学分支. 本书的主要目的是系统地叙述陀螺力学的基本理论并介绍近年来的新进展.

自 1978 年以来, 作者曾在上海交通大学为陀螺仪器专业和工程力学专业研究生讲授陀螺力学课程, 并先后为新跃仪表厂和上海仪表厂开设陀螺力学讲座. 本书是在课程讲义的基础上作较大的修改和补充后写成的, 其中关于转子陀螺仪和挠性陀螺仪的较新内容主要来自作者近年来的工作成果. 在写作过程中, 作者力图以最简洁的方式总结万向支架陀螺仪的进动和章动理论, 同时介绍陀螺力学的新进展, 如新型陀螺仪原理、非线性问题、弹性变形问题等, 将这部分内容与万向支架陀螺仪理论乃至刚体动力学的经典理论贯通起来而形成较完整的体系. 但限于水平, 这个意图离完全实现还相距甚远. 此外, 本书着重从动力学观点阐明陀螺仪运动的普遍性规律, 而不企图对具体陀螺仪表作详细解释. 书中避免使用过深的数学工具, 读者只要掌握矢量、矩阵和常微分方程的基本知识就能顺利阅读. 虽然通常认为陀螺与陀螺仪的名词涵义略有不同, 后者主要指工程技术中使用的陀螺仪表, 但在本书中因力学模型相同而不加区别. 在本书的写作和出版过程中, 得到各方面的热情关怀和支持, 承蒙北京航空学院黄克累教授详细审阅初稿并提出宝贵意见, 杨海兴同志协助完成全部插图, 在此谨表深切的谢意.

限于水平, 错误与不妥之处在所难免, 望读者不吝指正.

刘延柱

1982 年 6 月于上海交通大学



主要符号表

符号	含义
a	旋转椭球赤道半轴, 球形转子最大离心变形
a_j	椭球半轴
$\boldsymbol{a}$	加速度
A	面积, 主惯性矩
A_{R}	转子的赤道惯性矩
B	主惯性矩
B_j	第 j 刚体
$\boldsymbol{B}$	磁感应强度
c	旋转椭球极半轴,
$c = C/H$	黏性阻尼系数
C	主惯性矩, 径向修正系数
C_{P}	主刚体极惯性矩
C_{R}	转子极惯性矩
C^*	陀螺体等效惯性矩
C_j	第 j 电极的电容
$\boldsymbol{C}$	有限转动张量, 径向修正矩阵, 阻尼矩阵
$\boldsymbol{C}_p^q$	方向余弦矩阵
d	距离
$d = D/H$	
D	阻尼力矩系数
D_0	绕极轴的阻尼力矩系数
D_1	绕赤道轴的阻尼力矩系数
$D_B = kB^2$	磁场阻尼力矩系数
D_i	参数平面的分区
$\boldsymbol{D}$	并矢, 阻尼矩阵
$\boldsymbol{e}$	基矢量, 转子中心 相对固定轴的位移, 转子球心相对腔体 球心的位移
$\underline{\boldsymbol{e}}$	基矢量列阵
E	沿纬线指东的坐标轴, 总机械能
$\hat{E}$	量纲为一的总机械能
$\boldsymbol{E}$	单位矩阵, 单位并矢
$\mathscr{E}$	地球表面
f	频率
$\boldsymbol{f}$	比力
$\boldsymbol{F}$	力, 摩擦力
$\boldsymbol{F}^*$	惯性力
$\boldsymbol{g}$	重力加速度
G_j	第 j 陀螺
$\boldsymbol{G}$	陀螺力矩阵
h	高度, 转子与腔体的间隙
$\boldsymbol{h}$	转子支点相对平衡 环支点矢径
$\mathscr{H}$	哈密顿函数
$\mathcal{H}$	赫赛矩阵
$H = H_0 \cos \beta_0$	
H_0	动量矩常数
$\boldsymbol{H}$	动量矩
$\boldsymbol{i}$	x 轴基矢量
$\boldsymbol{j}$	y 轴基矢量
$\boldsymbol{J}_{pp}$	惯性矩
$\boldsymbol{J}$	惯性张量
$\boldsymbol{J}^{(1)}$	主刚体的惯性张量
$\boldsymbol{J}^{(2)}$	凝固液体团的惯性张量

$\boldsymbol{J}^*$	液体的等效刚体惯性张量
$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}^{(1)}+\boldsymbol{J}^{(2)}$	
$\boldsymbol{J}_*=\boldsymbol{J}^{(1)}+\boldsymbol{J}^*$	
$\boldsymbol{J}'=\boldsymbol{J}^{(2)}-\boldsymbol{J}^*$	
$\boldsymbol{J}^{(0)}$	惯性矩阵
$\boldsymbol{J}_i$	第 i 刚体的中心惯性张量
$k=\sqrt{\mu/B}$	复摆的固有角频率
$k=\mu/H$	陀螺摆或陀螺罗经固有角频率
$k=\sqrt{K/m}$	固有角频率
$k_s=\sqrt{gR}$	舒勒频率
k_γ	陀螺球摆动角频率
$\boldsymbol{k}$	z 轴基矢量
K	弹簧刚度系数
$\boldsymbol{K}$	刚度矩阵
l	长度, 质心与支点距离
$\boldsymbol{l}$	支点至质心矢径, 质心至底部曲面的曲率中心矢径
L	拉格朗日函数, 积分路径, 轴对称的腔壁母线
$\boldsymbol{L}_i$	框架部件之间的约束力
m	质量
$\boldsymbol{M}$	力矩
$\boldsymbol{M}_{\rm g}$	陀螺力矩
$\boldsymbol{M}_{\rm m}$	驱动力矩
$\boldsymbol{M}_{\rm a}$	惯性力矩
$\boldsymbol{M}_{\rm d}$	阻尼力矩
$\boldsymbol{M}_{\rm s}$	弹簧力矩
$\boldsymbol{M}_{\rm f}$	摩擦力矩
$\boldsymbol{M}_{\rm B}$	磁场感应力矩
$\boldsymbol{M}'$	干扰力矩
n	自旋角速度
$\boldsymbol{n}^0$	法线轴基矢量
N	沿子午线指北的坐标轴
$\mathscr{N}$	与地球面重合的固定球面
$\boldsymbol{N}$	法向约束力
O	陀螺支点, 坐标原点
O_0	固定点
$O_{\rm e}$	地球球心
$O_{\rm s}$	载体质心
p	载体角振动频率, 支承力场强度, 液体压强
p_j	广义动量
$\boldsymbol{p}$	瞬时转动轴基矢量
P	任意点
P_j	第 j 质点, 第 j 复摆
P_j	力矩冲量
q_j	广义坐标
Q_i	广义力
Q_{gi}	陀螺力
r	半径, 曲率半径
$\boldsymbol{r}$	矢径
$\boldsymbol{r}'$	任意点相对地球质心的矢径
$\boldsymbol{r}^0$	球坐标基矢量
$\boldsymbol{r}_{\rm c}$	质心相对参考点的矢径
$\boldsymbol{r}_{\rm P}$	接触点相对固定点的矢径
R	地球半径, 劳斯函数
R^*	简化劳斯函数
$\boldsymbol{R}$	矢径
s	特征值
$s=\omega/k$	量纲为一的角频率
S_j	第 j 电极
S	面积
S_i	奇点
t	时间
$\boldsymbol{t}^0$	子午线切线轴基矢量
T	动能, 周期, 时间常数
T_j	动能中广义速度的 j 次

	齐次式
T_0	转子自旋周期
T_2	相对动能
T_s	舒勒周期
T_p	进动周期
T_γ	陀螺球摆动周期
$u = \cos\vartheta$	
$u = \omega_x + i\omega_y$	
$u = (v_{c\xi} + iv_{c\eta})/h$	
$\boldsymbol{u}$	流体质点的相对流速
$\boldsymbol{u}_0$	椭球腔变换至球腔的流速
$\boldsymbol{v}$	速度, 对地球的相对速度, 流体质点的绝对流速
$\boldsymbol{v}_0$	刚体内参考点的速度
$\boldsymbol{v}^*$	腔体椭球度引起的速度增量
$\boldsymbol{v}_c$	质心速度
V	势能
V_j	第 j 电极的电压
V^*	相对势能
$\mathscr{V}$	李雅普诺夫函数
$\boldsymbol{V}$	绝对速度
$w = \delta + i\gamma$	
$w = \Omega_x' + i\Omega_y'$	
W	力的功
x	坐标轴
$\boldsymbol{x}$	扰动变量
y	坐标轴, x 的导数
$\boldsymbol{y}$	状态变量
z	沿转子极轴的坐标轴
$z = \alpha + i\beta$	
$z = e_x + ie_y$	
z_c	盘旋误差
z_a	加速度误差
z_p	进动解
z_n	章动解
Z	沿地垂线的坐标轴, 章动振幅
α	卡尔丹角, 方向余弦
α_s	陀螺罗经速度误差, 纬度误差
$\boldsymbol{\alpha}$	角加速度
β	卡尔丹角, 方向余弦
$\beta = \omega_0/\omega_c$	
β^*	β 的奇点
γ	卡尔丹角, 内环摆角, 扭角, 方向余弦
$\gamma = \cos\theta$	
$\gamma = A'/A$	
$\gamma_R = C_R\Omega_{R0}/H$	
Γ	影响平均涡量变化率的参数
δ	脉冲函数
δ	锥运动误差, 相位差, 连杆偏角, 扭角
$\delta = a/h_0$	
δ^*	线振动与转动的相位差
δ_{ij}	克罗尼克符号
Δ_η	电极水平错位
$\Delta_\zeta', \Delta_\zeta''$	电极半球高错位
ΔK	扭杆的剩余刚度
$\boldsymbol{\Delta}$	转子径向偏心矢量
ε	连杆偏角, 小参数
$\varepsilon = A_1/A$	
$\varepsilon_i = e_i/h_0$	
ε_0	介电常数
Σ	充液腔壁
ζ	坐标轴, 相对阻尼系数
$\zeta = D/2\sqrt{mK}$	
$\zeta = \omega_x + i\omega_y$	

符号	含义
η	坐标轴
ϑ	欧拉角, 章动角, 偏航角
θ	弹性变形角位移, 球坐标
$\boldsymbol{\theta}^0$	球坐标基矢量
$\lambda = C/A$	
$\lambda^* = C^*/A$	
λ_k	欧拉–罗德里格参数
$\Lambda = C/A$	
$\boldsymbol{\Lambda}$	有限转动四元数
$\boldsymbol{\Lambda}^{(0)}$	四元数列阵, 四元数的期望值
μ	角振动与转子旋转的相位差, 地球引力参数, 动摩擦因数
$\mu = mgl$	摆性系数
$\mu = m_1 m_2 l_1 l_2 / m$	
$\mu = mgr/A\Omega^2$	
$\mu = \mu_x + \mathrm{i}\mu_y$	
$\mu_x = M_x / A\omega_z$	
$\mu_y = M_y / A\omega_z$	
$\hat{\mu} = mgl/A\omega_0^2$	
μ'	液体摆倾覆力矩系数
ν	液体的黏性系数
$\nu = H/A$	章动频率
$\nu = K/H^2$	
ξ	坐标轴
π	准坐标, 近地点
Π	切平面
ρ	密度, 测地曲率半径, 盘旋半径
$\rho = \sqrt{\mu/A}$	复摆的固有角频率
$\rho = A/B$	
$\rho = (C/B) - 1$	
$\rho = D_1/D_0$	
$\rho = r/h$	
$\boldsymbol{\rho}$	相对动参考点的矢径
σ	放大因子, 自旋角速度与轨道角速度之比, 载体角振动角频率, 转子陀螺的转差率
$\sigma = D_0/D$	阻尼系数比
$\sigma = (C/A) - 1$	
σ^*	惯性力激励的放大因子
τ	量纲为一的时间
φ	欧拉角, 自转角, 俯仰角
ϕ	转动角, 地理纬度, 球坐标, 速度势函数
$\boldsymbol{\phi}$	无限小转动矢量
$\boldsymbol{\phi}^0$	球坐标基矢量
Φ	船舶摇摆振幅, 载体角振动振幅
ψ	欧拉角, 进动角, 滚动角
$\boldsymbol{\psi}$	茹可夫斯基势函数
ω	角频率
ω_{R}	船舶摇摆角频率
ω_{cr}	临界角速度
$\boldsymbol{\omega}$	角速度
$\boldsymbol{\omega}_0$	外环角速度, 转子稳态角速度
$\boldsymbol{\omega}_1$	动坐标系角速度, 进动角速度, 平衡环角速度
$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{R}}$	转子角速度
$\boldsymbol{\omega}'$	相对角速度
Ω	绕垂直轴的进动角速度
$\Omega = \Omega_\xi + \mathrm{i}\Omega_\eta$	
Ω_{d}	陀螺漂移率
Ω_1	地球自转角速度的 N 轴投影
Ω_2	地球自转角速度的 Z 轴

投影

Ω_{cr}　Ω 的临界值

Ω　基座角速度, 盘旋角速度, 涡量

Ω'　液体团在刚体内的相对角速度

Ω_D　自然坐标系角速度

Ω_G　地理坐标系角速度

Ω_e　地球自转角速度

Ω_a　平均涡量

Ω_R　转子的相对角速度



目　录

Contents



绪　　论

陀螺力学起源于经典刚体动力学. 1780 年欧拉 (L. Euler) (图 0.1) 建立了以他名字命名的刚体定点运动方程, 奠定了刚体动力学的基础. 经典刚体动力学致力于积分非线性的欧拉方程. 但仅对于有限几种特定条件, 即欧拉 (1765), 拉格朗日 (J. L. Lagrange) (1788) 和科瓦列夫斯卡娅 (S. V. Kovalevskaya)(1888) 三种情形存在解析积分. 其中欧拉情形和拉格朗日情形的解析积分可用于解释天体的转动以及重陀螺在光滑平面上的滚动等运动现象. 1852 年傅科 (J. Foucault) (图 0.2) 在巴黎科学院展示了一台细线悬挂的旋转轴能自由改变方向的转子构成的装置. 是历史上第一台具有科学意义的陀螺仪. 此后随着陀螺仪在导航技术中的广泛应用, 其结构和力学模型日趋复杂. 关于陀螺仪的力学分析已超出了经典刚体动力学的范畴. 常规的框架陀螺仪的力学模型是一个由内外环和转子组成的多刚体系统. 与经典刚体动力学不同, 根据实际陀螺仪力学模型建立起来的动力学方程寻找严格的解析积分几乎不可能. 必须发展一种近似的但又能足够准确地反映实际陀螺仪运动规律的力学理论. 于是出现了以一阶常微分方程组为基础的陀螺进动理论, 成为指导陀螺仪研究和设计的实用理论. 当转速足够高时, 进动理论可给出与实验现象符合得很好的分析结果. 对于不能用进动理论解释的现象, 如与陀螺直接稳定有关的现象, 则发展了陀螺的章动理论. 逐渐形成一门以进动理论和章动理论为特征的不同于经典刚体动力学的独立力学分支 —— 陀螺力学. 在对陀螺力学学科的发展作出重要贡献的学者中, 如格莱曼 (R. Grammel), 布尔加科夫 (B. V. Bulgakov), 麦尔金 (D. R. Merkin), 伊式林斯基 (A. Yu. Ishlinsky), 阿诺德 (R. N. Arnold), 马格努斯 (K. Magnus) 等人的著作早已被我国读者所熟知.

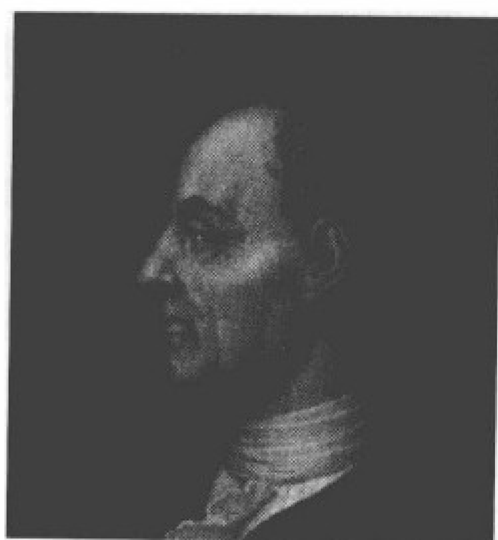


图 0.1　欧拉 (L. Euler 1707—1783)

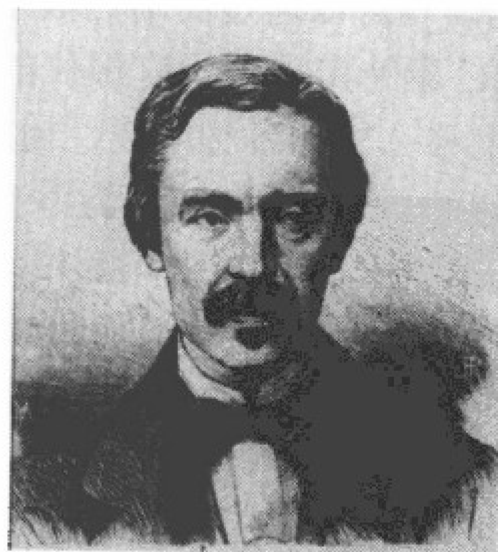


图 0.2　傅科 (J.Foucault 1819—1868)

早期的陀螺力学仅限于线性理论, 它已发展得十分完善, 成为指导航空或航海

陀螺仪表设计的实用理论. 但非线性理论也逐渐显示出重要性. 这不仅是因为陀螺仪实际上存在着诸如轴承间隙、干摩擦或力矩器等非线性特性, 而且随着对陀螺仪精度要求的提高, 线性理论中被忽略了的非线性项的细微影响日益变得不可忽视. 因此非线性振动的各种分析方法随之向陀螺力学渗透而形成陀螺力学的非线性理论. 与陀螺仪有关的混沌理论的研究改变了人们对陀螺仪漂移现象物理本质的认识. 关于库仑摩擦非线性特性的研究则为诸如翻身陀螺和凯尔特石等奇异现象提供正确的力学解释.

长期以来陀螺力学的主要研究对象是框架陀螺仪, 但静电和气浮支承的转子陀螺仪以及动力调谐陀螺仪等非常规陀螺仪的兴起使陀螺力学面临新的课题. 前者涉及转子的不受约束的大幅度运动, 而后者的全部构件都参与高速旋转. 除重力和惯性力以外, 新型陀螺仪还可能受流场、静电场或磁场的作用. 因此必须在新的力学模型基础上建立新理论, 作为新型陀螺仪的研究和设计的理论基础. 对各种新型非常规陀螺仪理论的研究极大地丰富了陀螺力学的内容.

随着科学技术的发展, 陀螺力学的研究领域已不局限于陀螺仪的实用原理, 而是包括一切具有高速旋转特性或称为陀螺特性的工程对象的动力学问题. 其中关于航天工程中自旋航天器的理论研究在陀螺力学中占据重要的位置. 使陀螺力学的研究对象从简单的刚体扩展为由多个刚体、弹性体甚至充液腔体组成的复杂动力学系统.

本书系统地叙述陀螺力学的基本理论. 全书共分 13 章. 第 1 章、第 2 章介绍刚体运动学和动力学的基础知识. 第 3 章建立框架陀螺仪的普遍形式动力学方程. 第 4 章采用与复摆运动类比的方式讨论单自由度陀螺仪的运动. 第 5 章、第 6 章分别叙述两种典型的框架陀螺仪, 即垂直陀螺仪和陀螺罗经的进动理论. 利用相平面的奇点理论对陀螺仪在平衡位置附近的运动作定性分析, 以摆脱繁琐乏味的数学演算, 使读者得以透过简洁的数学表达了解框架陀螺仪理论的丰富内容. 第 7 章基于凯尔文–泰特定理讨论陀螺仪的线性章动理论, 利用简明的近似解析方法分析包括章动漂移在内的各种非线性问题. 第 8 章建立动力调谐陀螺仪的基本理论. 采用逐次近似法, 以陀螺定轴性为零次近似, 其一次和二次近似分别对应于陀螺的进动和章动. 第 9 章建立转子陀螺仪动力学的基本理论. 采用状态变量的摄动方程代替欧拉方程. 对于与惯性运动接近的拟规则进动, 状态变量摄动方程明显比欧拉方程优越. 即使是万向支架陀螺仪, 也可视为受框架惯性力矩干扰的转子陀螺, 采用摄动法处理. 第 10 章讨论带充液腔体刚体的自旋运动. 导出欧拉情形和拉格朗日情形充液刚体的解析形式稳定性判据, 作为充液自旋卫星和充液弹丸的理论基础. 第 11 章叙述自旋和双自旋卫星的动力学, 讨论无力矩情况和受地球引力作用情况下自旋运动的稳定性. 对于卫星大幅转动情况, 利用有限转动四元数表达刚体的姿态, 以避免角度坐标可能出现的奇异性. 第 12 章讨论平面上滚动的轴对称和非轴对称

刚体, 分析库仑摩擦对运动性态的影响, 从而对翻身陀螺和凯尔特石等有趣的力学现象作出理论解释. 第 13 章讨论陀螺运动的混沌性态以及对陀螺漂移现象物理本质的新认识.

为便于阅读, 在附录中补充矢量、并矢和四元数概念以及运动稳定性理论和相平面上的奇点理论等基本知识. 列出相平面的奇点分类表, 作为进动理论中判别陀螺在平衡位置附近的极点轨迹几何特征的参照. 参考文献栏将传统陀螺力学部分和包括新型陀螺仪及自旋卫星等在内的专门问题分章列出以便于查询. 其中仅包括有代表性的或写作中主要参考过的文献以及作者发表的与正文有关的论文, 远非详尽的文献索引. 作为一本力学著作, 本书不涉及具体陀螺仪表的原理和设计问题, 也未列出有关的技术性文献.

第1章　陀螺的运动学

本章叙述与陀螺仪有关的刚体运动学知识. 描述刚体姿态的各种数学方法均基于欧拉的刚体有限转动理论. 欧拉角是经典力学普遍采用的数学工具, 它特别适合描述被称为规则进动的特殊运动形式. 对于工程技术中的运动载体和陀螺仪, 卡尔丹角更适合实际应用. 卡尔丹角名称来源于陀螺仪万向支架的转角, 因为这种万向支架在西方错误地标以卡尔丹的姓名 (他们误以为万向支架是卡尔丹发明的, 但根据中国汉代关于万向支架的文字记载和出土文物的佐证, 万向支架早在卡尔丹前一千多年就已在中国出现). 卡尔丹角由于其直观性和易于线性化而成为描述陀螺仪运动的常用工具. 但在讨论转子陀螺、充液陀螺、平面上滚动陀螺和自旋卫星的运动时, 当运动形态接近规则进动时也采用欧拉角描述. 各种数学形式的运动学方程, 可作为从仪表实测的角速度信息推算载体姿态的计算工具, 但欧拉角或卡尔丹角在计算中均存在奇异位置. 对于刚体大幅转动情形, 必须采用有限转动四元数作为描述刚体姿态的工具. 由于刚体的连续有限转动与转动顺序有关, 因此对于万向支架支承的陀螺仪或平台, 可由于转动顺序的改变而出现运动学误差. 还可能在利用角速度计算载体姿态时出现与非完整约束有关的各种运动学误差.

1.1　刚体的有限转动

1.1.1　刚体

刚体是对刚硬物体的抽象, 它由连续充满空间中某个确定域内的物质组成, 其中任意两点之间的距离保持不变. 在工程技术中, 对于变形很小的物体或虽有变形但不影响整体运动的物体可以简化为刚体. 不受约束的自由刚体相对确定的参考坐标系有 6 个运动自由度, 即刚体内任意点 O 的 3 个移动自由度和刚体绕 O 点的 3 个转动自由度. O 点的移动和刚体绕 O 点的转动可能相互影响, 也可能独立进行. 如果 O 点的运动已独立确定; 其运动规律可视为已知的约束条件, 刚体只有绕 O 点转动的 3 个自由度. O 点在惯性空间中固定不动是一种特例, 此时刚体做绕固定点的转动, 即**刚体定点运动**.

分析刚体绕 O 点的转动规律时, 可将 O 点取作原点建立固结于刚体的连体坐标系表示刚体的位置. 多个刚体绕 O 点转动时, 刚体之间的相对位置由各个连体坐标系之间的方向余弦矩阵确定. 同一刚体绕 O 点多次转动时, 将每次转动后的连

体坐标系位置相对参考坐标系固定而定义一系列中间坐标系, 刚体历次转动前后的位置关系由中间坐标系之间的方向余弦矩阵确定. 方向余弦矩阵元素中的 3 个独立参数体现为刚体绕固定点的 3 个独立的转动自由度.

1.1.2　有限转动张量

刚体做定点转动时, 若转角为有限值, 称为**有限转动**. 根据附录一中叙述的方向余弦矩阵的性质 (A.1.23), 可引出刚体有限转动的基本定理, 即欧拉定理.

欧拉定理: 刚体绕定点 O 的任意有限转动可由绕 O 点的某个轴的一次有限转动实现.

设刚体的**连体坐标系**$(O-xyz)$ 的初始位置为 $(O-x_0y_0z_0)$, 它绕过 O 点的任意轴 p 转过 ϕ 角后的位置为 $(O-x_1y_1z_1)$, p 轴的单位矢量 $\boldsymbol{p}$ 相对 $(O-x_0y_0z_0)$ 和 $(O-x_1y_1z_1)$ 有相同的方向余弦 $p_i\,(i=1,2,3)$. 固定于刚体的任意矢量在转动前后的位置 $\boldsymbol{a}_0$ 及 $\boldsymbol{a}$ 都位于相对 p 轴对称的圆锥面内. 过 $\boldsymbol{a}_0$ 和 $\boldsymbol{a}$ 的矢量端点 P_0 和 P 作平面与 p 轴垂直且相交于 O_1 点, 过 P 点向 O_1P_0 引垂线, 垂足为 Q(见图 1.1), 则有

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_0}+\overrightarrow{P_0Q}+\overrightarrow{QP}\tag{1.1.1}$$

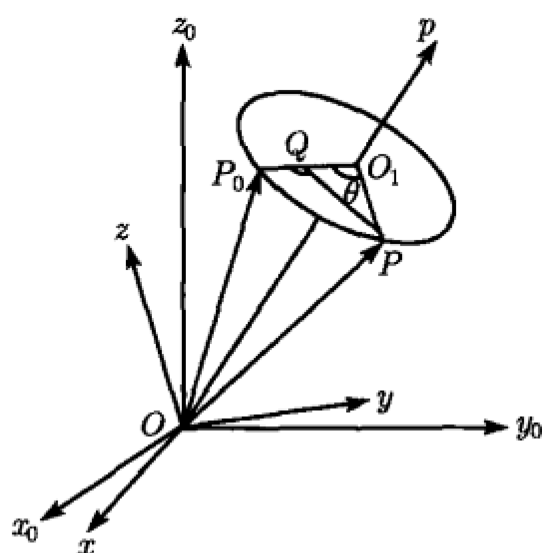


图 1.1　刚体的有限转动

其中的矢量 $\overrightarrow{QP}$ 及 $\overrightarrow{P_0Q}$ 分别沿 $\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{a}_0$ 及 $\boldsymbol{p}\times(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{a}_0)$ 方向, 上式可写作

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_0+(1-\cos\phi)\,\boldsymbol{p}\times(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{a}_0)+\sin\phi\,(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{a}_0)\tag{1.1.2}$$

将其中的二重矢积展开后, 化作

$$\boldsymbol{a}=\cos\phi\,\boldsymbol{a}_0+(1-\cos\phi)(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a}_0)\boldsymbol{p}+\sin\phi\,(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{a}_0)\tag{1.1.3}$$

引入并矢 $\boldsymbol{C}$, 定义为

$$\boldsymbol{C}=\cos\phi\;\;\boldsymbol{E}+(1-\cos\phi)\boldsymbol{pp}+\sin\phi\,(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{E})\tag{1.1.4}$$

其中 $\boldsymbol{E}$ 为单位并矢. 则式 (1.1.2) 的右项可简写为并矢 $\boldsymbol{C}$ 与矢量 $\boldsymbol{a}_0$ 的点积

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{a}_0 \tag{1.1.5}$$

并矢 $\boldsymbol{C}$ 称作刚体的**有限转动张量**. 将矢量式 (1.1.3) 中各项向 $(O - x_1y_1z_1)$ 坐标系投影, 以带括弧的角标表示坐标系的标号. 导出

$$\boldsymbol{a}^{(1)} = \boldsymbol{C}^{(1)}\boldsymbol{a}_0^{(1)} \tag{1.1.6}$$

其中 $\boldsymbol{C}^{(1)}$ 为有限转动张量 $\boldsymbol{C}$ 相对 $(O - x_1y_1z_1)$ 的坐标矩阵

$$\boldsymbol{C}^{(1)} = \cos\phi\,\boldsymbol{E} + (1 - \cos\phi\,)\boldsymbol{p}^{(1)}\boldsymbol{p}^{(1)\mathrm{T}} + \sin\phi\tilde{\boldsymbol{p}}^{(1)} \tag{1.1.7}$$

其中 $\boldsymbol{E}$ 为单位阵, $\boldsymbol{p}^{(1)}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{p}}^{(1)}$ 分别为单位矢量 $\boldsymbol{p}$ 相对 $(O - x_1y_1z_1)$ 的坐标列阵和反对称坐标方阵:

$$\boldsymbol{p}^{(1)} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{p}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & 0 & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.1.8}$$

在式 (1.1.6) 中, 矢量 $\boldsymbol{a}$ 相对 $(O - x_1y_1z_1)$ 的坐标列阵 $\boldsymbol{a}^{(1)}$ 与矢量 $\boldsymbol{a}_0$ 相对 $(O - x_0y_0z_0)$ 的坐标列阵 $\boldsymbol{a}_0^{(0)}$ 完全相同, 因此可将式 (1.1.6) 改写为

$$\boldsymbol{a}_0^{(0)} = \boldsymbol{C}^{(1)}\boldsymbol{a}_0^{(1)} \tag{1.1.9}$$

根据附录一中的式 (A.1.10), 矩阵 $\boldsymbol{C}^{(1)}$ 将同一矢量 $\boldsymbol{a}_0$ 从相对 $(O - x_1y_1z_1)$ 的坐标变换到相对 $(O - x_0y_0z_0)$ 的坐标, 则 $\boldsymbol{C}^{(1)}$ 即为 $(O - x_0y_0z_0)$ 坐标系与有限转动后位置 $(O - x_1y_1z_1)$ 之间的方向余弦矩阵, 将 $\boldsymbol{C}^{(1)}$ 改记为 $\boldsymbol{C}_0^1$①. 展开式 (1.1.7), 得到

$$\boldsymbol{C}_0^1 = \begin{pmatrix} p_1^2(1 - \mathrm{c}\phi) + \mathrm{c}\phi & p_2p_1(1 - \mathrm{c}\phi) - p_3\mathrm{s}\phi & p_3p_1(1 - \mathrm{c}\phi) + p_2\mathrm{s}\vartheta \\ p_2p_1(1 - \mathrm{c}\phi) + p_3\mathrm{s}\phi & p_2^2(1 - \mathrm{c}\phi) + \mathrm{c}\phi & p_3p_2(1 - \mathrm{c}\phi) - p_1\mathrm{s}\phi \\ p_3p_1(1 - \mathrm{c}\phi) - p_2\mathrm{s}\phi & p_3p_2(1 - \mathrm{c}\phi) + p_1\mathrm{s}\phi & p_3^2(1 - \mathrm{c}\phi) + \mathrm{c}\phi \end{pmatrix} \tag{1.1.10}$$

其中 c, s 为 cos, sin 的简写符号. 由于方向余弦之间存在关系式

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1 \tag{1.1.11}$$

因此构成矩阵 $\boldsymbol{C}_0^1$ 各元素的 4 个参数 p_1, p_2, p_3, ϕ 中只有 3 个独立变量, 与刚体绕定点转动的 3 个自由度相对应. 当转动轴位置 $\boldsymbol{p}$ 和转角 ϕ 给定以后, 可利用式

① 此处将方向余弦矩阵相关的坐标系标号分别置于矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的上角和下角. 在下文中, 如相关的坐标轴以不同符号表示, 则将首个坐标轴符号置于矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的上角和下角. 以 $(O - x_0y_0z_0)$ 相对 $(O - \xi\eta\zeta)$ 的方向余弦矩阵为例, 表示为 $\boldsymbol{C}_\xi^{x_0}$.

(1.1.10) 写出刚体转动前后位置之间的方向余弦矩阵. 反之, 任意给定方向余弦矩阵 $\boldsymbol{C}_0^1 = (c_{ij})$, 也可从式 (1.1.10) 逆解出用方向余弦元素 c_{ij} $(i,j=1,2,3)$ 表示的转动轴位置及转角 ϕ

$$\phi = \arccos\left(\frac{\mathrm{tr}\boldsymbol{C}_{01}-1}{2}\right), \quad p_k = \pm\sqrt{\frac{c_{kk}-\cos\phi}{1-\cos\phi}} \quad (k=1,2,3) \tag{1.1.12}$$

将解出的 ϕ 和 p_k 代入式 (1.1.10), 与原矩阵 $\boldsymbol{C}_0^1$ 核对, 以确定 p_k 的正负号. 上式的推导过程从另一途径证明了刚体有限转动的欧拉定理.

刚体绕定点 O 做一系列有限转动时, 等效于绕过 O 点的各次转动轴的一系列转动. 每次转动前后刚体位置的相互关系可利用方向余弦矩阵 (1.1.10) 表示. 多次转动后的刚体位置可利用方向余弦矩阵的连乘积表示. 由于矩阵乘法无交换律, 连乘积必须严格按转动顺序进行. 因此刚体做一系列有限转动后到达的位置不仅取决于各次转动轴在刚体内的位置和转过的角度, 而且与转动的顺序有关.

1.1.3 欧拉角

刚体绕定点 O 的 3 个转动自由度要求有 3 个广义坐标与之相对应. 欧拉提出用 3 个角度坐标作为独立变量. 设想将刚体的有限转动分解为依一定顺序绕连体坐标轴的 3 次有限转动, 则每次转过的角度可定义为确定刚体转动前后相对位置的 3 个广义坐标. 设刚体的连体坐标系从初始位置 $(O-\xi\eta\zeta)$ 出发, 先绕 ζ 轴转动 ψ 角到达 $(O-x_0y_0z_0)$ 位置, 然后绕 x_0 轴转动 ϑ 角到达 $(O-x_1y_1z_1)$ 位置, 最后绕 z_1 轴转动 φ 角到达 $(O-x_2y_2z_2)$ 位置与刚体固定. 将 3 个广义坐标 ψ, ϑ, φ 称为**欧拉角**, 其中 ψ 为**进动角**, ϑ 为**章动角**, φ 为**自转角**(见图 1.2). 此转动过程用以下方式表达, 箭头下方表示转动轴, 上方为转过的角度:

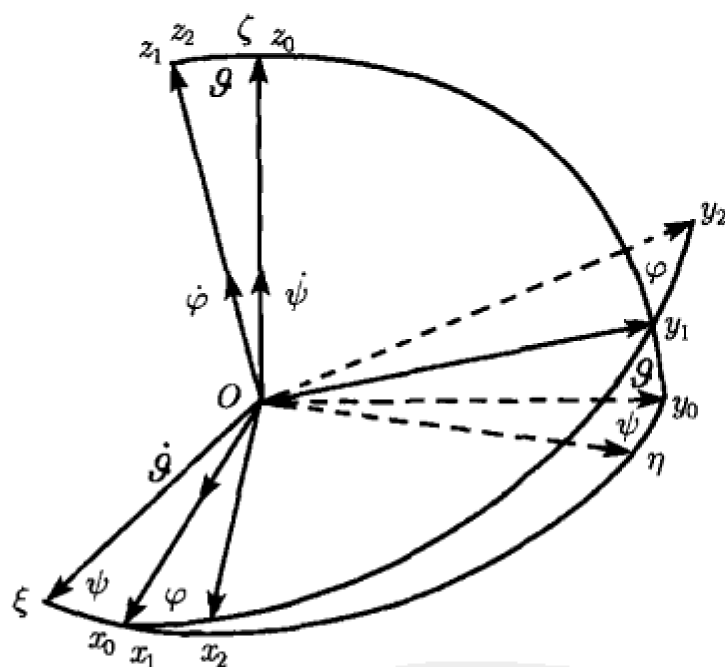


图 1.2　欧拉角

$$(O-\xi\eta\zeta) \xrightarrow[\zeta,\, z_0]{\psi} (O-x_0y_0z_0) \xrightarrow[x_0,\, x_1]{\vartheta} (O-x_1y_1z_1) \xrightarrow[z_1,\, z_2]{\varphi} (O-x_2y_2z_2)$$

两次转动后的连体坐标系 $(O-x_1y_1z_1)$ 位置常称为**莱查坐标系**, 其中的 z_1 轴与刚体固结, x_1 轴沿 (ξ,η) 与 (x_2,y_2) 二坐标平面的节线. 若刚体的质量相对 z_2 轴

对称分布, 则莱查坐标系 $(O-x_1y_1z_1)$ 与连体坐标系 $(O-x_2y_2z_2)$ 同为刚体的主轴坐标系, 但前者不参与刚体绕对称轴的自转, 用作轴对称刚体的参考坐标系可使计算简化.

利用式 (1.1.10) 或直接观察各坐标轴之间夹角的余弦不难确定各次转动所对应的方向余弦矩阵

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{C}_{\xi}^{x_0} &= \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{C}_{x_0}^{x_1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{C}_{x_1}^{x_2} &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{1.1.13}
$$

莱查坐标系 $(O-x_1y_1z_1)$ 和连体坐标系 $(O-x_2y_2z_2)$ 相对 $(O-\xi\eta\zeta)$ 的方向余弦矩阵 $\boldsymbol{C}_{\xi}^{x_1}$ 和 $\boldsymbol{C}_{\xi}^{x_2}$, 可利用附录一中的公式 (A.1.16) 导出

$$
\boldsymbol{C}_{\xi}^{x_1} = \boldsymbol{C}_{\xi}^{x_0}\boldsymbol{C}_{x_0}^{x_1} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\cos\vartheta\sin\psi & \sin\vartheta\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\vartheta\cos\psi & -\sin\vartheta\cos\psi \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \tag{1.1.14}
$$

$$
\boldsymbol{C}_{\xi}^{x_2} = \boldsymbol{C}_{\xi}^{x_1}\boldsymbol{C}_{x_1}^{x_2} = \begin{pmatrix} \mathrm{c}\psi\mathrm{c}\varphi - \mathrm{c}\vartheta\mathrm{s}\psi\mathrm{s}\varphi & -\mathrm{c}\psi\mathrm{s}\varphi - \mathrm{c}\vartheta\mathrm{s}\psi\mathrm{c}\varphi & \mathrm{s}\vartheta\mathrm{s}\psi \\ \mathrm{s}\psi\mathrm{c}\varphi + \mathrm{c}\vartheta\mathrm{c}\psi\mathrm{s}\varphi & -\mathrm{s}\psi\mathrm{s}\varphi + \mathrm{c}\vartheta\mathrm{c}\psi\mathrm{c}\varphi & -\mathrm{s}\vartheta\mathrm{c}\psi \\ \mathrm{s}\vartheta\mathrm{s}\varphi & \mathrm{s}\vartheta\mathrm{c}\varphi & \mathrm{c}\vartheta \end{pmatrix} \tag{1.1.15}
$$

将式 (1.1.15) 中矩阵 $\boldsymbol{C}_{\xi}^{x_2}$ 的元素记作 $c_{ij}\ (i,j=1,2,3)$, 导出用方向余弦表示的欧拉角计算公式

$$
\begin{aligned}
\psi &= \arccos\left(-\frac{c_{23}}{\sin\vartheta}\right) = \arcsin\left(\frac{c_{13}}{\sin\vartheta}\right) \\
\vartheta &= \arccos c_{33} = \arcsin\left(\pm\sqrt{1-c_{33}^2}\right) \\
\varphi &= \arccos\left(\frac{c_{32}}{\sin\vartheta}\right) = \arcsin\left(\frac{c_{31}}{\sin\vartheta}\right)
\end{aligned}
\tag{1.1.16}
$$

在 $\vartheta = n\pi\ (n=0,1,\cdots)$ 的特殊位置, 公式 (1.1.16) 因无意义而成为欧拉角的奇点. 在奇点位置, 由于 z_2 轴与 ζ 轴重合, x_0 轴的位置变得不确定, 角度 ψ 与 φ 亦不能确定. 实际上只要 z_2 轴接近 ζ 轴, ϑ 接近零时即可能出现数值计算的困难.

1.1.4　卡尔丹角

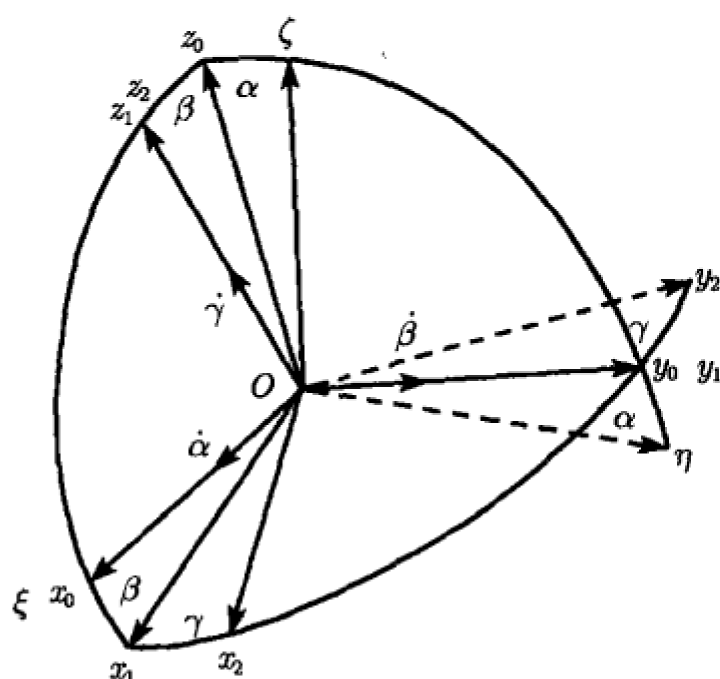


图 1.3　卡尔丹角

欧拉角是经典刚体动力学中使用的广义坐标, 但并非唯一的选择. 实际上从 3 个连体坐标轴按任意顺序选取转动轴 (但不得连续选取同一轴), 所对应的 3 次有限转动角都可作为广义坐标的定义. 例如, 可规定连体坐标系从 $(O-\xi\eta\zeta)$ 位置出发, 首先绕 ξ 轴转动 α 角到达 $(O-x_0y_0z_0)$ 位置, 再绕 y_0 轴转动 β 角到达 $(O-x_1y_1z_1)$ 位置, 作为莱查坐标系. 最后绕 z_1 轴转动 γ 角到达 $(O-x_2y_2z_2)$ 位置. 角度坐标 α,β,γ 称为**卡尔丹角**[①] (见图 1.3). 此转动过程表示为

$$(O-\xi\eta\zeta)\ \underset{\xi,x_0}{\overset{\alpha}{\rightarrow}}\ (O-x_0y_0z_0)\ \underset{y_0,y_1}{\overset{\beta}{\rightarrow}}\ (O-x_1y_1z_1)\ \underset{z_1,z_2}{\overset{\gamma}{\rightarrow}}\ (O-x_2y_2z_2)$$

各次转动对应的方向余弦矩阵为

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{C}_\xi^{x_0} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\\
\boldsymbol{C}_{x_0}^{x_1} &= \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}\\
\boldsymbol{C}_{x_1}^{x_2} &= \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}\right\}\tag{1.1.17}$$

莱查坐标系 $(O-x_1y_1z_1)$ 和连体坐标系 $(O-x_2y_2z_2)$ 相对 $(O-\xi\eta\zeta)$ 的方向余弦矩阵分别为

$$\boldsymbol{C}_\xi^{x_1} = \boldsymbol{C}_\xi^{x_0}\boldsymbol{C}_{x_0}^{x_1} = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ \sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha & -\sin\alpha\cos\beta \\ -\cos\alpha\sin\beta & \sin\alpha & \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix}\tag{1.1.18}$$

① 文献中也称布莱恩特 (Bryant) 角, 或克雷洛夫 (Krylov) 角. 卡尔丹角名称的由来是因为它正好是陀螺仪万向支架的转角, 后者在西方错误地被认为是 16 世纪意大利人卡尔丹 (G. Cardano) 的发明. 详见 1.4.1 节的注释.

$$
\boldsymbol{C}_{\xi}^{x_2}=\boldsymbol{C}_{\xi}^{x_1}\boldsymbol{C}_{x_1}^{x_2}=\begin{pmatrix} \mathrm{c}\beta\mathrm{c}\gamma & -\mathrm{c}\beta\mathrm{s}\gamma & \mathrm{s}\beta \\ \mathrm{c}\alpha\mathrm{s}\gamma+\mathrm{s}\alpha\mathrm{s}\beta\mathrm{c}\gamma & \mathrm{c}\alpha\mathrm{c}\gamma-\mathrm{s}\alpha\mathrm{s}\beta\mathrm{s}\gamma & -\mathrm{s}\alpha\mathrm{c}\beta \\ \mathrm{s}\alpha\mathrm{s}\gamma-\mathrm{c}\alpha\mathrm{s}\beta\mathrm{c}\gamma & \mathrm{s}\alpha\mathrm{c}\gamma+\mathrm{c}\alpha\mathrm{s}\beta\mathrm{s}\gamma & \mathrm{c}\alpha\mathrm{c}\beta \end{pmatrix} \tag{1.1.19}
$$

用 $\boldsymbol{C}_{\xi}^{x_2}$ 的方向余弦元素 c_{ij} $(i,j=1,2,3)$ 表示的卡尔丹角计算公式为

$$
\begin{aligned}
\alpha&=\arccos\left(\frac{c_{33}}{\cos\beta}\right)=\arcsin\left(-\frac{c_{23}}{\cos\beta}\right)\\
\beta&=\arccos\left(\pm\sqrt{1-c_{13}^2}\right)=\arcsin c_{13}\\
\gamma&=\arccos\left(\frac{c_{11}}{\cos\beta}\right)=\arcsin\left(-\frac{c_{12}}{\cos\beta}\right)
\end{aligned} \tag{1.1.20}
$$

卡尔丹角也存在奇点 $\beta=(\pi/2)+n\pi$ $(n=0,1,\cdots)$, 即 z_1 轴与 x_0 轴重合的位置. 但与欧拉角不同, 卡尔丹角的奇点远离 β 角的零点. 对于 z_2 轴与 ζ 轴无限接近的情形, 变量 α,β 可作为无限小量. 若 $(O-x_2y_2z_2)$ 与 $(O-\xi\eta\zeta)$ 的各轴均无限接近, 则 α,β,γ 均可作为无限小量. 因此卡尔丹角特别适合于讨论 z_2 轴在 ζ 轴附近, 或 $(O-x_2y_2z_2)$ 各轴均在 $(O-\xi\eta\zeta)$ 附近的刚体运动.

1.2　刚体的无限小转动

1.2.1　无限小转动矢量

当刚体绕 O 点转动的角度极小可视为无限小量时, 称为刚体的**无限小转动**. 用卡尔丹角表示刚体位置, 只保留无限小转角 α,β,γ 的一次项, 方向余弦公式 (1.1.17) 简化为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{C}_{\xi}^{x_0}&=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}\\
\boldsymbol{C}_{x_0}^{x_1}&=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\beta & 0 & 1 \end{pmatrix}\\
\boldsymbol{C}_{x_1}^{x_2}&=\begin{pmatrix} 1 & -\gamma & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{1.2.1}
$$

式 (1.1.19) 简化为

$$C_{\xi}^{x_2} = C_{\xi}^{x_0} C_{x_0}^{x_1} C_{x_1}^{x_2} = \begin{pmatrix} 1 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 1 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 1 \end{pmatrix} \tag{1.2.2}$$

对比式 (1.2.1) 与 (1.2.2) 可看出, 对于无限小转动的特殊情形, 方向余弦矩阵的乘法运算简化为只需在单位阵的非对角线位置内填入参与运算的各个矩阵元素, 而不须考虑各矩阵在运算中的排列次序. 因此与有限转动不同, 刚体做一系列无限小转动后的位置与转动顺序无关.

根据欧拉定理, 刚体的任意无限小转动与绕转动轴 $\boldsymbol{p}$ 的一次无限小转动 ϕ 等效. 利用方向余弦公式 (1.1.10) 计算 $C_{\xi}^{x_2}$, 只保留其中 ϕ 的一次项, 简化为

$$C_{\xi}^{x_2} = \begin{pmatrix} 1 & -p_3\phi & p_2\phi \\ p_3\phi & 1 & -p_1\phi \\ -p_2\phi & p_1\phi & 1 \end{pmatrix} \tag{1.2.3}$$

将式 (1.2.3) 与 (1.2.2) 比较可得出结论: 刚体绕 $\boldsymbol{p}$ 轴的一次无限小转动 ϕ 可分解为刚体绕连体坐标轴 x, y, z 的三次无限小转动 α, β, γ, 只要令

$$\alpha = p_1\phi, \quad \beta = p_2\phi, \quad \gamma = p_3\phi \tag{1.2.4}$$

定义矢量 $\boldsymbol{\phi}$, 它沿转动轴 $\boldsymbol{p}$ 的方向, 以转过的角度 ϕ 为模, 指向由右手定则确定, 称为**无限小转动矢量**. 上述分析证明无限小转动矢量服从矢量的加法规则, 可写作

$$\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma} \tag{1.2.5}$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 分别为沿 x, y, z 各轴的无限小转动矢量.

1.2.2　瞬时角速度与角加速度

刚体做定点转动时, 在 t 与 $t + \Delta t$ 之间无限小时间间隔内完成的无限小转动 $\Delta\boldsymbol{\phi}$ 所对应的一次转动轴 $\boldsymbol{p}$ 称为刚体在 t 时刻的**瞬时转动轴**. 将沿瞬时转动轴 $\boldsymbol{p}$ 的无限小转动矢量 $\Delta\boldsymbol{\phi}$ 除以 Δt, 令 $\Delta t \to 0$, 其极限以矢量符号 $\boldsymbol{\omega}$ 表示

$$\boldsymbol{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{\phi}}{\Delta t} = \dot{\phi}\boldsymbol{p} \tag{1.2.6}$$

其中以点号表示对时间 t 的导数. $\boldsymbol{\omega}$ 定义为刚体的**瞬时角速度**矢量, 其模等于 $\Delta t \to 0$ 时 $\Delta\phi/\Delta t$ 的极限值, 方向沿瞬时转动轴. 设矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 相对连体坐标系 $(O - x_2y_2z_2)$ 的投影为

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x\, \boldsymbol{i}_2 + \omega_y\, \boldsymbol{j}_2 + \omega_z\, \boldsymbol{k}_2 \tag{1.2.7}$$

角速度分量 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ 可在形式上写作 π_x, π_y, π_z 的导数

$$\omega_x = \dot{\pi}_x, \quad \omega_y = \dot{\pi}_y, \quad \omega_z = \dot{\pi}_z \tag{1.2.8}$$

除刚体做定轴转动或平面运动的特殊情况以外, 一般情况下上式不可积. 因此虽然 π_x, π_y, π_z 的导数有物理意义, 但本身不能作为坐标存在, 称为**准坐标或伪坐标**.

若刚体相对定参考系 $(O-\xi\eta\zeta)$ 的位置用欧拉角表示, 刚体作无限小转动 $\Delta\phi$ 时, 各欧拉角的增量分别为 $\Delta\psi, \Delta\vartheta, \Delta\varphi$, 则瞬时角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 可分解为绕 z_0, x_1, z_2 各轴转动角速度的矢量和

$$\boldsymbol{\omega} = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta\psi}{\Delta t}\boldsymbol{k}_0 + \frac{\Delta\vartheta}{\Delta t}\boldsymbol{i}_1 + \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\boldsymbol{k}_2\right) = \dot{\psi}\boldsymbol{k}_0 + \dot{\vartheta}\boldsymbol{i}_1 + \dot{\varphi}\boldsymbol{k}_2 \tag{1.2.9}$$

利用方向余弦矩阵 (1.1.13), (1.1.14) 将矢量式 (1.2.9) 投影到连体坐标系 $(O-x_2y_2z_2)$, 导出用欧拉角及其导数表示的角速度

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\psi}\sin\vartheta\sin\varphi + \dot{\vartheta}\cos\varphi\\ \omega_y &= \dot{\psi}\sin\vartheta\cos\varphi - \dot{\vartheta}\sin\varphi\\ \omega_z &= \dot{\psi}\cos\vartheta + \dot{\varphi}\end{aligned} \tag{1.2.10}$$

若改用卡尔丹角表示角速度 $\boldsymbol{\omega}$, 则有

$$\boldsymbol{\omega} = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}\boldsymbol{i}_0 + \frac{\Delta\beta}{\Delta t}\boldsymbol{j}_1 + \frac{\Delta\gamma}{\Delta t}\boldsymbol{k}_2\right) = \dot{\alpha}\boldsymbol{i}_0 + \dot{\beta}\boldsymbol{j}_1 + \dot{\gamma}\boldsymbol{k}_2 \tag{1.2.11}$$

利用方向余弦矩阵 (1.1.17), (1.1.18) 投影到连体坐标系 $(O-x_2y_2z_2)$, 导出用卡尔丹角及其导数表示的角速度

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\alpha}\cos\beta\cos\gamma + \dot{\beta}\sin\gamma\\ \omega_y &= -\dot{\alpha}\cos\beta\sin\gamma + \dot{\beta}\cos\gamma\\ \omega_z &= \dot{\alpha}\sin\beta + \dot{\gamma}\end{aligned} \tag{1.2.12}$$

刚体的**瞬时角加速度** $\boldsymbol{\alpha}$ 定义为瞬时角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 对 t 的导数

$$\boldsymbol{\alpha} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{\omega}}{\Delta t} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \tag{1.2.13}$$

由于刚体的瞬时转动轴位置可随时间改变, 瞬时角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 不仅改变模而且改变方向, 因此与刚体的定轴转动不同, 刚体定点运动的瞬时角加速度矢量 $\boldsymbol{\alpha}$ 不一定沿瞬时转动轴方向.

1.2.3 欧拉运动学方程

将方程 (1.2.10) 的系数矩阵求逆, 导出

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= (\omega_x\sin\varphi + \omega_y\cos\varphi)/\sin\vartheta\\ \dot{\vartheta} &= \omega_x\cos\varphi - \omega_y\sin\varphi\\ \dot{\varphi} &= -(\omega_x\sin\varphi + \omega_y\cos\varphi)\cot\vartheta + \omega_z\end{aligned} \tag{1.2.14}$$

方程组 (1.2.13) 称为**欧拉运动学方程**. 若 $\omega_x,\omega_y,\omega_z$ 的变化规律可被量测, 一般情况下可对此非线性微分方程作数值积分, 得到欧拉角 ψ,ϑ,φ 的变化规律. 但在 $\vartheta=n\pi(n=0,1,\cdots)$ 附近, 运动学方程的右端无限增大, 数值积分无法进行.

类似地, 对方程 (1.2.12) 的系数矩阵求逆, 导出用卡尔丹角表达的运动学方程

$$
\begin{aligned}
\dot{\alpha} &= (\omega_x\cos\gamma-\omega_y\sin\gamma)/\cos\beta\\
\dot{\beta} &= \omega_x\sin\gamma+\omega_y\cos\gamma\\
\dot{\gamma} &= (-\omega_x\cos\gamma+\omega_y\sin\gamma)\tan\beta+\omega_z
\end{aligned}
\tag{1.2.15}
$$

在 $\beta=\pi/2+n\pi\ (n=0,1,\cdots)$ 附近, 数值积分也出现困难. $\vartheta=n\pi$ 和 $\beta=\pi/2+n\pi\,(n=0,1,\cdots)$ 分别为欧拉角和卡尔丹角的奇异位置. 若待定的角度坐标在零值附近, 则欧拉角明显不如卡尔丹角有利. 因为前者的零值恰好为奇异位置, 而后者的奇异位置远离零值.

1.3　有限转动四元数

1.3.1　欧拉–罗德里格参数

采用角度坐标表示刚体的姿态, 无论欧拉角或卡尔丹角都不可避免地存在奇异位置问题. 相比之下, 用卡尔丹角描述陀螺仪的姿态更有利, 因为陀螺仪的偏角通常很小, 不会接近 $\pi/2$ 的奇异位置. 但对于太空中自旋航天器, 其不受限制的姿态运动必须避免任何奇异位置. 1840 年法国数学家罗德里格 (B.O. Rodriques) 提出描述刚体姿态的新参数可以彻底解决奇异问题.

利用半角公式, 将式 (1.1.10) 的方向余弦矩阵 C_0^1 中的各元素化作以 $\sin(\phi/2)$ 和 $\cos(\phi/2)$ 表示, 定义以下符号

$$
\lambda_0=\cos\frac{\phi}{2},\quad \lambda_k=p_k\sin\frac{\phi}{2}\quad (k=1,2,3) \tag{1.3.1}
$$

所定义的 4 个实数 $\lambda_k\ (k=0,1,2,3)$ 称为**欧拉–罗德里格参数**, 或简称**罗德里格参数**[①]. 各参数之间存在如下关系式

$$
\lambda_0^2+\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2=1 \tag{1.3.2}
$$

因此用罗德里格参数表示刚体之间的相对位置时也只有 3 个独立变量. 刚体有限转动前后的方向余弦矩阵 C_0^1 可用罗德里格参数表示为

① 国内外一些著作和教材中常将此种表达方式称为欧拉参数. 但据考证, 利用半角公式定义的参数主要来自罗德里格. 此处改称欧拉–罗德里格参数, 简称罗德里格参数.

$$C_0^1 = \begin{pmatrix} 2\left(\lambda_0^2+\lambda_1^2\right)-1 & 2\left(\lambda_1\lambda_2-\lambda_0\lambda_3\right) & 2\left(\lambda_1\lambda_3+\lambda_0\lambda_2\right) \\ 2\left(\lambda_2\lambda_1+\lambda_0\lambda_3\right) & 2\left(\lambda_0^2+\lambda_2^2\right)-1 & 2\left(\lambda_2\lambda_3-\lambda_0\lambda_1\right) \\ 2\left(\lambda_3\lambda_1-\lambda_0\lambda_2\right) & 2\left(\lambda_3\lambda_2+\lambda_0\lambda_1\right) & 2\left(\lambda_0^2+\lambda_3^2\right)-1 \end{pmatrix} \tag{1.3.3}$$

也可写作

$$\boldsymbol{C}_0^1 = \boldsymbol{R}^*\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \tag{1.3.4}$$

其中 $\boldsymbol{R}$ 与 $\boldsymbol{R}^*$ 均为由罗德里格参数构成的 3×4 矩阵, 由完全相同的第一列和相互转置的 3 阶方阵组成

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_0 & \lambda_3 & -\lambda_2 \\ -\lambda_2 & -\lambda_3 & \lambda_0 & \lambda_1 \\ -\lambda_3 & \lambda_2 & -\lambda_1 & \lambda_0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{R}^* = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ -\lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_0 & -\lambda_1 \\ -\lambda_3 & -\lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_0 \end{pmatrix} \tag{1.3.5}$$

对于任意给定的方向余弦矩阵 $\boldsymbol{C}_0^1 = (c_{ij})$, 罗德里格参数可用方向余弦元素 c_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ 表示为

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{1+\mathrm{tr}\boldsymbol{C}_{01}}{2}}, \quad \lambda_k = \pm\sqrt{\frac{1+c_{kk}}{2}-\lambda_0^2} \quad (k=1,2,3) \tag{1.3.6}$$

将解出的罗德里格参数代入式 (1.3.3), 与原矩阵 $\boldsymbol{C}_0^1$ 核对, 以确定 λ_k 的正负号, 再代入式 (1.3.1), 解出转动轴位置 p_k $(k = 1, 2, 3)$ 和转角 ϕ.

1.3.2 有限转动四元数

利用附录一中关于四元数的知识, 可将罗德里格参数用四元数 $\boldsymbol{\Lambda}$ 表示, 称为**有限转动四元数**.

$$\boldsymbol{\Lambda} = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda} \tag{1.3.7}$$

关系式 (1.3.2) 表明有限转动四元数 $\boldsymbol{\Lambda}$ 为规范四元数.

$$|\boldsymbol{\Lambda}| = \boldsymbol{\Lambda} \circ \boldsymbol{\Lambda}^* = \boldsymbol{\Lambda}^* \circ \boldsymbol{\Lambda} = 1 \tag{1.3.8}$$

矢量形式的有限转动公式 (1.1.3) 可利用有限转动四元数 $\boldsymbol{\Lambda}$ 及其共轭四元数 $\boldsymbol{\Lambda}^*$ 表示为

$$\boldsymbol{a} = (2\lambda_0^2 - 1)\boldsymbol{a}_0 + 2\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_0) + 2\lambda_0(\boldsymbol{\lambda}\times\boldsymbol{a}_0) = \boldsymbol{\Lambda}\circ\boldsymbol{a}_0\circ\boldsymbol{\Lambda}^* \tag{1.3.9}$$

将上式左、右两边各乘以 $\boldsymbol{\Lambda}^*$ 及 $\boldsymbol{\Lambda}$, 考虑式 (1.3.8), 逆解出

$$\boldsymbol{a}_0 = \boldsymbol{\Lambda}^*\circ\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{\Lambda} \tag{1.3.10}$$

若刚体相继做两次有限转动. 第一次有限转动四元数 $\boldsymbol{\Lambda}_1$ 将矢量 $\boldsymbol{a}_0$ 转至 $\boldsymbol{a}_1$ 位置

$$\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{\Lambda}_1\circ\boldsymbol{a}_0\circ\boldsymbol{\Lambda}_1^* \tag{1.3.11}$$

第二次有限转动四元数 $\boldsymbol{\Lambda}_2$ 将矢量 $\boldsymbol{a}_1$ 转至 $\boldsymbol{a}$ 位置, 将上式代入后导出

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\Lambda}_2 \circ \boldsymbol{a}_1 \circ \boldsymbol{\Lambda}_2^* = \boldsymbol{\Lambda} \circ \boldsymbol{a}_0 \circ \boldsymbol{\Lambda}^*, \quad \boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Lambda}_2 \circ \boldsymbol{\Lambda}_1 \tag{1.3.12}$$

从而表明, 刚体相继两次有限转动可由一次有限转动实现, 合成的有限转动四元数等于各次有限转动四元数的乘积. 此结论不难推广到刚体相继作 n 次有限转动的一般情形, 其合成的有限转动四元数为

$$\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Lambda}_n \circ \boldsymbol{\Lambda}_{n-1} \circ \cdots \circ \boldsymbol{\Lambda}_2 \circ \boldsymbol{\Lambda}_1 \tag{1.3.13}$$

有限转动次序的不可交换性由四元数乘法运算的不可交换性所体现.

1.3.3　瞬时角速度

将 Δt 时间间隔内完成的无限小转动 $\Delta\boldsymbol{\phi}$ 用有限转动四元数的增量表示. 设 $\Delta\phi_i^{(0)}(i=1,2,3)$ 为 $\Delta\boldsymbol{\phi}$ 在 $(O-\xi\eta\zeta)$ 中的投影, 代入式 (1.3.1), 只保留其一次项, 得到无限小转动 $\Delta\boldsymbol{\phi}$ 对应的四元数 $\boldsymbol{\Lambda}_{\Delta\phi}$, 其相对 $(O-\xi\eta\zeta)$ 的标量列阵 $\boldsymbol{\Lambda}_{\Delta\phi}^{(0)}$ 为

$$\boldsymbol{\Lambda}_{\Delta\phi}^{(0)} = (1 \quad \Delta\phi_1^{(0)}/2 \quad \Delta\phi_2^{(0)}/2 \quad \Delta\phi_3^{(0)}/2)^{\mathrm{T}} \tag{1.3.14}$$

设刚体相对 $(O-\xi\eta\zeta)$ 的四元数 $\boldsymbol{\Lambda}_0$ 的标量列阵 $\boldsymbol{\Lambda}_0^{(0)}$ 为

$$\boldsymbol{\Lambda}_0^{(0)} = (\lambda_0 \ \ \lambda_1 \ \ \lambda_2 \ \ \lambda_3)^{\mathrm{T}} \tag{1.3.15}$$

利用式 (1.3.13), 刚体做无限小转动后的四元数 $\boldsymbol{\Lambda}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}_0$, $\boldsymbol{\Lambda}_{\Delta\phi}$ 之间满足以下关系

$$\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Lambda}_{\Delta\phi} \circ \boldsymbol{\Lambda}_0 \tag{1.3.16}$$

上式中的四元数乘法可用投影矩阵的运算实现, 写作

$$\boldsymbol{\Lambda}^{(0)} = \tilde{\boldsymbol{\Lambda}}_{\Delta\phi}^{(0)} \boldsymbol{\Lambda}_0^{(0)} \tag{1.3.17}$$

其中 $\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}_{\Delta\phi}^{(0)}$ 为按式 (A.1.53) 定义的 $\boldsymbol{\Lambda}_{\Delta\phi}$ 的标量方阵

$$\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}_{\Delta\phi}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & -\Delta\phi_1^{(0)}/2 & -\Delta\phi_2^{(0)}/2 & -\Delta\phi_3^{(0)}/2 \\ \Delta\phi_1^{(0)}/2 & 1 & -\Delta\phi_3^{(0)}/2 & \Delta\phi_2^{(0)}/2 \\ \Delta\phi_2^{(0)}/2 & \Delta\phi_3^{(0)}/2 & 1 & -\Delta\phi_1^{(0)}/2 \\ \Delta\phi_3^{(0)}/2 & -\Delta\phi_2^{(0)}/2 & \Delta\phi_1^{(0)}/2 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.3.18}$$

将式 (1.3.17) 两边减去 $\boldsymbol{\Lambda}_0^{(0)}$, 令 $\Delta\boldsymbol{\Lambda}^{(0)} = \boldsymbol{\Lambda}^{(0)} - \boldsymbol{\Lambda}_0^{(0)}$ 为无限小转动引起的四元数增量 $\Delta\lambda_j(j=0,1,2,3)$ 组成的 4 阶列阵, 得到

$$\Delta\boldsymbol{\Lambda}^{(0)} = \left(\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}_{\Delta\phi}^{(0)} - \boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{\Lambda}_0^{(0)} = \frac{1}{2}\boldsymbol{R}^{*\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{\phi}^{(0)} \tag{1.3.19}$$

其中 $\boldsymbol{E}$ 为 4 阶单位阵, 4×3 矩阵 $\boldsymbol{R}^{*\mathrm{T}}$ 为式 (1.3.5) 定义的 $\boldsymbol{R}^*$ 的转置阵, $\Delta\boldsymbol{\phi}^{(0)}$ 为 $\Delta\phi_i^{(0)}(i=1,2,3)$ 组成的 3 阶列阵

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{\Lambda}^{(0)} &= (\Delta\lambda_0 \quad \Delta\lambda_1 \quad \Delta\lambda_2 \quad \Delta\lambda_3)^{\mathrm{T}} \\ \Delta\boldsymbol{\phi}^{(0)} &= (\Delta\varphi_1^{(0)} \quad \Delta\varphi_2^{(0)} \quad \Delta\varphi_3^{(0)})^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{1.3.20}$$

令方程 (1.3.19) 左乘 $\boldsymbol{R}^*$, 导出

$$\Delta\boldsymbol{\phi}^{(0)} = 2\boldsymbol{R}^*\Delta\boldsymbol{\Lambda}^{(0)} \tag{1.3.21}$$

将方向余弦矩阵 $\boldsymbol{C}_0^1 = \boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{*\mathrm{T}}$ 与上式左乘, 使无限小转动 $\Delta\boldsymbol{\phi}$ 的投影列阵变换到刚体坐标系 $(O-x_2y_2z_2)$, 记作 $\Delta\boldsymbol{\phi}^{(1)}$. 直接验算可证明以下关系式

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^* = \boldsymbol{R} \tag{1.3.22}$$

导出

$$\Delta\boldsymbol{\phi}^{(1)} = \boldsymbol{C}_0^1\Delta\boldsymbol{\phi}^{(0)} = 2\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^*\Delta\boldsymbol{\Lambda}^{(0)} = 2\boldsymbol{R}\Delta\boldsymbol{\Lambda}^{(0)} \tag{1.3.23}$$

导出无限小转动 $\Delta\boldsymbol{\phi}$ 沿 $(O-x_3y_3z_3)$ 各轴的投影 $\Delta\phi_x$, $\Delta\phi_y$, $\Delta\phi_z$. 略去上角标, 得到

$$\begin{aligned}\Delta\phi_x &= 2\left(-\lambda_1\Delta\lambda_0 + \lambda_0\Delta\lambda_1 + \lambda_3\Delta\lambda_2 - \lambda_2\Delta\lambda_3\right) \\ \Delta\phi_y &= 2\left(-\lambda_2\Delta\lambda_0 - \lambda_3\Delta\lambda_1 + \lambda_0\Delta\lambda_2 + \lambda_1\Delta\lambda_3\right) \\ \Delta\phi_z &= 2\left(-\lambda_3\Delta\lambda_0 + \lambda_2\Delta\lambda_1 - \lambda_1\Delta\lambda_2 + \lambda_0\Delta\lambda_3\right)\end{aligned} \tag{1.3.24}$$

将上式各项除以 Δt, 令 $\Delta t \to 0$, 得到角速度的四元数表达式

$$\begin{aligned}\omega_x &= 2\left(\lambda_0\dot{\lambda}_1 - \lambda_1\dot{\lambda}_0 + \lambda_3\dot{\lambda}_2 - \lambda_2\dot{\lambda}_3\right) \\ \omega_y &= 2\left(\lambda_0\dot{\lambda}_2 - \lambda_2\dot{\lambda}_0 + \lambda_1\dot{\lambda}_3 - \lambda_3\dot{\lambda}_1\right) \\ \omega_z &= 2\left(\lambda_0\dot{\lambda}_3 - \lambda_3\dot{\lambda}_0 + \lambda_2\dot{\lambda}_1 - \lambda_1\dot{\lambda}_2\right)\end{aligned} \tag{1.3.25}$$

1.3.4　欧拉运动学方程

将式 (1.3.2) 各项求导, 得到

$$\lambda_0\dot{\lambda}_0 + \lambda_1\dot{\lambda}_1 + \lambda_2\dot{\lambda}_2 + \lambda_3\dot{\lambda}_3 = 0 \tag{1.3.26}$$

从上式与方程组 (1.3.25) 联立, 逆解出

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_0 &= \frac{1}{2}\left(-\omega_x\lambda_1 - \omega_y\lambda_2 - \omega_z\lambda_3\right) \\ \dot{\lambda}_1 &= \frac{1}{2}\left(\omega_x\lambda_0 - \omega_y\lambda_3 + \omega_z\lambda_2\right) \\ \dot{\lambda}_2 &= \frac{1}{2}\left(\omega_x\lambda_3 + \omega_y\lambda_0 - \omega_z\lambda_1\right) \\ \dot{\lambda}_3 &= \frac{1}{2}\left(-\omega_x\lambda_2 + \omega_y\lambda_1 + \omega_z\lambda_0\right)\end{aligned} \tag{1.3.27}$$

即四元数形式的欧拉运动学方程, 可用矩阵形式表示为

$$\dot{\boldsymbol{\Lambda}}^{(0)} = \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(0)}\boldsymbol{\Lambda}^{(0)} \tag{1.3.28}$$

其中 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(0)}$ 为由 $\boldsymbol{\omega}$ 的投影组成的 4 阶反对称方阵, 定义为

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z \\ \omega_x & 0 & \omega_z & -\omega_y \\ \omega_y & -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_z & \omega_y & -\omega_x & 0 \end{pmatrix} \tag{1.3.29}$$

四元数的运动学方程 (1.3.27) 为线性微分方程, 不包含三角函数也不存在奇点. 与用欧拉角或卡尔丹角表示的非线性运动学方程 (1.2.14) 或 (1.2.15) 相比, 其数值积分运算具有明显的优越性.

1.4　万向支架的运动学特点

1.4.1　陀螺仪与万向支架

作为陀螺力学研究对象的**陀螺仪**, 一般是指绕对称轴高速旋转的轴对称刚体, 其旋转轴在空间中的方位可自由改变的机械装置. 高速旋转的刚体称为转子, 它相对旋转轴上某个固定点具有 3 个转动自由度. 此转动自由度的实现由特殊的支承装置所保证, 因此陀螺仪的确切涵义应为包括高速旋转转子和支承装置在内的机械系统. **万向支架**是一种传统的支承装置, 由两个环构成, 即**外环和内环**[①]. 外环安装在统称为载体的船舶或飞机上, 可绕外环轴相对载体转动; 内环安装在外环上, 可绕与外环轴垂直的内环轴相对外环转动; 被支承刚体安装在内环上, 可绕与内环轴垂直的旋转轴相对内环转动. 外环轴、内环轴与被支承刚体的旋转轴汇交于一点 O, 称为万向支架的支承中心或简称为**支点**, 它是被支承刚体相对载体的唯一固定点. 外环、内环和被支承刚体相对载体分别具有一个、两个和三个转动自由度 (见图 1.5). 设起始时固结于被支承刚体的坐标系恰与外环轴、内环轴与刚体旋转轴相互正交时组成的直角坐标系重合, 则刚体绕 O 点的任意转动可分解为依次绕外环轴、内环轴和刚体旋转轴的一系列转动的合成. 当刚体严格按上述次序转动时, 外环、内环和被支承刚体即成为物质化了的中间坐标系, 它们的转角即 1.1.4 节中定义的卡尔丹角. 被支承刚体的有限转动与转动顺序有关, 转动顺序则由万向支架的结构完全确定, 由于结构差异导致的运动学误差称为**万向支架误差**.

① 这种万向支架在西方错误地认为是 16 世纪意大利人卡尔丹 (G. Cardano) 的发明. 实际上万向支架的真正创造者属于我国劳动人民. 西安出土的唐代文物镂空银薰球中的香盂就已采用了精巧的万向支架支承. 更早的文字记载出自西汉刘歆《西京杂记》, 比卡尔丹提前了一千多年.

用万向支架支承轴对称刚体转子构成**框架陀螺仪**. 上述卡尔丹角中, α, β 分别为外环和内环转角, γ 为被支承刚体的转角, 如图 1.4 所示. 转子的对称轴称为**极轴**, 垂直于极轴的平面称为**赤道面**. 包含极轴的坐标系称为极轴坐标系, 它由极轴和赤道平面内任意选取的两根坐标轴组成. **莱查坐标系**是一种特殊的极轴坐标系, 它仅指示极轴的方位却不参与转子的高速旋转. 万向支架陀螺仪的莱查坐标系即内环坐标系. 通常规定陀螺仪的自由度数目根据极轴的转动自由度定义. 上述万向支架陀螺仪称为二自由度陀螺仪, 如外环与载体固定或内环与外环固定, 则失去一个自由度成为单自由度陀螺仪[①]. 除陀螺仪以外, 万向支架也可用来支承**平台**, 后者并不高速旋转, 只力求保持水平.

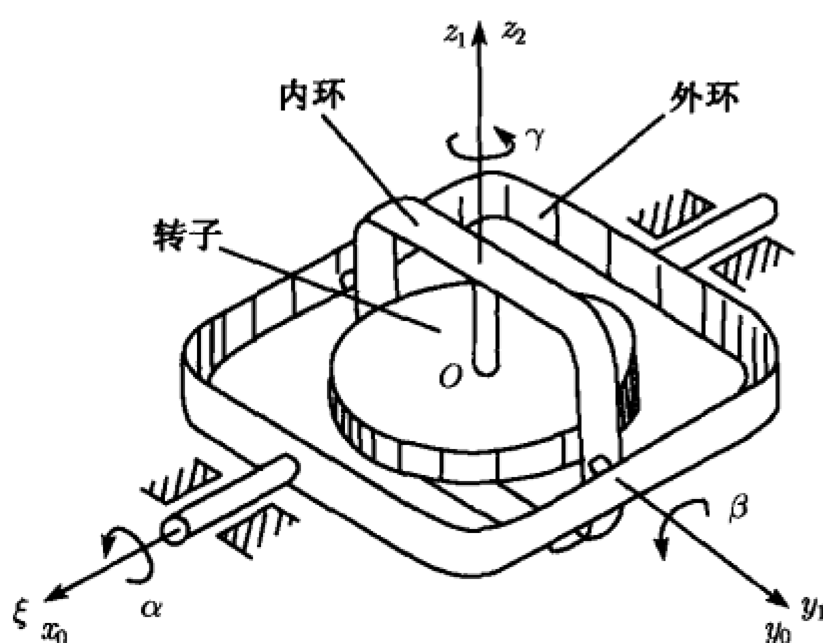


图 1.4　万向支架陀螺仪

1.4.2　平台的万向支架误差

纯粹由万向支架的运动学特性所引起的陀螺仪或平台的指示误差称为万向支架误差. 讨论用万向支架支承的两个稳定平台, 台面的水平位置由控制系统所保证. 设平台 1(见图 1.5(a)) 的外环轴沿载体坐标系 $(O-\xi\eta\zeta)$ 的 ξ 轴, 外环不偏转时内环轴沿 η 轴. 平台 2 (见图 1.5(b)) 的内、外环位置恰好相反. 以 $(O-x_iy_iz_i)\,(i=1,2)$ 表示与二平台固结的坐标系, z_i 轴 $(i=1,2)$ 为二台面的法线轴, 无偏转时 $(O-x_iy_iz_i)\,(i=1,2)$ 与 $(O-\xi\eta\zeta)$ 重合. 设 α_1 和 β_1 为平台 1 的外环相对载体和内环相对外环的转角, 转动次序为

$$(O-\xi\eta\zeta) \underset{\xi, x_0}{\overset{\alpha_1}{\longrightarrow}} (O-x_0y_0z_0) \underset{y_0, y_1}{\overset{\beta_1}{\longrightarrow}} (O-x_1y_1z_1)$$

① 陀螺仪的自由度数目通常根据转子旋转轴的自由度定义, 但前苏联关于陀螺仪的文献根据转子的自由度定义, 将前者的单自由度和二自由度陀螺改称二自由度和三自由度陀螺.

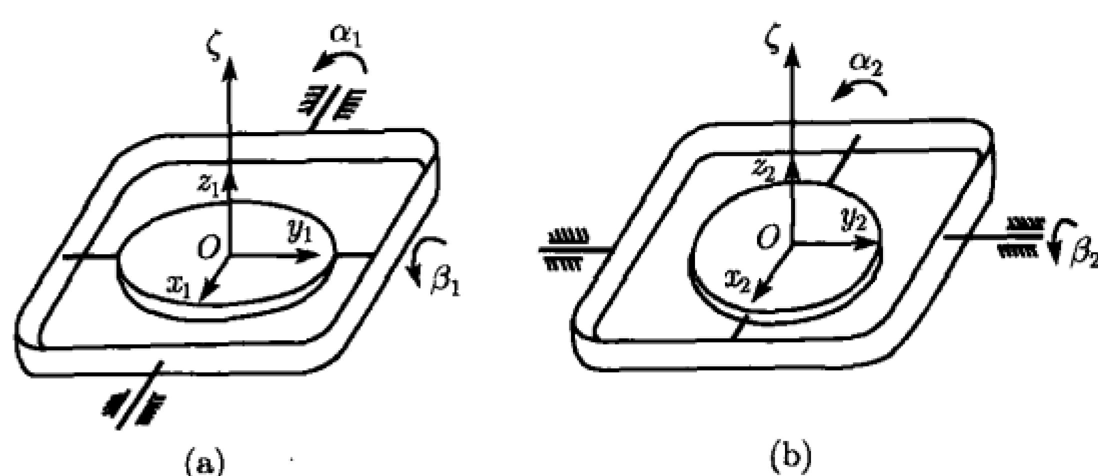


图 1.5　不同万向支架结构的稳定平台

将平台 2 的外环相对载体和内环相对外环的转角记作 β_2 和 α_2. 转动次序为

$$(O-\xi\eta\zeta) \underset{\eta,y_0}{\overset{\beta_2}{\longrightarrow}} (O-x_0y_0z_0) \underset{x_0,x_2}{\overset{\alpha_2}{\longrightarrow}} (O-x_2y_2z_2)$$

分别列出 $(O-x_iy_iz_i)$ 相对 $(O-\xi\eta\zeta)$ 的方向余弦矩阵 $\boldsymbol{C}_0^i\,(i=1,2)$

$$\boldsymbol{C}_0^1=\begin{pmatrix} \cos\beta_1 & 0 & \sin\beta_1 \\ \sin\alpha_1\sin\beta_1 & \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1\cos\beta_1 \\ -\cos\alpha_1\sin\beta_1 & \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1\cos\beta_1 \end{pmatrix} \tag{1.4.1}$$

$$\boldsymbol{C}_0^2=\begin{pmatrix} \cos\beta_2 & \sin\alpha_2\sin\beta_2 & \cos\alpha_2\sin\beta_2 \\ 0 & \cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 \\ -\sin\beta_2 & \sin\alpha_2\cos\beta_2 & \cos\alpha_2\cos\beta_2 \end{pmatrix} \tag{1.4.2}$$

如二平台有相同的内外环转角, 令 $\alpha_1=\alpha_2$, $\beta_1=\beta_2$, 则对比矩阵 $\boldsymbol{C}_0^1$ 和 $\boldsymbol{C}_0^2$ 的第三列可以看出, z_1 轴与 z_2 轴必不平行. 因此如平台 1 为水平, 平台 2 必不水平而产生万向支架误差. 反之, 如二平台均保持水平, z_1 轴与 z_2 轴平行, 则万向支架转角必不相同, 且二台面之间绕法线轴出现相对转角而出现另一种误差. 为计算 (x_1,y_1) 平面与 (x_2,y_2) 平面之间的相对转角 γ(见图 1.6), 利用式 (1.4.1), (1.4.2) 导出

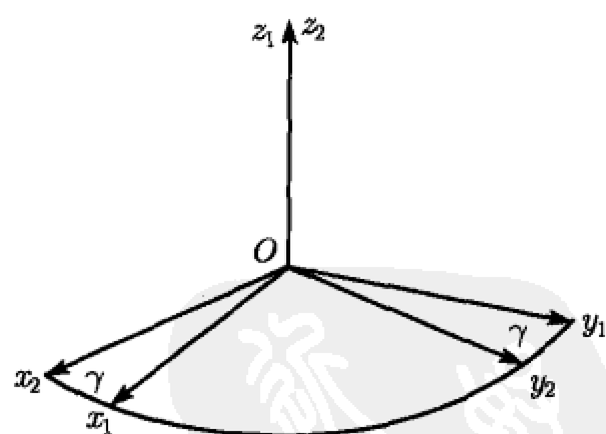


图 1.6　平台的万向支架误差

$$\sin\gamma=-\boldsymbol{i}_2\cdot\boldsymbol{j}_1=\sin\alpha_1\sin\beta_2 \tag{1.4.3}$$

仅保留 α_2,β_2 的二阶微量时, 得到

$$\gamma=\alpha_1\beta_2 \tag{1.4.4}$$

仅在 α_1 或 β_2 为零的特殊情况下, $(O-x_1y_1z_1)$ 与 $(O-x_2y_2z_2)$ 才完全重合. 当载体摇摆使 α_1 与 β_2 同时出现时, 二平台之间即有万向支架误差 γ 产生. γ 是比 α_1 或 β_2 更高阶的微量, 如 $\alpha_1=7°$, $\beta_2=15°$, 则 γ 约为 2°.

1.4.3 垂直陀螺仪的万向支架误差

在航海、航空或航天技术中, 需要确定作为控制对象的刚体相对某个参考坐标系的姿态. 此控制对象如装有陀螺仪则成为陀螺仪的**载体**. 设 $(O-x_sy_sz_s)$ 是固结于载体的坐标系, 其中 y_s 为载体的纵轴. 参考坐标系 $(O-\xi\eta\zeta)$ 对不同的控制对象可有不同的选择. 对于在太空中运动的航天器可选择惯性坐标系. 对于地球表面附近运动的飞机或船舶, 则必须选择由经纬线和地垂线组成的地理坐标系, 其严格定义将在第 3 章中给出. $(O-x_sy_sz_s)$ 相对 $(O-\xi\eta\zeta)$ 的角度坐标 ψ,ϑ,γ 按以下次序确定

$$(O-\xi\eta\zeta)\ \underset{\zeta,z_0}{\overset{-\psi}{\longrightarrow}}\ (O-x_0y_0z_0)\ \underset{x_0,x_1}{\overset{\vartheta}{\longrightarrow}}\ (O-x_1y_1z_1)\ \underset{y_1,y_s}{\overset{\gamma}{\longrightarrow}}\ (O-x_sy_sz_s)$$

$(O-x_sy_sz_s)$ 相对 $(O-\xi\eta\zeta)$ 的方向余弦矩阵 $\boldsymbol{C}_\xi^{x_s}$ 为

$$\boldsymbol{C}_\xi^{x_s}=\begin{pmatrix} \mathrm{c}\psi\mathrm{c}\gamma+\mathrm{s}\psi\mathrm{s}\vartheta\mathrm{s}\gamma & \mathrm{s}\psi\mathrm{c}\vartheta & \mathrm{c}\psi\mathrm{s}\gamma-\mathrm{s}\psi\mathrm{s}\vartheta\mathrm{c}\gamma \\ -\mathrm{s}\psi\mathrm{c}\gamma+\mathrm{c}\psi\mathrm{s}\vartheta\mathrm{s}\gamma & \mathrm{c}\psi\mathrm{c}\vartheta & -\mathrm{s}\psi\mathrm{s}\gamma-\mathrm{c}\psi\mathrm{s}\vartheta\mathrm{c}\gamma \\ -\mathrm{c}\vartheta\mathrm{s}\gamma & \mathrm{s}\vartheta & \mathrm{s}\vartheta\mathrm{c}\gamma \end{pmatrix} \tag{1.4.5}$$

如 $(O-\xi\eta\zeta)$ 为地理坐标系, ζ 轴为地垂线, 对飞机或卫星而言, ψ,ϑ,γ 分别称为**偏航角、俯仰角和滚动角**. 对船舶而言, ψ,ϑ,γ 改称为**方位角、纵倾角和横倾角**(见图 1.7).

在载体上安装一垂直陀螺, 其外环轴沿 x_s 轴, α,β 分别为外环相对载体和内环相对外环的转角, 无偏转时转子极轴 z 沿 z_s 轴 (见图 1.8). 假定陀螺仪的动力学特

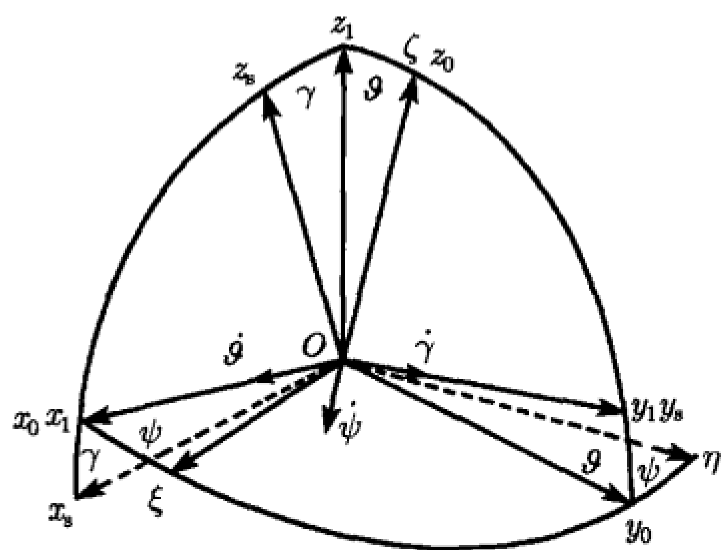


图 1.7 确定载体位置的角度坐标

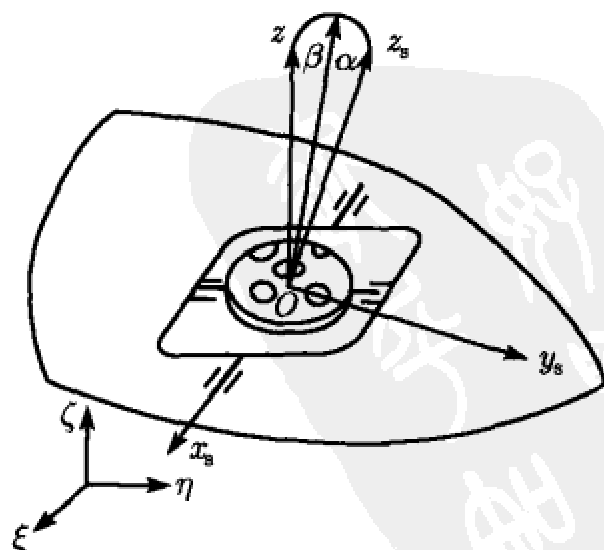


图 1.8 载体中的垂直陀螺

性能保证极轴 z 与地垂线理想一致, 成为 ζ 轴在载体中的具体体现, 则矩阵 (1.4.5) 中第三行元素应一一等于 z 轴相对 $(O-x_\mathrm{s}y_\mathrm{s}z_\mathrm{s})$ 的方向余弦

$$\sin\beta,\ -\sin\alpha\cos\beta,\ \cos\alpha\cos\beta$$

导出

$$\cos\vartheta\sin\gamma = -\sin\beta \tag{1.4.6a}$$

$$\sin\vartheta = -\sin\alpha\cos\beta \tag{1.4.6b}$$

$$\cos\vartheta\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta \tag{1.4.6c}$$

将式 (1.4.6a) 与 (1.4.6c) 相除, 得到

$$\tan\gamma = -\frac{\tan\beta}{\cos\alpha} \tag{1.4.7}$$

式 (1.4.6b) 和 (1.4.7) 确定载体的姿态角 ϑ,γ 与陀螺的外环和内环转角 α,β 之间的关系. 当 α,β 很小, 允许忽略其二阶以上微量时, 此关系式可简化为

$$\vartheta = -\alpha,\quad \gamma = -\beta \tag{1.4.8}$$

在此条件下, 可直接从陀螺的转角数据 α,β 读出载体的姿态角 ϑ 和 γ. 但 α,β 较大时, 近似式 (1.4.8) 与 (1.4.6b), (1.4.7) 的差别增大而产生万向支架误差. 当 α,β 为 15° 时, 此误差约为 1°. 误差的产生原因是陀螺仪的转动次序与定义载体姿态角的转动次序不同. 如改变陀螺内、外环轴的位置, 使与载体姿态角的转动次序相同, 万向支架误差即自然消失.

1.4.4　方位陀螺仪的万向支架误差

在载体上安装一方位陀螺, 外环轴沿 z_s 轴, 仍分别以 α,β 表示外环相对载体和内环相对外环的转角, 无偏转时转子极轴 z 沿 y_s 轴 (见图 1.9). 假定极轴 z 与方位基准 η 轴理想一致, 令矩阵 (1.4.5) 中第二行元素一一等于 z 轴相对 $(O-x_\mathrm{s}y_\mathrm{s}z_\mathrm{s})$ 的方向余弦

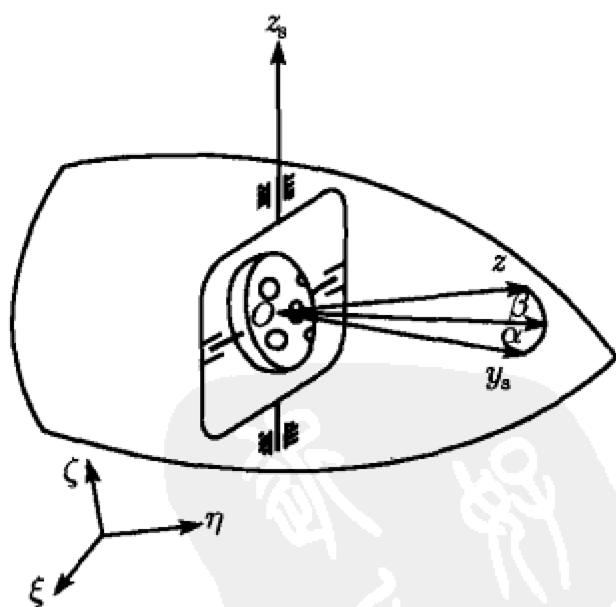


图 1.9　载体中的方位陀螺

$$-\sin\alpha\cos\beta,\ \cos\alpha\cos\beta,\ \sin\beta$$

导出

$$\sin\psi\cos\gamma - \cos\psi\sin\vartheta\sin\gamma = \sin\alpha\cos\beta \tag{1.4.9a}$$

$$\cos\psi\cos\vartheta=\cos\alpha\cos\beta \tag{1.4.9b}$$

$$\sin\psi\sin\gamma+\cos\psi\sin\vartheta\cos\gamma=-\sin\beta \tag{1.4.9c}$$

将式 (1.4.9a) 与 (1.4.9b) 相除, 得到

$$\tan\alpha=\frac{\sin\psi\cos\gamma-\cos\psi\sin\vartheta\sin\gamma}{\cos\psi\cos\vartheta} \tag{1.4.10}$$

载体的俯仰角 ϑ 为零时简化为

$$\tan\alpha=\tan\psi\cos\gamma \tag{1.4.11}$$

当滚动角 γ 极小, 其二阶以上微量允许忽略时, 可进一步简化为

$$\alpha=\psi \tag{1.4.12}$$

可见仅在上述限制条件下, 才允许利用外环转角 α 指示载体的航向角. ψ 和 γ 较大时, 近似式 (1.4.12) 与 (1.4.11) 的差别增大而产生万向支架误差, 仅当 ψ 等于 0°, 90°, 180°, 270° 等特殊值时例外. 当 $\psi=45°$, $\gamma=15°$ 时, 万向支架误差约为 1°. 误差的产生原因是陀螺的外环轴偏离地垂线, 只有保证外环轴的垂直性不受载体的俯仰或滚动影响, 才可能消除此万向支架误差.

需要控制载体使其运动方向与 η 轴一致时, 可设计控制系统保证载体跟随陀螺外环转动. 在理想的控制条件下, 令式 (1.4.10) 中的 α 为零, 导出

$$\tan\psi=\sin\vartheta\tan\gamma \tag{1.4.13}$$

可见只要载体同时存在俯仰角 ϑ 和滚动角 γ, 必导致偏航角 ψ 出现, 产生另一种类型的万向支架误差.

1.4.5　载体的姿态角量测

将上述垂直陀螺和方位陀螺同时安装在载体内, 安装方式与图 1.8 和图 1.9 完全相同. 设 α_1,β_1 和 α_2,β_2 分别为垂直陀螺和方位陀螺的外环和内环转角, 式 (1.4.6b), (1.4.7), (1.4.9b) 给出

$$\sin\vartheta=-\sin\alpha_1\cos\beta_1 \tag{1.4.14a}$$

$$\tan\gamma=-\sec\alpha_1\tan\beta_1 \tag{1.4.14b}$$

$$\cos\psi\cos\vartheta=\cos\alpha_2\cos\beta_2 \tag{1.4.14c}$$

从式 (1.4.14a), (1.4.14c) 中消去 ϑ, 得到

$$\cos\psi = \frac{\cos\alpha_2\cos\beta_2}{\sqrt{1-\sin^2\alpha_1\cos^2\beta_1}} \tag{1.4.15}$$

利用公式 (1.4.14a), (1.4.14b), (1.4.15), 可从两只陀螺的转角数据 α_1, β_1 和 α_2, β_2 完全确定载体的姿态角 ψ, ϑ, γ. 由于转角数据超过未知变量数目, 此姿态角计算公式并非唯一的形式.

1.5　非完整约束问题

1.5.1　非完整约束条件

刚体的无限小转动与有限转动具有完全不同的性质, 前者满足矢量运算规则而后者与转动次序有关. 因此如利用刚体的瞬时角速度做积分运算以推测刚体的有限转动, 必有运动学误差产生. 由于瞬时角速度公式 (1.2.10) 或 (1.2.12) 中包含角度坐标对时间的微分, 如角速度投影 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ 为时间的已知函数, 则 (1.2.10) 或 (1.2.12) 可看作是对广义坐标 α, β, γ 或 ψ, ϑ, φ 的**非完整约束**. 伊式林斯基等最先注意到与上述非完整约束相联系的运动学问题.

1.5.2　锥运动误差公式

设参考坐标系 $(O-\xi\eta\zeta)$ 为惯性坐标系, 式 (1.2.10) 给出以欧拉角表示的角速度公式, 其沿极轴的投影为

$$\omega_z = \dot\varphi + \dot\psi\cos\vartheta \tag{1.5.1}$$

其中 ω_z, $\dot\varphi$, $\dot\psi\cos\vartheta$ 各项分别为刚体绕 z 轴的绝对角速度、相对动坐标系 $(O-x_1y_1z_1)$ 的相对角速度以及 $(O-x_1y_1z_1)$ 的牵连角速度. 式 (1.5.1) 表示刚体的绝对角速度为相对角速度与牵连角速度之和. 利用第 4 章中将要详细讨论的速率陀螺仪可以量测到载体的绝对角速度信息 ω_z. 对 ω_z 作积分运算, 得到的角度值以 φ' 表示

$$\varphi' = \int_0^t \omega_z \mathrm{d}t \tag{1.5.2}$$

将式 (1.5.1) 各项乘以 $\mathrm{d}t$, 利用式 (1.5.2) 将 $\omega_z\mathrm{d}t$ 以 $\mathrm{d}\varphi'$ 代替, 得到

$$\mathrm{d}\varphi' = \mathrm{d}\varphi + \cos\vartheta\mathrm{d}\psi \tag{1.5.3}$$

以刚体中任意点 O 为中心, 作半径为 1 的单位球面. 设 z 轴在单位球面上的迹点 P 沿任意不包含 ζ 轴在内的封闭路径 L 逆时针环行一周后回到原处 (见图 1.10). 计算式 (1.5.3) 沿回路 L 的积分, 得到

$$\Delta\varphi' = \Delta\varphi + \oint_L \cos\vartheta\mathrm{d}\psi \tag{1.5.4}$$

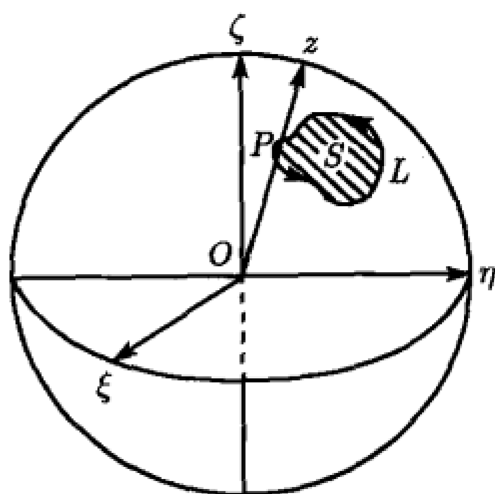


图 1.10　陀螺极轴的锥运动

$\Delta\varphi$ 和 $\Delta\varphi'$ 为 z 轴完成锥运动后 φ 和 φ' 的增量. 由于 $(O-x_2y_2z_2)$ 随锥运动的结束而回到初始位置, $\Delta\varphi$ 也等于刚体在锥运动过程中实际转过的角度, 但并不等于根据角速度 ω_z 积分算出的转角 $\Delta\varphi'$. 利用式 (1.5.4) 计算此量测误差 δ, 称为锥运动误差, 它等于以 $\cos\vartheta$ 为被积函数的曲线积分

$$\delta = \Delta\varphi - \Delta\varphi' = -\oint_L \cos\vartheta \mathrm{d}\psi \tag{1.5.5}$$

利用格林定理将对回路 L 的曲线积分化为对 L 所包围域 S 的曲面积分

$$\oint_L (P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y) = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1.5.6}$$

令 $x=\vartheta,\ y=\psi,\ P=0,\ Q=\cos\vartheta$, 导出

$$-\oint_L \cos\vartheta \mathrm{d}\psi = \iint_S \sin\vartheta \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\psi \tag{1.5.7}$$

上式右边的积分恰好等于回路 L 包围的曲面面积 S. 锥运动误差可用此面积表示为

$$\delta = S \tag{1.5.8}$$

如 P 点沿单位球面上任意不封闭路径 L 运动 (见图 1.11), 将 L 与起点 P_0 处和终点 P_1 处的子午线 L_0 和 L_1 以及围绕 ζ 轴的无限小半径的圆弧 L_2 组成封闭回路, 令 S 为此封闭回路包围的曲面面积. 将式 (1.5.6) 中的 L 以 $L+L_1+L_2+L_0$ 代替, 并考虑到 L_0 和 L_1 上 $\mathrm{d}\psi$ 为零, L_2 上 ϑ 为零, 设 ψ_0, ψ_1 分别为 P_0 和 P_1 处的 ψ 值, 得到

$$-\int_L \cos\vartheta \mathrm{d}\psi + \psi_1 - \psi_0 = \iint_S \sin\vartheta \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\psi \tag{1.5.9}$$

设 $\Delta\psi = \psi_1 - \psi_0$ 为 P_0 和 P_1 之间的进动角增量, 得到沿不封闭路径运动的锥运动误差公式

$$\delta = S - \Delta\psi \tag{1.5.10}$$

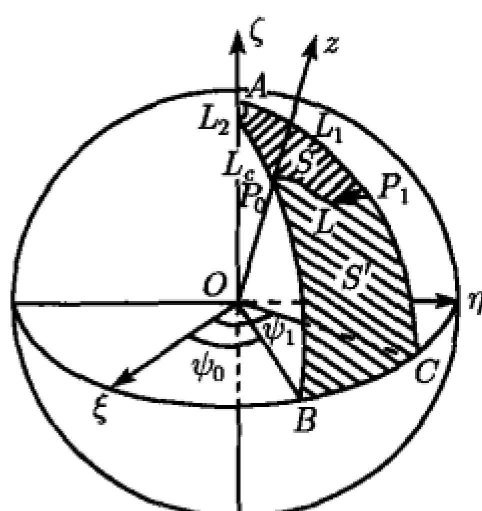


图 1.11　极轴沿不封闭路径的运动

考虑到 P_0 和 P_1 处的子午线与赤道所包围的球面三角形 ABC 的面积恰好等于 $\Delta\psi$, 上式可改写为

$$\delta = -S' \tag{1.5.11}$$

S' 为球面三角形 ABC 减去 S 后的剩余面积.

P 点沿包围 ζ 轴的封闭路径 L 环行一周回到原处可视为 $\Delta\psi = 2\pi$ 的特殊情形 (见图 1.12). 直接从式 (1.5.10) 导出

$$\delta = S - 2\pi \tag{1.5.12}$$

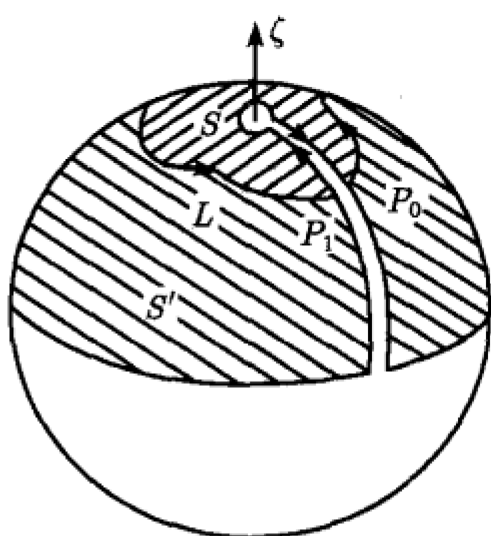


图 1.12　极轴沿封闭路径的运动

式 (1.5.12) 不同于 (1.5.8) 的原因是：P 点围绕 ζ 轴环行一周时, $(O-x_2y_2z_2)$ 坐标系亦绕 ζ 轴旋转一周才回到原来位置, 因此 $\Delta\varphi'$ 的积分式中产生 2π 增量. 式 (1.5.12) 也可由式 (1.5.11) 表示, S' 定义为半球面积减去 S 后的剩余面积.

1.5.3　平台的锥运动误差

以装在载体内的平台为例. 设 z 轴沿台面的法线, 控制系统保证平台水平且绕

z 轴的绝对角速度分量为零

$$\omega_z = 0 \tag{1.5.13}$$

即使载体相对地球静止, 地球自转也会带动 z 轴绕与地球自转轴平行的 ζ 轴做锥运动. 尽管利用角速度积分算出的转角 $\Delta\varphi'$ 为零, 平台仍可能产生绕 z 轴的转动. 利用公式 (1.5.12) 可计算每昼夜平台相对地球的转角

$$\Delta\varphi = S - 2\pi \tag{1.5.14}$$

在赤道处 $S = 2\pi$, $\Delta\varphi = 0$, 平台无转动. 在纬度 30° 处 $S = \pi$, $\Delta\varphi = -\pi$, 每昼夜平台顺时针转动 180°. 在两极处 $S = 0$, $\Delta\varphi = -2\pi$, 转动角度为 360°.

1.5.4　载体角振动引起的陀螺漂移

关于非完整约束问题的分析结果还可用来估计载体角振动所引起的陀螺仪运动学误差. 设载体上装有速率陀螺, 用于量测载体绕 z 轴的绝对角速度并积分计算其转角. 载体的振动只要不改变 z 轴的方位, 就不会对量测结果产生影响. 如载体的振动使 z 轴做锥运动, 则每振动一次陀螺都会产生如式 (1.5.8) 所示的锥运动误差. 此误差逐次积累使量测结果偏离实际值的现象称为陀螺的**漂移**. 设 f, T 为载体的振动频率和周期, 单位时间内增加的误差角称为陀螺的**漂移率**, 以 ω_d 表示, 导出

$$\omega_d = \frac{\delta}{T} = fS \tag{1.5.15}$$

其中 S 为载体角振动时 z 轴在单位球面上的迹点所围的面积.



第 2 章　刚体动力学基础

本章叙述刚体动力学的基础知识，包括刚体的质量几何，刚体的动量矩和动量矩定理. 1758 年欧拉将矢量形式的动量矩定理向刚体的主轴坐标系投影，建立了描述刚体定点运动的微分方程，奠定了刚体动力学的基础. 对刚体在重力场中的欧拉方程求解问题曾是经典力学的重要课题. 欧拉，拉格朗日和科瓦列夫斯卡娅导出仅有的三种情况的解析积分. 其中的欧拉情形和拉格朗日情形成为自由陀螺和陀螺摆的理论基础. 本章叙述这两种情形的积分过程以及所展现出的物理现象. 着重讨论两种特殊的稳态运动，即永久转动和规则进动. 所谓永久转动是指轴对称刚体绕主轴匀速转动，且转动轴在惯性空间中保持方位不变的运动. 这种运动也是无修正的自由陀螺仪的实际工作状态. 规则进动表现为轴对称刚体在绕极轴自旋的同时，极轴绕某确定轴所做的圆锥运动. 欧拉情形刚体由惯性维持的围绕动量矩矢量的规则进动称为自由规则进动. 这种高频微幅的规则进动在陀螺力学中被习惯地称为章动，是绕极轴的稳定自旋运动受扰后的普遍运动形态. 拉格朗日情形刚体在重力矩推动下围绕地垂线的缓慢进动称为受迫规则进动. 对欧拉情形和拉格朗日情形刚体永久转动稳定性的讨论和结论是分析各类陀螺仪稳定性的理论基础.

2.1　刚体的质量几何

2.1.1　惯性矩和惯性积

过刚体内确定点 O 作任意轴 p, 其基矢量为 $\boldsymbol{p}$. 设刚体内任意点 P 处的微元质量为 $\mathrm{d}m$, P 点至 p 轴的距离为 ρ, 定义刚体相对 p 轴的**惯性矩** J_{pp}

$$J_{pp}=\int \rho^2\mathrm{d}m \tag{2.1.1}$$

积分域为整个刚体. 以 O 为原点，建立与刚体固结的坐标系 $(O-xyz)$(见图 2.1). 设基矢量 $\boldsymbol{p}$ 相对 $(O-xyz)$ 的方向余弦为 α,β,γ, P 点在 $(O-xyz)$ 中的坐标为 x,y,z, 则基矢量 $\boldsymbol{p}$ 及 P 点相对 O 点的矢径 $\boldsymbol{r}$ 的投影式为

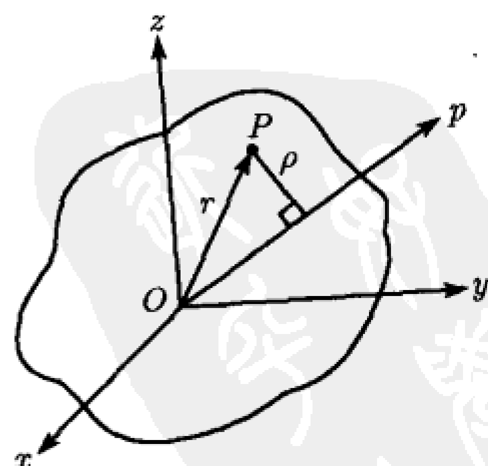


图 2.1　刚体的连体坐标系

$$\boldsymbol{p}=\alpha\boldsymbol{i}+\beta\boldsymbol{j}+\gamma\boldsymbol{k},\ \ \boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} \tag{2.1.2}$$

将积分式 (2.1.1) 中的被积函数用矢量 $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{p}$ 表示为

$$\rho^2 = \boldsymbol{r}^2 - (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{p})^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x\alpha + y\beta + z\gamma)^2 \tag{2.1.3}$$

代入式 (2.1.1), 整理后得到刚体对 p 轴的惯性矩计算公式

$$J_{pp} = J_{xx}\alpha^2 + J_{yy}\beta^2 + J_{zz}\gamma^2 - 2J_{yz}\beta\gamma - 2J_{zx}\gamma\alpha - 2J_{xy}\alpha\beta \tag{2.1.4}$$

其中的系数定义为

$$\begin{aligned} J_{xx} &= \int \left(y^2 + z^2\right) \mathrm{d}m, \quad J_{yz} = \int yz\mathrm{d}m \\ J_{yy} &= \int \left(z^2 + x^2\right) \mathrm{d}m, \quad J_{zx} = \int zx\mathrm{d}m \\ J_{zz} &= \int \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}m, \quad J_{xy} = \int xy\mathrm{d}m \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

J_{xx}, J_{yy}, J_{zz} 称为刚体相对 x, y, z 各轴的惯性矩, J_{yz}, J_{zx}, J_{xy} 称为刚体的**惯性积**. 将惯性矩和惯性积排列成三维对称方阵 $\boldsymbol{J}^{(0)}$, 称为刚体对 O 点的**惯性矩阵**

$$\boldsymbol{J}^{(0)} = \begin{pmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{zx} \\ -J_{xy} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{yz} & J_{zz} \end{pmatrix} \tag{2.1.6}$$

对于刚体中确定的 O 点和 $(O - xyz)$ 坐标系, 有确定的惯性矩阵与之对应. 刚体对任意 p 轴的惯性矩可根据 p 轴的方向余弦由式 (2.1.4) 算出.

2.1.2　惯性椭球与惯性主轴

惯性矩阵是表征刚体相对某个点的质量分布状况的物理量. 为了直观地表达质量分布状况, 在过 O 点的任意轴 p 上选取 P 点, 令 P 至 O 点的距离 R 与刚体对 p 轴的惯性矩 J_{pp} 的平方根成反比

$$R = \frac{k}{\sqrt{J_{pp}}} \tag{2.1.7}$$

其中 k 为任意选定的比例系数. P 点在 $(O - xyz)$ 中的坐标为

$$x = R\alpha, \quad y = R\beta, \quad z = R\gamma \tag{2.1.8}$$

改变 p 轴的方位, 则 J_{pp} 及 R 随之改变, P 点在空间中的轨迹形成封闭曲面. 将式 (2.1.4) 各项乘以 R^2, 将式 (2.1.8) 代入, 得到 P 点的轨迹方程

$$J_{xx}x^2 + J_{yy}y^2 + J_{zz}z^2 - 2J_{yz}yz - 2J_{zx}zx - 2J_{xy}xy = k^2 \tag{2.1.9}$$

即以 O 为中心的椭球面方程. 所包围的椭球称为刚体相对 O 点的**惯性椭球**, 它形象化地表示出刚体对过 O 点的所有轴的惯性矩分布状况 (见图 2.2).

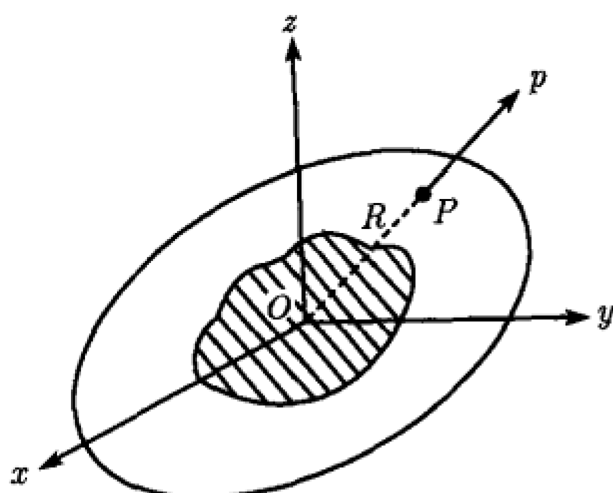


图 2.2　刚体的惯性椭球

刚体中每个确定的 O 点对应于确定的惯性椭球. 转动 $(O-xyz)$ 坐标系则方程 (2.1.9) 的系数改变, 但所表示的椭球不变. $(O-xyz)$ 各轴与椭球的 3 根主轴重合时, 椭球方程具有最简单的形式

$$J_{xx}x^2 + J_{yy}y^2 + J_{zz}z^2 = k^2 \tag{2.1.10}$$

此特殊位置的坐标轴称为刚体的**惯性主轴**, 坐标系称为**主轴坐标系**. 主轴坐标系的惯性积为零, 所对应的惯性矩称为**主惯性矩**. 刚体对不同的 O 点有不同的惯性椭球和惯性主轴. 如 O 点为刚体的质心, 则称为**中心惯性椭球**、**中心惯性主轴**和**中心主惯性矩**.

刚体的质量轴对称分布时, 其中心惯性椭球为旋转椭球, 对称轴上各点均为惯性主轴, 称为**极轴**. 过极轴上任意点与极轴垂直的赤道面内的任意轴称为**赤道轴**, 均为该点的惯性主轴. 刚体对极轴和赤道轴的惯性矩称为**极惯性矩**和**赤道惯性矩**. 面对称刚体的对称面上各点的法线均为该点的惯性主轴. 刚体的质量球对称分布时, 中心惯性椭球为圆球, 任意轴均为惯性主轴.

2.1.3　平行轴定理

设 O 点与刚体的质心 O_c 重合, 过 $(O-xy)$ 坐标面内与 O 点距离为 d 的 O' 点作与 z 轴平行的 z' 轴 (图 2.3). 设 O' 点在 $(O-xy)$ 中的坐标为 a, b, 则刚体相对 z' 轴的惯性矩为

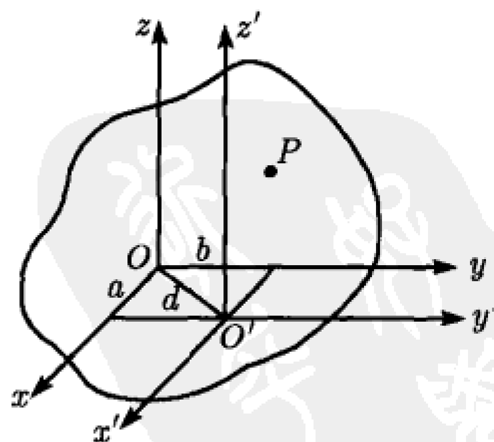


图 2.3　平行的连体坐标系

$$J'_{zz} = \int \left[(x-a)^2 + (y-b)^2\right] \mathrm{d}m \tag{2.1.11}$$

展开上式, 令 $\int \mathrm{d}m = m$, $\int x\,\mathrm{d}m = \int y\,\mathrm{d}m = 0$, m 为刚体的质量, 得到

$$J'_{zz} = J_{zz} + md^2 \tag{2.1.12}$$

与此类似, 计算刚体对 x' 轴和 y' 轴的惯性积, 得到

$$J'_{xy} = \int (x-a)(y-b)\,\mathrm{d}m = J_{xy} + mab \tag{2.1.13}$$

式 (2.1.12), (2.1.13) 表明, 刚体对任意轴的惯性矩或惯性积等于过质心的平行轴的惯性矩或惯性积与质量全部集中于质心的质点对该轴的惯性矩或惯性积之和. 还可推断, 与刚体的中心主轴坐标系平行的坐标系不一定是主轴坐标系, 只有当原点处于任一中心惯性主轴上时才是刚体的主轴坐标系.

2.2　动量矩定理

2.2.1　刚体的动量矩与动能

设刚体绕固定点 O 转动, 瞬时角速度矢量为 $\boldsymbol{\omega}$, 刚体内任意点 P 相对 O 点的矢径为 $\boldsymbol{r}$, 转动引起 P 点的速度 $\boldsymbol{v}$ 为

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \tag{2.2.1}$$

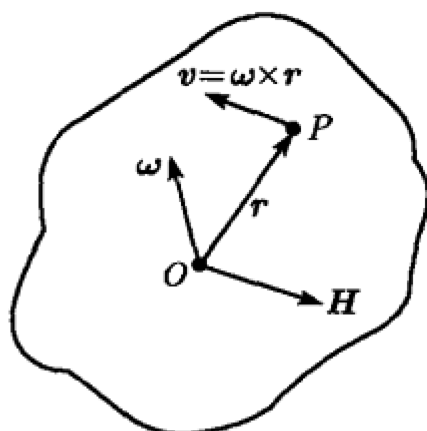


图 2.4　刚体的动量矩

刚体相对 O 点的**动量矩** $\boldsymbol{H}$ 定义为 (见图 2.4)

$$\boldsymbol{H} = \int \boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}\mathrm{d}m \tag{2.2.2}$$

将式 (2.2.1) 代入 (2.2.2), 化作

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H} &= \int \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})\mathrm{d}m = \int \left[r^2\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\omega})\,\boldsymbol{r}\right]\mathrm{d}m \\ &= \int (r^2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{r}\boldsymbol{r})\mathrm{d}m \cdot \boldsymbol{\omega}\end{aligned} \tag{2.2.3}$$

其中 $\boldsymbol{E}$ 为单位并矢. 引入刚体对 O 点的**惯性张量**, 定义为

$$\boldsymbol{J} = \int (r^2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{r}\boldsymbol{r})\mathrm{d}m \tag{2.2.4}$$

则刚体对 O 点的动量矩 $\boldsymbol{H}$ 等于惯性张量 $\boldsymbol{J}$ 与角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的点积

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{\omega} \tag{2.2.5}$$

惯性张量 $\boldsymbol{J}$ 在 $(O-xyz)$ 中的投影矩阵即式 (2.1.6) 定义的惯性矩阵 $\boldsymbol{J}^{(0)}$.

主轴坐标系也可通过惯性张量 $\boldsymbol{J}$ 的坐标变换导出. 以下标 s,r 表示过 O 点的不同坐标系, $\boldsymbol{C}_s^r$ 为二坐标系之间的方向余弦矩阵, 利用附录一中关于并矢的变换公式 (A.1.43) 得到

$$\boldsymbol{J}^{(s)} = \boldsymbol{C}_s^r \boldsymbol{J}^{(r)} \boldsymbol{C}_r^s \tag{2.2.6}$$

线性代数中证明, 实对称矩阵必可由相似正交变换转化为对角阵

$$\boldsymbol{J}^{(0)} = \mathrm{diag}(J_{xx} \quad J_{yy} \quad J_{zz}) \tag{2.2.7}$$

其对角线元素分别等于实对称矩阵的 3 个实特征值, 即 3 个主惯性矩. 所对应的 3 个特征矢量则确定惯量主轴在刚体内的位置.

对于确定的坐标系 $(O-xyz)$, 设刚体角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的坐标列阵为 $\boldsymbol{\omega}^{(0)}$

$$\boldsymbol{\omega}^{(0)} = (\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z)^{\mathrm{T}} \tag{2.2.8}$$

则动量矩公式 (2.2.5) 的坐标矩阵形式为

$$\boldsymbol{H}^{(0)} = \boldsymbol{J}^{(0)} \boldsymbol{\omega}^{(0)} \tag{2.2.9}$$

将式 (2.1.6) 和 (2.2.8) 代入式 (2.2.9), 导出

$$\boldsymbol{H}^{(0)} = \begin{pmatrix} J_{xx}\omega_x - J_{xy}\omega_y - J_{zx}\omega_z \\ -J_{xy}\omega_x + J_{yy}\omega_y - J_{yz}\omega_z \\ -J_{zx}\omega_x - J_{yz}\omega_y + J_{zz}\omega_z \end{pmatrix} \tag{2.2.10}$$

如 $(O-xyz)$ 为刚体的主轴坐标系, 则惯性积为零. 将主惯性矩 J_{xx}, J_{yy}, J_{zz} 改以 A, B, C 表示, 简化为

$$\boldsymbol{H}^{(0)} = (A\omega_x \quad B\omega_y \quad C\omega_z)^{\mathrm{T}} \tag{2.2.11}$$

利用式 (2.2.1) 计算作定点转动刚体的**动能**, 导出

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\int \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}m = \frac{1}{2}\int(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\mathrm{d}m \\ &= \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\int(r^2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{r}\boldsymbol{r})\mathrm{d}m\cdot\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{H} \end{aligned} \tag{2.2.12}$$

将其中的矢量运算用 $(O-xyz)$ 中的坐标列阵实现, 且将式 (2.2.8), (2.2.10) 代入, 得到

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^{(0)T}\boldsymbol{H}^{(0)} \\ &= \frac{1}{2}(J_{xx}\omega_x^2 + J_{yy}\omega_y^2 + J_{zz}\omega_z^2 - 2J_{yz}\omega_y\omega_z - 2J_{zx}\omega_z\omega_x - 2J_{xy}\omega_x\omega_y) \end{aligned} \tag{2.2.13}$$

如 $(O-xyz)$ 为主轴坐标系, 简化为

$$T=\frac{1}{2}(A\omega_x^2+B\omega_y^2+C\omega_z^2) \tag{2.2.14}$$

T 为常数时, 式 (2.2.13) 表明在动能守恒条件下瞬时角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的矢量端点轨迹为椭球, 称为**能量椭球**. 将式 (2.2.13) 与式 (2.1.9) 比较, 可看出动能椭球与 $k^2=2T$ 时的惯性椭球完全相同.

2.2.2　平动坐标系中的动量矩定理

设 O_0 为惯性空间中的固定点, O 为任意动点, O 点相对 O_0 点的矢径为 $\boldsymbol{R}$, 刚体内 P 点相对 O_0 点和 O 点的矢径分别为 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{\rho}$ (见图 2.5), 则有

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{R}+\boldsymbol{\rho} \tag{2.2.15}$$

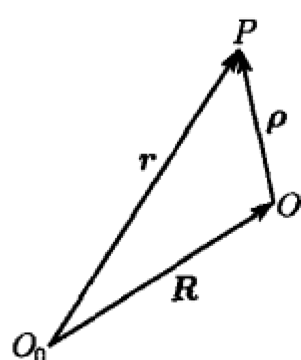


图 2.5　P 点相对 O_0 点和 O 点的矢径

P 点处的微元质量 $\mathrm{d}m$ 在内力 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}_\mathrm{i}$ 和外力 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}_\mathrm{e}$ 作用下的运动服从牛顿定律

$$\mathrm{d}m\ddot{\boldsymbol{\rho}}=\mathrm{d}\boldsymbol{F}_\mathrm{i}+\mathrm{d}\boldsymbol{F}_\mathrm{e} \tag{2.2.16}$$

利用上式各项与 $\boldsymbol{\rho}$ 的矢积计算对 O 点的矩, 并对全部刚体积分. 考虑内力的积分抵消为零, 设外力对 O 点的合力矩为 $\boldsymbol{M}$, 刚体的质心 O_c 相对 O 点的矢径为 $\boldsymbol{\rho}_\mathrm{c}$, O 点的加速度 $\ddot{\boldsymbol{R}}$ 记作 $\boldsymbol{a}$, 即

$$\int \mathrm{d}\boldsymbol{F}_\mathrm{i}=0,\quad \int \mathrm{d}\boldsymbol{F}_\mathrm{e}=\boldsymbol{M},\quad \int \boldsymbol{\rho}\mathrm{d}m=m\boldsymbol{\rho}_\mathrm{c},\quad \ddot{\boldsymbol{R}}=\boldsymbol{a} \tag{2.2.17}$$

导出

$$\int \boldsymbol{\rho}\times\ddot{\boldsymbol{\rho}}\mathrm{d}m=\boldsymbol{M}-\boldsymbol{\rho}_\mathrm{c}\times m\boldsymbol{a} \tag{2.2.18}$$

以 O 为原点建立在惯性空间中的平动坐标系 $(O-\xi\eta\zeta)$. 按照式 (2.2.2) 的定义, 刚体在平动坐标系中对 O 点的动量矩 $\boldsymbol{H}$ 为

$$\boldsymbol{H}=\int \boldsymbol{\rho}\times\dot{\boldsymbol{\rho}}\mathrm{d}m \tag{2.2.19}$$

将其对 t 求导, 将式 (2.2.18) 代入, 得到

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t}=\int \boldsymbol{\rho}\times\ddot{\boldsymbol{\rho}}\mathrm{d}m=\boldsymbol{M}+\boldsymbol{M}_a \tag{2.2.20}$$

其中 $\boldsymbol{M}_a$ 为刚体由于坐标系平动引起的牵连惯性力对 O 点的矩

$$\boldsymbol{M}_a=-\boldsymbol{\rho}_\mathrm{c}\times m\boldsymbol{a} \tag{2.2.21}$$

式 (2.2.20) 为刚体在平动坐标系内的**动量矩定理**. 可叙述为: **刚体在平动坐标系内对任意点 O 的动量矩变化率等于外力和惯性力对 O 点的合力矩.**

对以下两种特殊情形:

1) O 点在惯性空间中固定或做匀速直线运动 $(\boldsymbol{a}=\mathbf{0})$

2) O 点与质心 O_c 重合 $(\boldsymbol{\rho}_\mathrm{c}=\mathbf{0})$ 或 O 点的加速度矢量指向质心 $(\boldsymbol{\rho}_\mathrm{c}\times\boldsymbol{a}=\mathbf{0})$

式 (2.2.20) 简化为刚体相对定点或相对质心的动量矩定理

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{M} \tag{2.2.22}$$

叙述为: **刚体对固定点 O 或对质心 O_c 的动量矩变化率等于外力对 O 点或 O_c 点的力矩.** 若将力矩 $\boldsymbol{M}$ 理解为实际外力矩与惯性力矩之和, 则更广泛意义下的动量矩定理 (2.2.20) 也可表示为 (2.2.22) 的统一形式.

2.2.3　转动坐标系中的动量矩定理

以固定点 O 为原点建立惯性坐标系 $(O-\xi\eta\zeta)$, 以及相对 $(O-\xi\eta\zeta)$ 转动的动坐标系 $(O-xyz)$. 将式 (2.2.21) 的微分过程改在 $(O-xyz)$ 内进行, 改为

$$\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{M} \tag{2.2.23}$$

其中带波浪号的微分符号表示相对转动坐标系 $(O-xyz)$ 的局部导数, $\boldsymbol{\omega}_1$ 为 $(O-xyz)$ 的瞬时角速度. 对于转动坐标系内的观测者, 动量矩的变化率 $\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{H}/\mathrm{d}t$ 不等于外力矩 $\boldsymbol{M}$, 表明惯性坐标系内的动量矩定理不适用于转动坐标系. 若将式 (2.2.23) 的第二项移到等式的右边, 引入力矩符号 $\boldsymbol{M}_\mathrm{g}$, 定义为

$$\boldsymbol{M}_\mathrm{g}=-\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{H} \tag{2.2.24}$$

则式 (2.2.23) 可写作

$$\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{M}+\boldsymbol{M}_\mathrm{g} \tag{2.2.25}$$

$\boldsymbol{M}_\mathrm{g}$ 称为**陀螺力矩**, 是由于坐标系转动所引起刚体质点的哥氏惯性力对 O 点的合力矩. 式 (2.2.25) 表明, 只要在力矩项中增加陀螺力矩, 转动坐标系内的动量矩定理在形式上即与惯性坐标系内的动量矩定理 (2.2.22) 一致. 若 $(O-\xi\eta\zeta)$ 为平动坐标系, 则动量矩定理的更普遍形式为

$$\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{M}+\boldsymbol{M}_\mathrm{a}+\boldsymbol{M}_\mathrm{g} \tag{2.2.26}$$

叙述为: **对于动坐标系内的观测者, 动量矩的变化是由于外力矩, 以及参考坐标系的平动和转动引起的牵连惯性力矩和陀螺力矩共同作用的结果.**

2.2.4 陀螺特性

设动量矩矢量 $\boldsymbol{H}$ 相对转动坐标系 $(O-xyz)$ 的方向和模均保持不变, 对于此特殊情形, 方程 (2.2.23) 中的第一项等于零, 简化为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{M} \tag{2.2.27}$$

或直观地理解为外力矩与陀螺力矩的平衡

$$\boldsymbol{M}+\boldsymbol{M}_{\mathrm{g}}=\boldsymbol{0} \tag{2.2.28}$$

轴对称刚体绕极轴高速旋转, 且旋转轴在惯性空间中可改变方位时所表现出的特殊力学现象称为**陀螺特性**. 将刚体的极轴选为转动坐标系 $(O-xyz)$ 的 z 轴. 忽略旋转轴缓慢旋转的影响, 高速旋转刚体的动量矩矢量 $\boldsymbol{H}$ 与 z 轴保持重合, 转速恒定时 $\boldsymbol{H}$ 的模亦保持不变. 则方程 (2.2.27) 完全确定动量矩矢量 $\boldsymbol{H}$ 在惯性空间中的转动规律. 对于刚体上无力矩作用的特殊情形, 令 $\boldsymbol{M}$ 为零, 得到

$$\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{0} \tag{2.2.29}$$

表明无力矩作用时, 与 $\boldsymbol{H}$ 矢量一致的刚体极轴在惯性空间中维持起始方位不变, 称为陀螺的**定轴性**. 绕极轴自转的地球是定轴性的具体体现.

有力矩存在时, 式 (2.2.27) 要求动量矩 $\boldsymbol{H}$ 改变方位, 其矢量端点速度等于力矩矢量 $\boldsymbol{M}$. 绕极轴快速旋转的刚体在持续力矩作用下, 极轴随同 $\boldsymbol{H}$ 矢量在惯性空间中的偏转现象称为陀螺的**进动性**(图 2.6). 偏转角速度 ω_1 称为**进动角速度**, 其大小与力矩模成正比, 与动量矩模成反比. 刚体的动量矩足够大时, 短暂的扰动力矩不可能使极轴产生明显的位置变化, 显示出高速旋转刚体对抗冲击干扰的稳定性. 这种稳定性也表现于对高频周期变化扰动作用的抵抗, 后者可视为一系列交变的力矩冲量.

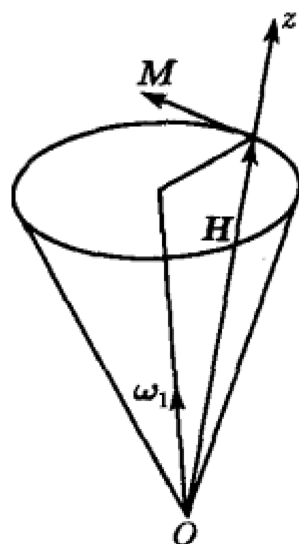


图 2.6　刚体的进动

2.2.5 欧拉方程

以 $(O-xyz)$ 为参考坐标系列写动量矩定理 (2.2.23) 的投影式

$$\dot{\boldsymbol{H}}^{(0)}+\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1^{(0)}\boldsymbol{H}^{(0)}=\boldsymbol{M}^{(0)} \tag{2.2.30}$$

一般情况下参考坐标系 $(O-xyz)$ 与刚体不固定. 令

$$\boldsymbol{H}^{(0)}=\begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix},\quad \tilde{\boldsymbol{\omega}}_1^{(0)}=\begin{pmatrix} 0 & \omega_{1z} & \omega_{1y} \\ \omega_{1z} & 0 & -\omega_{1x} \\ -\omega_{1y} & \omega_{1x} & 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{M}^{(0)}=\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} \tag{2.2.31}$$

代入方程 (2.2.30), 得到

$$\dot{H}_x+\omega_{1y}H_z-\omega_{1z}H_y=M_x \tag{2.2.32a}$$

$$\dot{H}_y+\omega_{1z}H_x-\omega_{1x}H_z=M_y \tag{2.2.32b}$$

$$\dot{H}_z+\omega_{1x}H_y-\omega_{1y}H_x=M_z \tag{2.2.32c}$$

此标量方程组即刚体定点运动的动力学方程, 称为**欧拉方程**. 如将固结于刚体的主轴坐标系 $(O-xyz)$ 取为参考坐标系, 则坐标系的角速度即刚体的角速度. 令 $\boldsymbol{\omega}_1=\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{H}^{(0)}$ 以式 (2.2.11) 代入, 方程组 (2.2.32) 化作

$$A\dot{\omega}_x+(C-B)\omega_y\omega_z=M_x \tag{2.2.33a}$$

$$B\dot{\omega}_y+(A-C)\omega_z\omega_x=M_y \tag{2.2.33b}$$

$$C\dot{\omega}_z+(B-A)\omega_x\omega_y=M_z \tag{2.2.33c}$$

给定力矩的变化规律, 可对欧拉方程求解, 确定刚体绕定点的运动规律. 对于绕动点转动的刚体, 力矩项中还应增加由于动点 O 的加速度所引起的牵连惯性力矩.

对于轴对称刚体的特殊情形, 设 z 轴为极轴, 则 $A=B$. 选择 1.1.3 节中定义的莱查坐标系 $(O-x_1y_1z_1)$ 作为参考坐标系, 其中 z_1 轴与极轴 z 重合. $(O-x_1y_1z_1)$ 也是轴对称刚体的主轴坐标系, 但不固结于刚体, 不参与刚体绕极轴的快速旋转. $(O-x_1y_1z_1)$ 的角速度 $\boldsymbol{\omega}_1$ 有与刚体角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 相同的 x 轴和 y 轴分量 ω_x, ω_y, 但有不同的极轴分量 ω_{1z}. 方程组 (2.2.32) 化作

$$A\dot{\omega}_x+(C\omega_z-A\omega_{1z})\omega_y=M_x \tag{2.2.34a}$$

$$A\dot{\omega}_y+(A\omega_{1z}-C\omega_z)\omega_x=M_y \tag{2.2.34b}$$

$$C\dot{\omega}_z=M_z \tag{2.2.34c}$$

此方程组更适合分析轴对称刚体的运动.

上述欧拉方程 (2.2.32), (2.2.33) 或 (2.2.34) 也适用于刚体相对质心的转动. 只须将其中惯性矩和力矩的矩心 O 改为刚体的质心 O_c.

2.3 欧拉情形刚体定点运动

2.3.1 动力学方程的初积分

无力矩状态下刚体的惯性运动是刚体定点转动的最简单情形, 在经典刚体动力学中称为**欧拉情形刚体定点运动**. 无力矩作用时, 欧拉方程 (2.2.33) 简化为

$$A\dot{\omega}_x + (C - B)\omega_y\omega_z = 0 \tag{2.3.1a}$$

$$B\dot{\omega}_y + (A - C)\omega_z\omega_x = 0 \tag{2.3.1b}$$

$$C\dot{\omega}_z + (B - A)\omega_x\omega_y = 0 \tag{2.3.1c}$$

令各式分别乘以 ω_x, ω_y, ω_z 后相加, 导出系统的**能量积分**

$$A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2 = 2T \tag{2.3.2}$$

其物理意义为机械能守恒, 积分常数 T 为刚体的动能. 在 3.4.2 节中还将从分析力学观点解释能量积分的更普遍意义.

再令 (2.3.1) 各式分别乘以 $A\omega_x$, $B\omega_y, C\omega_z$ 后相加, 导出另一初积分, 即**动量矩积分**

$$A^2\omega_x^2 + B^2\omega_y^2 + C^2\omega_z^2 = H^2 \tag{2.3.3}$$

其物理意义为动量矩守恒, 积分常数 H 为刚体的动量矩模. 直接从动量矩定理 (2.2.21) 出发, 由于 $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{0}$ 时 $\boldsymbol{H}$ 为常矢量, 则初积分 (2.3.3) 是动量矩守恒的必然结果. 以上导出的两个初积分 (2.3.2) 和 (2.3.3) 在 $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ 三维空间中确定两个椭球面, 其交线为刚体角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的矢量端点轨迹.

2.3.2 潘索的几何解释

1834 年潘索 (L. Poinsot) 对欧拉情形刚体定点运动作出直观的几何解释. 设 P 为刚体瞬时角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的矢量端点, 其相对主轴坐标系 $(O - xyz)$ 的坐标为

$$x = \omega_x, \quad y = \omega_y, \quad z = \omega_z \tag{2.3.4}$$

将上式代入后, 初积分 (2.3.2), (2.3.3) 写作

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 2T \tag{2.3.5}$$

$$A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 = H^2 \tag{2.3.6}$$

式 (2.3.5) 表示的椭球面即 2.2.1 节中提到的能量椭球, 即惯性椭球. 式 (2.3.6) 表示另一个椭球面, 称为**动量矩椭球**. 在刚体转动过程中, 由于动能和动量矩均守恒, P 点必须沿两个椭球面的交线移动. 将惯性椭球方程 (2.3.5) 改写为

$$F(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2T = 0 \tag{2.3.7}$$

函数 F 对 x, y, z 的偏导数在 P 点的值表示 P 点处椭球切平面 Π 的一组法线方向的方向数

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_P = 2A\omega_x, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_P = 2B\omega_y, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_P = 2C\omega_z \tag{2.3.8}$$

将上式与式 (2.2.11) 对照, 可看出 Π 平面的法线方向即动量矩 $\boldsymbol{H}$ 的方向. 由于动量矩守恒, Π 平面在惯性空间中必保持确定的方位不变. 定点 O 与 Π 平面的距离 d 等于 $\boldsymbol{\omega}$ 矢量沿 Π 平面法线方向的投影. 利用式 (2.2.12) 导出

$$d = \boldsymbol{\omega} \cdot \frac{\boldsymbol{H}}{H} = \frac{2T}{H} = \text{常数} \tag{2.3.9}$$

因此 Π 平面不仅方位不变, 而且与定点 O 的距离也不变, 成为惯性空间中的固定平面. 由于瞬时旋转轴通过 P 点, 惯量椭球在 P 点处的线速度必等于零. 根据此分析结果, 潘索对刚体运动作出以下形象化解释: 无力矩的刚体定点运动为中心固定的惯性椭球在固定平面上的无滑动滚旋运动. 称为刚体的**欧拉–潘索运动**(见图 2.7).

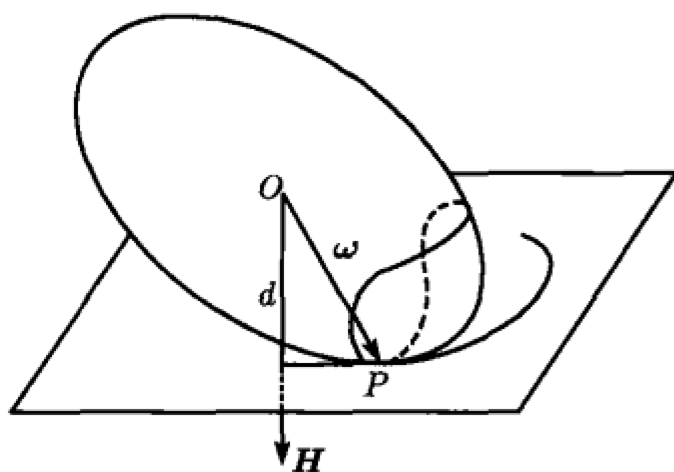


图 2.7　惯性椭球的滚旋运动

P 点在惯性椭球表面的轨迹称为**本体极迹**, 即惯性椭球与动量矩椭球的交线, P 点在 Π 平面上的轨迹称为**空间极迹**. 也可形象化地认为, 欧拉–潘索运动是本体极迹沿空间极迹的无滑动滚动.

2.3.3　永久转动的稳定性

本体极迹曲线族存在 3 个**奇点** $S_i(i=1,2,3)$, 由欧拉方程 (2.3.1) 的 3 组特解构成

$$\begin{aligned} S_1:\ \omega_x=\omega_y=0,\quad \omega_z=\omega_0 \\ S_2:\ \omega_y=\omega_z=0,\quad \omega_x=\omega_0 \\ S_3:\ \omega_z=\omega_x=0,\quad \omega_y=\omega_0 \end{aligned} \tag{2.3.10}$$

此特解所描述的运动是刚体绕某根惯性主轴的匀速转动, 且转动轴在惯性空间中保持方位不变, 称为刚体的**永久转动**.

为讨论永久转动的稳定性, 将式 (2.3.1a) 和 (2.3.1b) 的第二项移至等号右边并将二式相除, 得到只含 ω_x, ω_y 的一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\omega_x}{\mathrm{d}\omega_y}=\frac{a\omega_y}{\omega_x},\quad a=\frac{B(C-B)}{A(A-C)} \tag{2.3.11}$$

此方程的奇点 S_1 对应于刚体绕 z 轴的永久转动. 受扰后瞬时旋转轴在永久转动轴附近的运动性态则取决于 S_1 奇点的类型. 根据附录三中对式 (A.3.6) 的分析可以判断

$$\begin{aligned} &a<0:\ C>A,\ C>B\ \text{或}\ C<A,\ C<B\ :\ S_1\ \text{为中心} \\ &a>0:\ A>C>B\ \text{或}\ \ A<C<B:\ S_1\ \text{为鞍点} \end{aligned} \tag{2.3.12}$$

从而表明, 当 z 轴为最大或最小惯性矩主轴时, 受扰后瞬时旋转轴保持在 z 轴附近的小范围内运动, 永久转动稳定. 当 z 轴为中间惯性矩主轴时, 受扰后瞬时旋转轴无限偏离 z 轴, 永久转动不稳定. 用类似方法判断 S_2, S_3 的奇点类型后, 可得出以下结论: **无力矩刚体绕最大或最小惯性矩主轴的永久转动稳定, 绕中间惯性矩主轴的永久转动不稳定**. 本体极迹曲线族的几何特征如图 2.8 所示, 图中 x 轴和 z 轴分别为刚体的最大和最小惯性矩主轴, y 轴为中间惯性矩主轴.

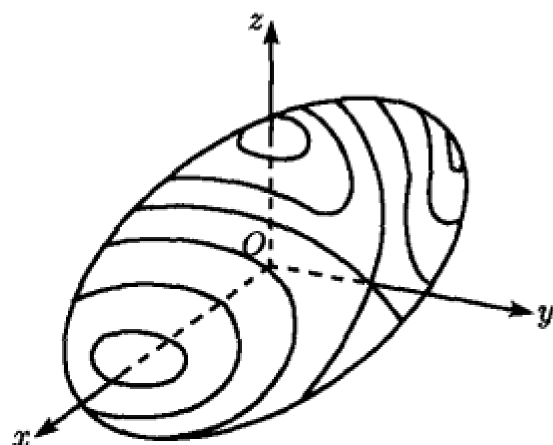


图 2.8　无力矩刚体的本体极迹

2.3.4 解析积分

1849 年雅可比 (C. G. J. Jacobi) 导出用椭圆函数表示的解析积分. 直接从动量矩守恒原理出发可以简化推导过程. 以 O 为原点建立惯性坐标系 $(O-\xi\eta\zeta)$, 使 ζ 轴与守恒的动量矩矢量 $\boldsymbol{H}$ 方向一致, 称为刚体的**动量矩坐标系**. 利用 1.1.3 节中定义的欧拉角 ψ,ϑ,φ 确定刚体相对 $(O-\xi\eta\zeta)$ 的姿态. 略去刚体的主轴坐标系 $(O-x_2y_2z_2)$ 的下角标, 记作 $(O-xyz)$. 利用式 (1.2.10), (2.2.11) 计算刚体对 O 点的动量矩 $\boldsymbol{H}$ 在 $(O-xyz)$ 中的投影, 得到

$$\begin{aligned} H_x &= A\left(\dot{\psi}\sin\vartheta\sin\varphi + \dot{\vartheta}\cos\varphi\right) \\ H_y &= B\left(\dot{\psi}\sin\vartheta\cos\varphi - \dot{\vartheta}\sin\varphi\right) \\ H_z &= C\left(\dot{\psi}\cos\vartheta + \dot{\varphi}\right) \end{aligned} \tag{2.3.13}$$

将沿 ζ 轴的动量矩 $\boldsymbol{H}$ 直接向 $(O-xyz)$ 各轴投影, 利用矩阵 (1.1.15), 得到

$$\begin{aligned} H_x &= H\sin\vartheta\sin\varphi \\ H_y &= H\sin\vartheta\cos\varphi \\ H_z &= H\cos\vartheta \end{aligned} \tag{2.3.14}$$

令式 (2.3.13) 与 (2.3.14) 各项相等, 引入以下参数

$$\nu = \frac{H}{A},\quad \lambda = \frac{C}{A},\quad \rho = \frac{A}{B} \tag{2.3.15}$$

得到 ψ,ϑ,φ 的一阶微分方程组

$$\dot{\vartheta} = \nu(1-\rho)\sin\vartheta\cos\varphi\sin\varphi \tag{2.3.16a}$$

$$\dot{\varphi} = (\nu/\lambda)\cos\vartheta\left[1-\lambda\rho-\lambda(1-\rho)\sin^2\varphi\right] \tag{2.3.16b}$$

$$\dot{\psi} = \nu\left[\rho+(1-\rho)\sin^2\varphi\right] \tag{2.3.16c}$$

将式 (2.3.16a) 和 (2.3.16b) 相除, 消去时间变量后得到仅含 ϑ,φ 的一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{\varepsilon\tan\vartheta\cos\varphi\sin\varphi}{1-\varepsilon\sin^2\varphi} \tag{2.3.17}$$

其中参数 ε 定义为

$$\varepsilon = \frac{\lambda(1-\rho)}{1-\lambda\rho} = \frac{C(B-A)}{A(B-C)} \tag{2.3.18}$$

以 $\varphi=0$ 对应的时刻为起点, 设 ϑ_0,ψ_0 为 ϑ,ψ 的初值, 对方程 (2.3.17) 积分得到

$$\sin\vartheta = \frac{\sin\vartheta_0}{\sqrt{1-\varepsilon\sin^2\varphi}},\quad \cos\vartheta = \cos\vartheta_0\sqrt{\frac{1-\varepsilon_1\sin^2\varphi}{1-\varepsilon\sin^2\varphi}} \tag{2.3.19}$$

将上式代入方程 (2.3.16b), 积分得到

$$nt=\int_0^{\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\left(1-\varepsilon\sin^2\varphi\right)\left(1-\varepsilon_1\sin^2\varphi\right)}} \tag{2.3.20}$$

其中

$$\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{\cos^2\vartheta_0},\quad n=\frac{\nu}{\lambda}(1-\lambda\rho)\cos\vartheta_0 \tag{2.3.21}$$

定义新的变量 u,τ 和参数 k

$$u=\left(\frac{\sqrt{1-\varepsilon}}{\sin\vartheta_0}\right)\sin\vartheta\sin\varphi,\quad \tau=n\sqrt{1-\varepsilon}\,t,\quad k^2=\frac{\varepsilon\tan^2\vartheta_0}{1-\varepsilon} \tag{2.3.22}$$

可将式 (2.3.20) 化作第一类椭圆积分

$$\tau=\int_0^{u}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} \tag{2.3.23}$$

利用椭圆函数的以下性质

$$\begin{aligned}&\mathrm{sn}\tau=u, && \mathrm{cn}\tau=\sqrt{1-u^2}\\ &\mathrm{dn}\tau=\sqrt{1-k^2u^2}, && \mathrm{tn}\tau=\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\end{aligned} \tag{2.3.24}$$

导出

$$\vartheta=\arccos\left(\cos\vartheta_0\mathrm{dn}\tau\right) \tag{2.3.25}$$

$$\varphi=\arctan\left(\frac{\mathrm{tn}\tau}{\sqrt{1-\varepsilon}}\right) \tag{2.3.26}$$

将式 (2.3.26) 代入方程 (2.3.16c), 积分得到

$$\psi=\psi_0+\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}\,\cos\vartheta_0}\left[\frac{\tau}{\lambda-1}+\varepsilon\int_0^{\tau}\frac{\mathrm{sn}^2\tau}{1-\varepsilon\mathrm{cn}^2\tau}\mathrm{d}\tau\right] \tag{2.3.27}$$

式 (2.3.25), (2.3.26), (2.3.27) 以椭圆函数形式确定刚体的运动规律. 将 (2.3.16) 各式代入式 (1.2.10) 计算角速度投影, 导出

$$\begin{aligned}\omega_x&=\mu\sqrt{\frac{D(D-C)}{A(A-C)}}\,\mathrm{sn}\tau\\ \omega_y&=\mu\sqrt{\frac{D(D-C)}{B(B-C)}}\,\mathrm{cn}\tau\\ \omega_z&=\mu\sqrt{\frac{D(B-D)}{C(B-C)}}\,\mathrm{dn}\tau\end{aligned} \tag{2.3.28}$$

常数 μ,D 定义为

$$\begin{aligned}\mu&=(\nu/\lambda)\left(\cos^2\vartheta_0+\lambda\rho\sin^2\vartheta_0\right)\\ D&=\lambda\rho B\left(\cos^2\vartheta_0+\lambda\rho\sin^2\vartheta_0\right)^{-1}\end{aligned} \tag{2.3.29}$$

2.3.5 自由规则进动

设刚体的质量相对 z 轴对称分布, 令 $A=B$, 则方程组 (2.3.16) 因 $\rho=1$, $\varepsilon=0$ 而简化, 积分得到

$$\vartheta=\vartheta_0,\quad \varphi=nt,\quad \psi=\psi_0+\nu t \tag{2.3.30}$$

所描绘的运动为刚体绕极轴匀速自旋, 同时极轴以不变的章动角 ϑ_0 围绕动量矩矢量 $\boldsymbol{H}$ 匀速进动, ν 和 n 分别为进动角与自旋角的变化速度. 这种规则的运动形式称为刚体的**规则进动**. 无力矩状态下靠惯性维持的规则进动称为**自由规则进动**, 是 2.3.2 节中叙述的欧拉–潘索运动当刚体为轴对称体时的特殊运动形态.

令式 (2.3.21) 中 $\rho=1$, 导出 ν 与 n 之间的关系

$$\frac{n}{\nu}=\left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right)\cos\vartheta_0 \tag{2.3.31}$$

图 2.9 是以惯性矩比 λ 为参数的 (n/ν) 与 ϑ_0 之间的函数曲线族. 根据曲线的几何性质判断, 轴对称刚体的自由规则进动有以下特点:

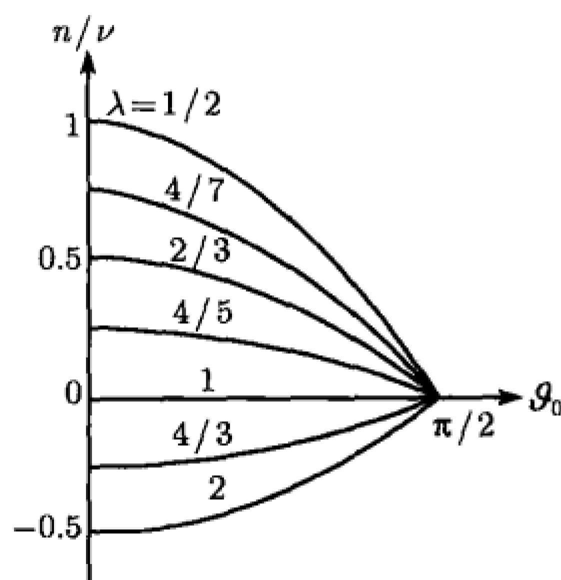


图 2.9　自由规则进动参数曲线

1) $\lambda<1$ 时极轴为最小惯性矩主轴, n 与 ν 同号, 进动角与自旋角变化方向一致, 称为**正进动**. $\lambda>1$ 时极轴为最大惯性矩主轴, n 与 ν 异号, 进动角与自旋角变化方向相反, 称为**逆进动**.

2) $\lambda=1$ 时刚体为球对称体, $n=0$, 自旋角不变, 进动角的变化表现为刚体绕任意轴的永久转动.

3) $\vartheta_0=0$ 时极轴与动量矩矢量重合, 刚体绕极轴做永久转动.

4) $\vartheta_0=\pi/2$ 时 $n=0$, 刚体绕赤道轴做永久转动.

在自由规则进动过程中, 除 $\lambda=1$ 或 $\vartheta_0=0$ 的特殊情形以外, 瞬时角速度 ω 与极轴方向或动量矩方向均不重合. 刚体的动、静瞬时旋转轴的迹面为两个正圆锥面, 即相对 z 轴对称的本体锥面和相对 Z 轴对称的空间锥面, 前者相对后者做无滑动的滚动 (见图 2.10). 本体锥面与惯性椭球上的的交线即本体极迹, 为围绕极轴的

圆族 (见图 2.11). 其中与 $\vartheta_0=0$ 对应的极迹缩为孤立奇点, 成为永久转动轴. 而与 $\vartheta_0=\pi/2$ 对应的赤道圆上任意位置都是永久转动轴. 在微小扰动作用下, 极轴附近的瞬时旋转轴相对惯性空间和刚体的位置都只产生微小偏移. 赤道轴附近的瞬时旋转轴虽仍保持在 ζ 轴附近, 但相对刚体却不断偏离原来位置. 从而得出结论: **无力矩轴对称刚体绕对称轴的永久转动稳定, 绕赤道轴的永久转动不稳定.**

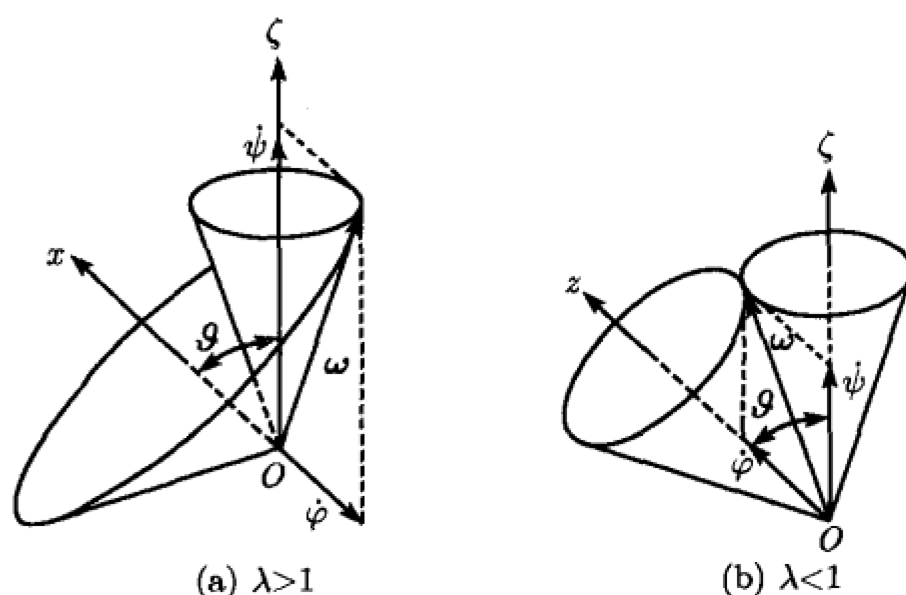


图 2.10　本体锥面与空间锥面

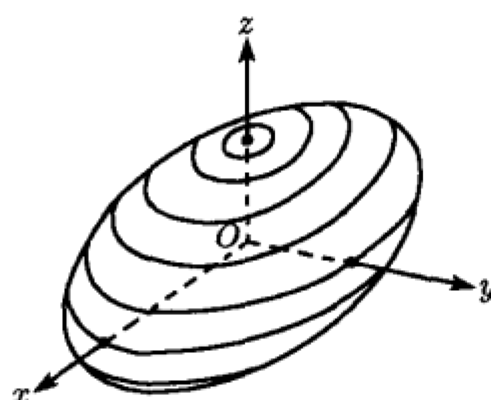


图 2.11　轴对称刚体的本体极迹

地球为接近球形的轴对称刚体, 扁平性所引起的惯性矩比 λ 约为 1.0033, 其瞬时旋转轴与极轴之间的微小偏角 ϑ_0 约为 $0.15''$. 从式 (2.3.31) 导出 $n/\nu=-0.0033$. 地球的自转实际上是由进动角速度 ν 体现. 地球以 n 为角速度的反方向缓慢自旋造成瞬时旋转轴在极轴附近做圆锥运动, 周期约为自转周期的 300 倍, 即 300 天或近 10 个月.

对于绕极轴高速旋转的陀螺转子, 当扰动作用使瞬时旋转轴略偏离极轴时, 产生章动角 ϑ_0 极小, 频率 ν 极高的自由规则进动. 这种运动在第 7 章中称为**章动**, ϑ_0 和 ν 分别为**章动振幅**和**章动频率**①.

---

① 进动与章动在经典刚体动力学和在陀螺力学中有不同的定义. 经典刚体动力学采用运动学定义, 将刚体进动角 ψ 的变化称为进动, 章动角 ϑ 的变化称为章动. 陀螺力学采用动力学定义, 将刚体的极轴随同动量矩矢量 $\boldsymbol{H}$ 由于力矩作用而改变方位的运动称为进动, 极轴在 $\boldsymbol{H}$ 附近的高频惯性抖动称为章动. 刚体动力学中定义的自由规则进动即陀螺力学中的章动.

2.4　拉格朗日情形刚体定点运动

2.4.1　动力学方程的初积分

固定点 O 与质心 O_c 不重合但均在对称轴上的轴对称刚体称为**拉格朗日刚体**，也称为**重刚体**. 地面上滚动的玩具陀螺和受空气动力作用的旋转弹丸是最常见的重刚体 (见图 2.12). 重刚体的运动称为**拉格朗日情形刚体定点运动**.

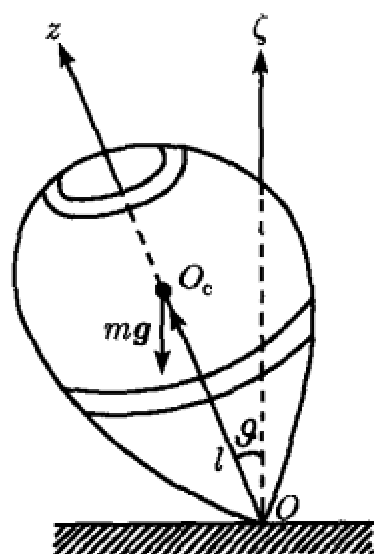


图 2.12　拉格朗日刚体

以定点 O 为原点, 建立与地面固定的参考坐标系 $(O-\xi\eta\zeta)$, ζ 轴沿地垂线向上. 不计地球自转影响, $(O-\xi\eta\zeta)$ 可视为惯性坐标系. 利用 1.1.3 节中定义的欧拉角 ψ,ϑ,φ 确定刚体的姿态. 其中 $(O-x_1y_1z_1)$ 为轴对称刚体的莱查坐标系, 略去其下角标改记为 $(O-xyz)$, z 轴为极轴, x 轴沿刚体赤道平面与水平面的节线 (见图 1.2).

令式 (1.2.10) 中 $\varphi=0$, 即得到轴对称刚体的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 相对 $(O-xyz)$ 的投影

$$\omega_x=\dot{\vartheta},\quad \omega_y=\dot{\psi}\sin\vartheta,\quad \omega_z=\dot{\psi}\cos\vartheta+\dot{\varphi} \tag{2.4.1}$$

将上式代入式 (2.2.14) 计算刚体的动能 T, 令 $A=B$, 得到

$$T=\frac{1}{2}[A(\dot{\vartheta}^2+\dot{\psi}^2\sin^2\vartheta)+C(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\vartheta)^2] \tag{2.4.2}$$

设刚体的质量为 m, 位于对称轴上的质心 O_c 与固定点 O 的距离为 l, 重力 mg 沿 ζ 轴负方向 (见图 2.12), 则刚体的势能 V 为

$$V=mgl\cos\vartheta \tag{2.4.3}$$

应用分析力学方法, 以欧拉角 ψ,ϑ,φ 为广义坐标, 写出系统的**拉格朗日函数** L

$$L=T-V=\frac{1}{2}[A(\dot{\vartheta}^2+\dot{\psi}^2\sin^2\vartheta)+C(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\vartheta)^2]-mgl\cos\vartheta \tag{2.4.4}$$

L 函数不含广义坐标 ψ, φ, 此保守系统存在两个**循环积分**

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = A\dot{\psi}\sin^2\vartheta + C(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\vartheta)\cos\vartheta = G \tag{2.4.5}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = C(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\vartheta) = C\omega_0 \tag{2.4.6}$$

由于力矩 $\boldsymbol{M}$ 与 ζ 轴和 z 轴均正交, 初积分 (2.4.5) 和 (2.4.65) 的物理意义为动量矩 $\boldsymbol{H}$ 沿 ζ 轴和 z 轴的投影守恒. 又由于 L 函数不显含时间 t, 存在**广义能量积分**

$$T + V = \frac{1}{2}[A(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\psi}^2\sin^2\vartheta) + C(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\vartheta)^2] + mgl\cos\vartheta = E \tag{2.4.7}$$

积分常数 G, ω_0, E 取决于初始条件.

2.4.2 解析积分

从式 (2.4.5), (2.4.6) 消去 $\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\vartheta$, 解出

$$\dot{\psi} = \frac{G - C\omega_0\cos\vartheta}{A\sin^2\vartheta} \tag{2.4.8}$$

引入新变量 $u = \cos\vartheta$, 且定义以下常数

$$\begin{gathered} u_m = \frac{G}{C\omega_0}, \quad \lambda = \frac{C}{A}, \quad \nu = \frac{C\omega_0}{A} \\ \kappa = \frac{2E - C\omega_0^2}{A}, \quad \mu = \frac{2mgl}{A} \end{gathered} \tag{2.4.9}$$

将式 (2.4.8) 以新的符号表示, 且代入式 (2.4.6) 解出 $\dot{\varphi}$, 得到

$$\dot{\psi} = \frac{\nu(u_m - u)}{1 - u} \tag{2.4.10}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\nu\left[1 - u^2 - \lambda u(u_m - u)\right]}{\lambda(1 - u^2)} \tag{2.4.11}$$

将式 (2.4.10), (2.4.11) 代入式 (2.4.7), 导出 u 的一阶微分方程

$$\dot{u} = \sqrt{f(u)} \tag{2.4.12}$$

$f(u)$ 为 u 的三次多项式

$$f(u) = (\kappa - \mu u)(1 - u^2) - v^2(u - u_m)^2 \tag{2.4.13}$$

设 u_1, u_2, u_3 为方程 $f(u) = 0$ 的三个实根, 且 $u_1 < u_2 < u_3$, 可将 $f(u)$ 写作

$$f(u) = \mu(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3) \tag{2.4.14}$$

设 u_0 为 u 的初值, 对方程 (2.4.12) 积分得到

$$t=\int_{u_0}^{u}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\mu(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3)}} \tag{2.4.15}$$

定义新的变量 v,τ 和参数 n,k

$$\begin{aligned} &u=u_1+(u_2-u_1)\,v^2, \quad \tau=nt\\ &n=\frac{1}{2}\sqrt{\mu\,(u_3-u_1)}, \quad k^2=\frac{u_2-u_1}{u_3-u_1} \end{aligned} \tag{2.4.16}$$

可将式 (2.4.15) 化作第一类椭圆积分

$$\tau=\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{(1-v^2)\,(1-k^2v^2)}} \tag{2.4.17}$$

其中 v_0 为 v 的初值. 从上式的反函数导出

$$u=u_1+(u_2-u_1)\,\mathrm{sn}^2\tau \tag{2.4.18}$$

2.4.3　极点轨迹

以 O 为中心, 作单位长度半径的球面, 极轴与单位球面的交点 P 称为**极点**. 刚体运动过程中极点所描绘的轨迹称为**极点轨迹**, 可用以直观地反映极轴在空间中运动的概貌 (见图 2.13). 将式 (2.4.12) 与 (2.4.10) 相除, 消去时间变量后得到的一阶微分方程确定以球坐标 ψ,ϑ 表示的极点轨迹

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\psi}=\frac{(1-u^2)\sqrt{f(u)}}{\nu(u_m-u)} \tag{2.4.19}$$

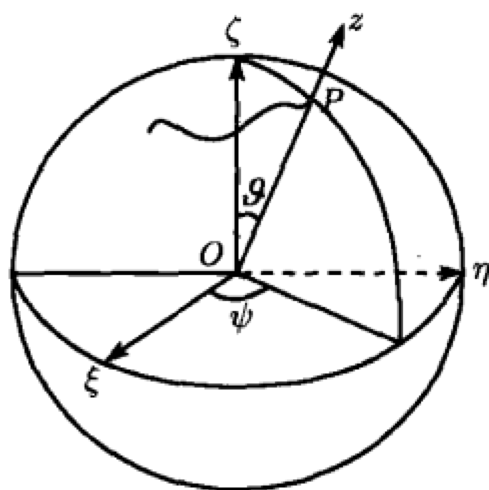


图 2.13　单位球面上的极点轨迹

根据函数 $f\,(u)$ 的性质可对极点轨迹的几何特征作定性讨论. 方程 (2.4.12) 仅当 $f(u)\geqslant 0$ 时有意义. u 足够大时 $f\,(u)$ 的函数值与最高次项 μu^3 接近, $f(\pm\infty)\to\pm\infty$,

$u=\pm1$ 时式 (2.4.13) 右边第一项为零, 则 $f(\pm1)\leqslant 0$. 可推知 u_3 必大于 1, 且 u_1, u_2 如存在实数解必在 $[-1,1]$ 区间以内. 因此在 u 的定义域内, $f(u)>0$ 只可能发生于 u_1 与 u_2 之间 (见图 2.14). 令

$$\vartheta_1=\cos^{-1}u_1,\quad \vartheta_2=\cos^{-1}u_2,\quad \vartheta_m=\cos^{-1}u_m \tag{2.4.20}$$

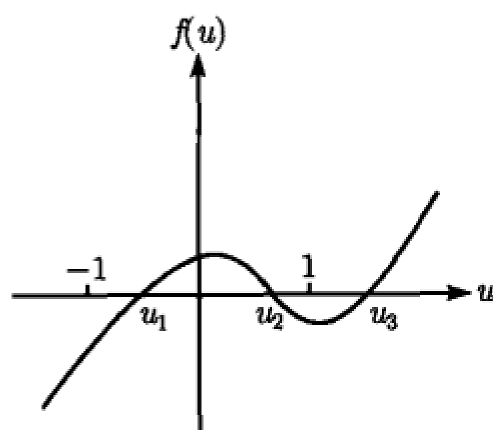


图 2.14　$f(u)$ 函数曲线

从方程 (2.4.19) 推知, $u=u_1$ 或 u_2 时, $\mathrm{d}u/\mathrm{d}\psi=0$, $u=u_m$ 时, $\mathrm{d}u/\mathrm{d}\psi=\infty$. 因此极点轨迹被限制在章动角为 ϑ_1 与 ϑ_2 的纬线之间的环形域内与边界相切, 且在章动角为 ϑ_m 处与子午线相切. 由于式 (2.4.10) 中分母恒大于零, $\dot\psi$ 的符号取决于 u_m-u. 有以下 3 种情形:

1) $u_m>u_2$: $\dot\psi$ 对任意 u 均大于零, 运动过程中极轴朝同一方向进动, 极点轨迹为不带回环的摆线 (见图 2.15(a)).

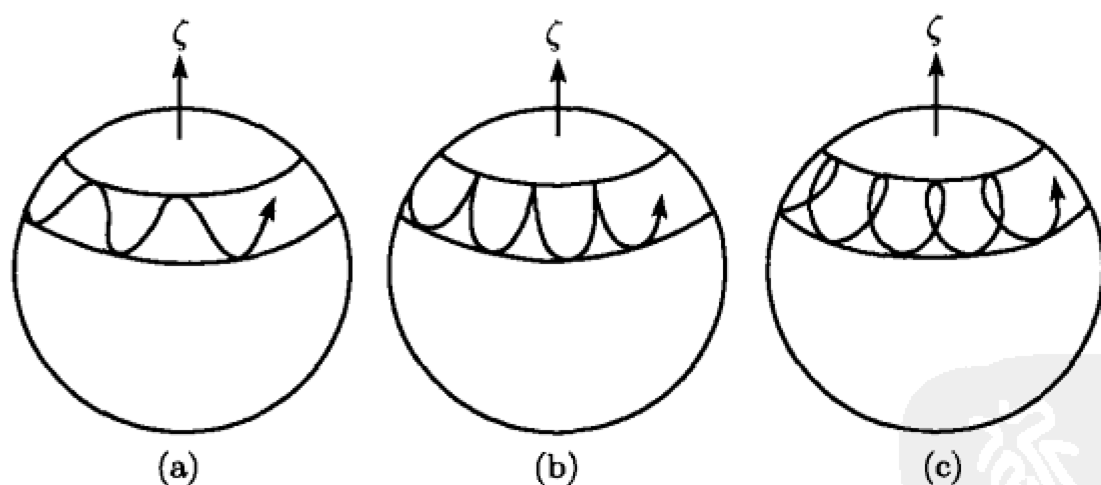


图 2.15　极点轨迹的 3 种类型

2) $u_m=u_2$: 极点轨迹在上界处出现尖点. 这种运动出现于极轴从静止状态开始运动情形. 当刚体因重力作用向下摆动时, 减小的势能转化为动能而产生进动 (见图 2.15(b)).

3) $u_1<u_m<u_2$: 极轴在上界与下界处的进动方向相反, 极点轨迹成为带回环的摆线 (见图 2.15(c)).

2.4.4 受迫规则进动

讨论 u_1, u_2 为重根的特殊情形. 设 $u_1 = u_2 = u_0$, 则 u 的定义域缩为一点 u_0 而保持常值, ϑ, $\dot{\psi}$ 亦均保持常值. 令 $\vartheta = \vartheta_0$, $\dot{\psi} = \Omega$, 此常值特解应满足

$$\vartheta_0 = \arccos u_0, \quad \Omega = \frac{\nu(u_m - u_o)}{1 - u_0^2} \tag{2.4.21}$$

刚体的运动为绕垂直轴的规则进动. 但与欧拉–潘索情形的自由规则进动不同, 是在重力矩作用下 "被迫" 发生的**受迫规则进动**.

受迫规则进动的产生条件即 $f(u)$ 函数曲线在 u_0 处与 u 轴相切的条件 (见图 2.16), 导出

$$f(u_0) = 0, \quad f'(u_0) = 0 \tag{2.4.22}$$

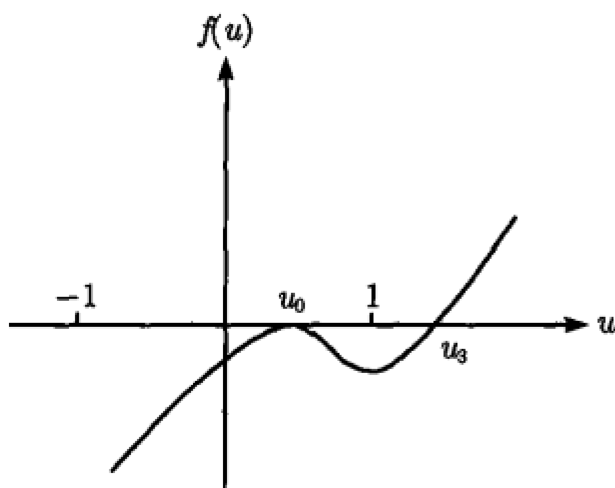


图 2.16　规则进动对应的 $f(u)$ 曲线

其中

$$f'(u) = -\mu(1 - u^2) - 2u(\kappa - \mu u) - 2\nu^2(u - u_m) \tag{2.4.23}$$

将式 (2.4.13) 代入条件 (2.4.22) 的第一式, 与式 (2.4.10) 联立. 各式中的 u, ϑ, $\dot{\psi}$ 以 u_0, ϑ_0, Ω 代替, 计算常数 κ 和 u_m, 得到

$$\kappa = \mu u_0 + \Omega^2(1 - u_0^2), \quad u_m = u_0 + \frac{1}{\nu}\Omega(1 - u_0^2) \tag{2.4.24}$$

将上式和式 (2.4.9) 代入条件 (2.4.22) 的第二式, 整理后得到常数 ϑ_0, Ω, ω_0 之间应满足的关系

$$A\cos\vartheta_0\Omega^2 - C\omega_0\Omega + mgl = 0 \tag{2.4.25}$$

从上式解出 Ω, 得到

$$\Omega = \frac{C\omega_0}{2A\cos\vartheta_0}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4Amgl\cos\vartheta_0}{C^2\omega_0^2}}\right) \tag{2.4.26}$$

讨论几种不同情况:

1) $0 \leqslant \vartheta_0 < \pi/2$, $\cos\vartheta_0 > 0$: 定义临界角速度 $\omega_{0,\mathrm{cr}}$

$$\omega_{0,\mathrm{cr}} = \frac{2}{C}\sqrt{Amgl\cos\vartheta_0} \tag{2.4.27}$$

仅当 $\omega_0 \geqslant \omega_{0,\mathrm{cr}}$ 时 Ω 才存在实根, 其中 $\omega_0 = \omega_{0,\mathrm{cr}}$ 时为二重根. 因此重心在支点上方的重陀螺仅当转速超过临界值时方可能发生受迫规则进动. 如陀螺转速足够大, $\omega_0 \gg \omega_{0,\mathrm{cr}}$, 将式 (2.4.26) 中的根式展成 $(\omega_{0,\mathrm{cr}}/\omega_0)$ 的幂级数并略去二阶以上微量, 得到 Ω 的两个实根的近似值 Ω_1 和 Ω_2

$$\Omega_1 = \frac{mgl}{C\omega_0}, \quad \Omega_2 = \frac{C\omega_0}{A\cos\vartheta_0} \tag{2.4.28}$$

Ω_1 为重力矩引起的慢进动, Ω_2 是与重力矩无关的快进动, 为惯性作用的体现. 对于 $\vartheta_0 = 0$ 情形, Ω_2 与式 (2.3.14) 中的自由规则进动角速度 ν 完全相同, 即欧拉情形刚体定点运动的章动频率.

2) $\vartheta_0 = \pi/2$, $\cos\vartheta_0 = 0$: 直接从方程 (2.4.25) 解出慢进动角速度 Ω_1, 不存在快进动.

3) $\pi/2 < \vartheta_0 < \pi$, $\cos\vartheta_0 < 0$: 不论 ω_0 取何值, Ω 都存在符号相反的两个实根. 表明重心在支点下方的重陀螺在任何转速下均能发生受迫规则进动. 转速足够大时也可分为慢进动与快进动, 但方向相反.

2.4.5 永久转动的稳定性

设刚体在初始时刻章动角为零. 令方程 (2.4.19) 中 $u = 1$, 则 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}\psi = 0$. 刚体将保持零章动角不变而绕垂直的极轴做永久转动. $u_0 = 1$ 时, 由式 (2.4.24) 导出 $\kappa = \mu$, $u_m = 1$, $f(u)$ 函数简化为

$$f(u) = \mu(1-u)^2(1+u-2a) \tag{2.4.29}$$

参数 a 为

$$a = \frac{\nu^2}{2\mu} = \frac{C^2\omega_0^2}{4Amgl} \tag{2.4.30}$$

解出方程 $f(u) = 0$ 的根

$$u_1 = u_2 = 1, \quad u_3 = 2a - 1 \tag{2.4.31}$$

$a = 1$ 时 $u = 1$ 为三重根. $a > 1$ 时 $u_3 > 1$, $a < 1$ 时 $u_3 < 1$. 图 2.17 为不同 a 值对应的 $f(u)$ 函数曲线. 若刚体的永久转动受到微小扰动, 受扰后的 $f(u)$ 曲线以虚线表示. 可看出, $a \geqslant 1$ 时受扰运动仍充分接近于永久转动 (图 2.17(b), (c)), 但 $a < 1$

时受扰后的极轴将产生大幅度章动角变化而偏离永久转动 (图 2.17(a)). 因此 $a \geqslant 1$ 是刚体永久转动的稳定性条件, 其对转动速度的限制条件为

$$\omega_0 \geqslant \omega_{0,\mathrm{cr}}, \quad \omega_{0,\mathrm{cr}} = \frac{2}{C}\sqrt{Amgl} \tag{2.4.32}$$

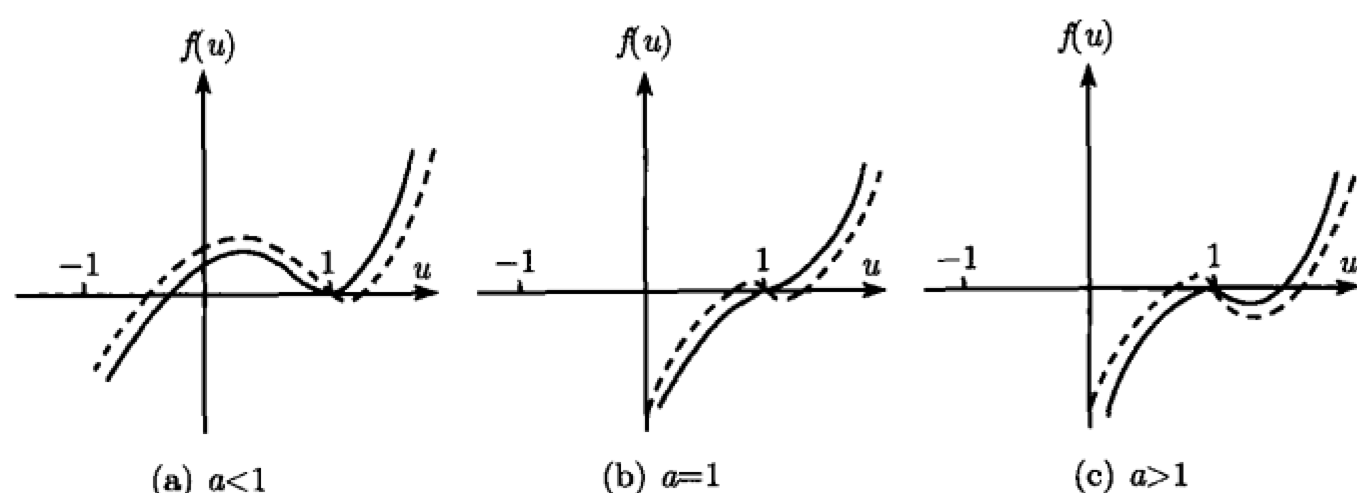


图 2.17　受扰前后的 $f(u)$ 曲线

此条件与 $\vartheta_0 = 0$ 时的规则进动条件 (2.4.27) 完全一致. 如刚体的重心在支点的下方, 令 $\vartheta_0 = \pi$, 则 $u_0 = -1$, 导出 $\kappa = -\mu$, $u_m = -1$. 函数 $f(u)$ 为

$$f(u) = -\mu(1-u)^2(1-u+2a) \tag{2.4.33}$$

函数曲线见图 2.18. 仍使用上述方法判断, 无论 a 等于何值永久转动均稳定.

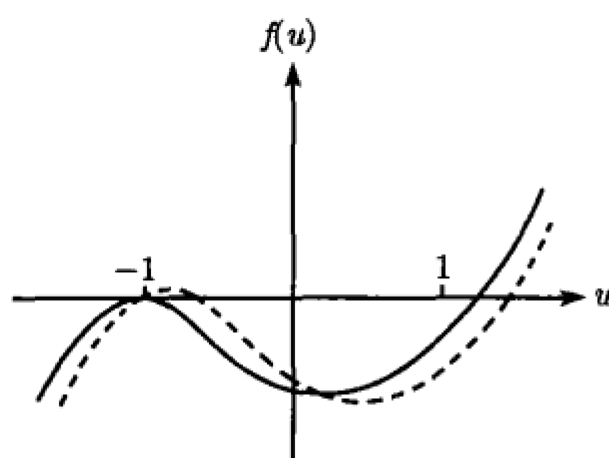


图 2.18　重心在支点下方的 $f(u)$ 曲线

根据以上分析, 重心在支点上方的刚体必须具有足够大的转速方能维持稳定的永久转动. 偏心距愈大或极惯性矩愈小, 需要维持稳定性的转速愈高. 重心在支点的下方时, 刚体的永久转动均稳定. 这与人们在实践中观察到的现象一致.

第3章　框架陀螺的动力学方程

万向支架支承的框架陀螺仪是由外环、内环和转子三个部件组成的多刚体系统, 并非单个刚体. 第 2 章中描述刚体定点运动的欧拉方程不能直接用于框架陀螺仪. 即使内外环的质量远小于转子的质量, 也不能忽略前者的存在. 因为外界与转子之间的作用力必须通过万向支架传递, 而各部件的轴承约束仅能传递与转轴正交的力和力矩分量. 本章基于动量矩定理分别对陀螺仪的外环组合体、内环组合体和转子建立动力学方程, 作为框架陀螺仪的数学模型. 当转子转速足够高, 允许略去缓慢运动的万向支架的惯性效应时, 可将动力学方程简化为陀螺进动方程. 在进动方程基础上建立起来的理论称为陀螺进动理论, 是一种数学形式十分简单, 能解释陀螺基本运动现象的近似理论, 也是指导陀螺仪研究和设计的工程实用理论. 利用进动理论建立动基座上的陀螺动力学方程时, 依据不同类型陀螺仪的使用特点, 可采用自然坐标系或地理坐标系描述载体的牵连运动. 虽然从动量矩定理出发建立陀螺动力学方程的矢量力学方法有明确的物理概念, 但陀螺动力学方程可也可用分析力学方法建立. 如对于多个陀螺组成的系统, 采用简化的劳斯方程可直接导出陀螺系统的进动方程. 又如第 13 章分析陀螺混沌运动时采用了哈密顿正则方程.

3.1　万向支架的动力学特点

3.1.1　陀螺仪的力学模型

经典刚体动力学研究绕固定点转动的单个刚体, 它只能作为第 9 章中叙述的转子陀螺仪的力学模型. 用万向支架支承的陀螺仪由外环、内环和转子 3 个刚体组成, 力学模型是由 3 个刚体部件组成的多刚体系统 (见图 1.4). 实际陀螺仪的内环常设计成包围转子的封闭壳体, 且可能附有弹簧、阻尼器、力矩器、连杆机构等零件. 为不致使问题变得过分复杂, 通常将这些零件的质量略去不计. 在某些特殊情况下, 如必须考虑万向支架的弹性变形时, 陀螺仪的力学模型还应看作是包含弹性体在内的更复杂的机械系统.

万向支架陀螺仪是由外环 B_0、内环 B_1 和转子 B_2 等 3 个刚体以轴和轴承相联系组成的系统. 理想情况下万向支架遵循以下基本假定:

1) 内外环的轴承约束均为理想约束, 约束力垂直于转动轴, 仅能传递垂直于转动轴的力矩矢量.

2) 转子运动的约束性质取决于驱动电机的特性.

3) 内外环的转动轴与刚体的惯性主轴重合. 转子为轴对称刚体, 其旋转轴与极轴重合.

4) 内、外环的转轴之间, 内环与转子的转轴之间相互正交. 3 根转轴汇交于一点, 即陀螺的支点 O.

以 $\boldsymbol{L}_i\,(i=0,1,2)$ 表示载体对外环、外环对内环、内环对转子作用的相对 O 点的约束力矩, $\boldsymbol{M}_i\,(i=0,1,2)$ 为系统外部作用于外环、内环和转子的相对 O 点的力矩, 陀螺仪各部件之间的力矩传递链如图 3.1 所示. 在各约束力矩 $\boldsymbol{L}_i\,(i=0,1,2)$ 中仅外环轴承约束力矩 $\boldsymbol{L}_0$ 为系统的外力矩, 其余约束力矩 $\boldsymbol{L}_1$, $\boldsymbol{L}_2$ 均为系统的内力矩. 因此万向支架的力矩传递具有以下特点:

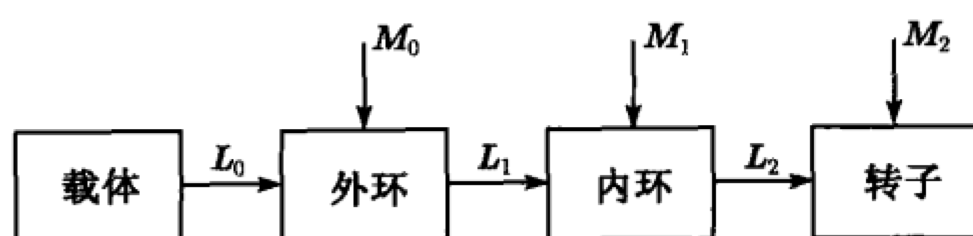


图 3.1　框架陀螺的力矩传递链

1) 来自系统外部的力矩 $\boldsymbol{M}_i\,(i=0,1,2)$ 如直接与外环轴承的约束力矩 $\boldsymbol{L}_0$ 相平衡, 则合力矩为零, 不影响系统的运动.

2) 作用于各部件之间的内力矩 $\boldsymbol{L}_1$, $\boldsymbol{L}_2$ 必须向外传递到外环轴承, 与外环约束力矩 $\boldsymbol{L}_0$ 相平衡, 才能 “转化” 为外力矩对系统的运动产生影响. 不能传递到外环轴承的内力矩不影响系统的运动.

3) 在组成系统的各部件中, 高速旋转转子 B_2 是体现陀螺特性的主要部件, 任何力矩都必须向内传递到转子才能产生效果.

为便于分析, 将作用于陀螺仪的力矩区分为两类: 按工作原理要求施加的力矩称为**修正力矩**, 干扰陀螺工作的力矩称为**干扰力矩**. 陀螺在干扰力矩作用下的进动现象称为**漂移**.

根据万向支架的力矩传递特点可以推知: 绕外环轴的修正力矩必须由外部施加于外环, 而不能由外环施加于内环, 因为后者为内力矩, 它无法传递到外环轴承 “转化” 为外力矩. 绕内环轴的修正力矩可由外部或外环施加于内环, 但不能由外部施加于外环, 因为此力矩将直接与外环轴承反力矩相抵消. 基于同样原因, 外环质心偏离外环轴所产生的重力矩可传递至转子引起漂移, 但外环质心偏离内环轴不会引起漂移. 与外环不同, 内环质心偏离外环轴和内环轴均能引起漂移. 外环或内环的轴承摩擦力矩也均能引起漂移.

3.1.2　万向支架与陀螺稳定性

设框架陀螺仪的外环上受到绕外环轴 x 的力矩 $\boldsymbol{M}_0$ 作用, 此力矩不能通过外

环轴传递至载体, 却能通过内环轴向内传递至转子. 根据 2.2.4 节关于陀螺进动性的解释, 力矩 $\boldsymbol{M}_0$ 引起旋转中的转子绕内环轴 y 进动. 在内环上施加绕 y 轴的力矩 $\boldsymbol{M}_1$, 此力矩不能通过内环轴传递至外环, 却能通过转子轴向内传递至转子使转子绕 x 轴进动. 力矩 $\boldsymbol{M}_0$ 或 $\boldsymbol{M}_1$ 一旦消失进动立即停止. 对于短暂的力矩冲量, 或对于可简化为一系列交变力矩冲量的高频脉动力矩, 陀螺极轴来不及产生明显的位置变化, 表现为二自由度陀螺仪抵抗冲击干扰的稳定性.

如果将外环与载体刚性固结而减少一个自由度, 则内环上作用的绕 y 轴的力矩 $\boldsymbol{M}_1$ 虽然能向内传递至转子, 但轴承的约束作用不允许转子绕 x 轴进动. 在 $\boldsymbol{M}_1$ 作用下, 转子与内环的组合体只可能绕内环轴加速转动, 转动过程中由于动量矩改变方向而产生的陀螺力矩则随时与轴承的约束反力矩相平衡. 力矩消失后内环和转子仍能靠惯性维持匀速转动. 说明单自由度陀螺仪不具有抵抗冲击干扰的稳定性. 如果不固定外环, 但内环转动 90°, 使转子极轴与外环轴重合, 则陀螺仪以另一种形式丧失一个自由度. 作用在外环或内环上绕 x 轴的力矩向内传递不到转子, 而只能使外环和内环共同绕 x 轴加速旋转. 因此也丧失抵抗冲击干扰的稳定性.

3.1.3　万向支架与陀螺驱动

框架陀螺仪的内环常做成包围转子的壳体, 固定在壳体上的电机定子产生对转子的驱动力矩. 但此力矩为内力矩, 它必须经过内环轴承传递至外环, 再经过外环轴承传递至载体以 "转化" 为外力矩 $\boldsymbol{L}_0$, 才能产生驱动效果. 转子旋转时受到壳体内气体介质的阻尼作用, 如壳体是密封的, 则阻尼力矩的反作用力矩全部作用于内环. 因此力矩 $\boldsymbol{L}_2$ 沿极轴的投影 L_{2z} 应包含驱动力矩 $\boldsymbol{M}_{\mathrm{m}}$ 与阻尼力矩 $-\boldsymbol{M}_{\mathrm{d}}$ 在内, 即

$$L_{2z} = M_{\mathrm{m}} - M_{\mathrm{d}} \tag{3.1.1}$$

外环轴承的理想约束条件要求载体对外环的约束力矩 $\boldsymbol{L}_0$ 与外环轴垂直, 并经过内环轴承传递至内环. 内环的质量忽略不计时, 作用于内环的各力矩应满足静力学平衡条件, 设 β 为 $\boldsymbol{L}_0$ 与极轴的夹角, 沿极轴的平衡方程为

$$L_0 \cos\beta - L_{2z} = 0 \tag{3.1.2}$$

上述力矩 $\boldsymbol{L}_0$ 沿极轴的投影 $L_0 \cos\beta$ 是对转子产生驱动效果的外力矩. 与此同时, $\boldsymbol{L}_0$ 垂直于极轴的投影 $L_0 \sin\beta$ 经过转子轴承传递至转子, 引起转子进动. 从式 (3.1.1), (3.1.2) 导出

$$L_0 \sin\beta = (M_{\mathrm{m}} - M_{\mathrm{d}}) \tan\beta \tag{3.1.3}$$

根据图 3.2 判断进动方向, 陀螺加速时 $M_{\mathrm{m}} > M_{\mathrm{d}}$, $L_0 \sin\beta > 0$, 极轴趋向于与外环轴垂直, β 趋于减小. 直至驱动过程完全结束, 即 $M_{\mathrm{m}} = M_{\mathrm{d}}$ 时才告终止. 这种在驱

动过程中伴随发生的内环偏转现象可从以上分析得到解释. 陀螺减速时产生相反方向的内环偏转运动, 只是由于制动过程远比驱动过程平缓, 此现象不甚明显.

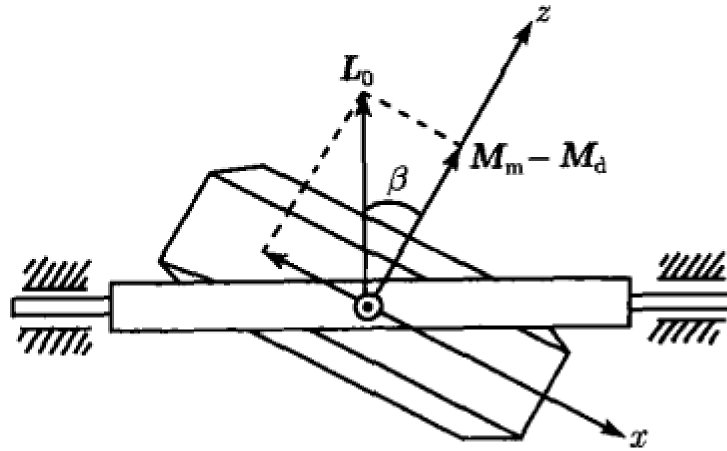


图 3.2　驱动引起的陀螺偏转

如壳体上开孔, 则介质对转子阻尼力矩的反作用力矩中只有一部分能传递到内环和外环, 即使 $M_{\rm m} = M_{\rm d}$, L_0 也不等于零, 内环的偏转现象仍可能继续进行. 当转子在完全开放的内环中利用系统以外的力矩驱动时, 上述内环偏转现象即不存在.

以上根据万向支架的力矩传递特点对陀螺仪的稳定性和驱动过程所作的分析充分证明, 即使忽略内、外环的质量, 万向支架陀螺仪也不能使用单个刚体的经典模型, 而必须以 3 个刚体组成的多刚体系统作为其力学模型.

3.2　静止基座上的陀螺动力学方程

3.2.1　陀螺动力学方程的一般形式

以陀螺仪的支点 O 为原点建立 $(O-\xi\eta\zeta)$ 坐标系, 作为确定陀螺仪各部件角位置的基准坐标系, 或简称为**基座**. $(O-\xi\eta\zeta)$ 可固结于载体、稳定平台、地球或其他参考物体, 也可取作惯性空间中指向不变的平动坐标系. 采用 1.1.4 节中叙述的卡尔丹角表示陀螺仪各部件的姿态, 其中 α, β 为外环和内环转角, 转子转角随时间单调增长, 改以 φ 表示. 设陀螺的外环轴 x_0 沿基座的 ξ 轴方向, $(O-\xi\eta\zeta)$ 绕 ξ 轴转动 α 角后的位置为外环坐标系 $(O-x_0y_0z_0)$, y_0 轴为内环轴; $(O-x_0y_0z_0)$ 绕 y_1 轴转动 β 角后的位置为内环坐标系 $(O-x_1y_1z_1)$, z_1 轴为转子极轴; $(O-x_1y_1z_1)$ 绕 z_1 轴转动 φ 角后的位置为转子坐标系 $(O-x_{\rm R}y_{\rm R}z_{\rm R})$. $(O-x_0y_0z_0)$, $(O-x_1y_1z_1)$ 和 $(O-x_{\rm R}y_{\rm R}z_{\rm R})$ 分别为外环、内环和转子的主轴坐标系. $(O-x_1y_1z_1)$ 也是轴对称转子的主轴坐标系, 即 1.1.4 节中定义的莱查坐标系. 作为不参与转子自转的主轴坐标系, 适合于作为矢量和张量的投影坐标系. 为简化表达, 将内环坐标系 $(O-x_1y_1z_1)$ 的下标略去改记为 $(O-xyz)$(见图 3.3, 图 3.4). 各坐标系之间的关系为

$$(O-\xi\eta\zeta) \xrightarrow[\xi,x_0]{\alpha} (O-x_0y_0z_0) \xrightarrow[y_0,y]{\beta} (O-xyz) \xrightarrow[z,z_{\rm R}]{\varphi} (O-x_{\rm R}y_{\rm R}z_{\rm R})$$

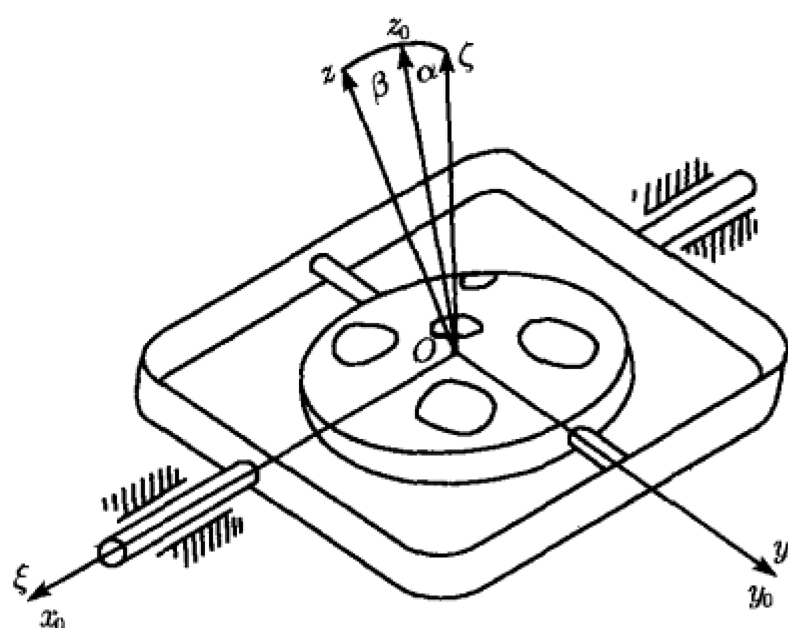


图 3.3 框架陀螺仪

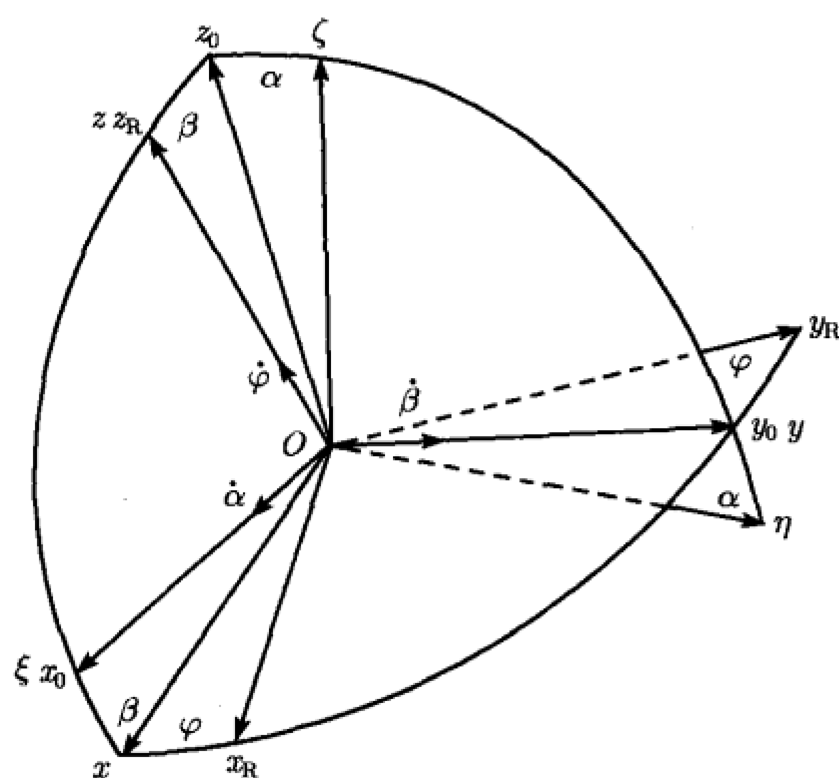


图 3.4 确定框架陀螺位置的卡尔丹角

$(O-xyz)$ 相对 $(O-x_0y_0z_0)$ 和 $(O-\xi\eta\zeta)$ 的方向余弦矩阵分别为

$$\boldsymbol{C}_{x_0}^{x}=\begin{pmatrix}\cos\beta & 0 & \sin\beta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta\end{pmatrix} \tag{3.2.1}$$

$$\boldsymbol{C}_{\xi}^{x}=\begin{pmatrix}\cos\beta & 0 & \sin\beta\\ \sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha & -\sin\alpha\cos\beta\\ -\cos\alpha\sin\beta & \sin\alpha & \cos\alpha\cos\beta\end{pmatrix} \tag{3.2.2}$$

内、外环的转角极小时, 略去 α,β 的二阶以上微量, 简化为

$$
\boldsymbol{C}_{x_0}^{x}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \beta\\ 0 & 1 & 0\\ -\beta & 0 & 1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}_{\xi}^{x}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \beta\\ 0 & 1 & -\alpha\\ -\beta & \alpha & 1\end{pmatrix} \tag{3.2.3}
$$

先讨论基座在惯性空间中完全静止情形. 利用 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 和相应的下标表示各坐标轴的基矢量, 列出各部件的转动角速度

$$
\text{外环:}\quad \boldsymbol{\omega}_0=\dot{\alpha}\boldsymbol{i}_0 \tag{3.2.4a}
$$

$$
\text{内环:}\quad \boldsymbol{\omega}_1=\dot{\alpha}\boldsymbol{i}_0+\dot{\beta}\boldsymbol{j} \tag{3.2.4b}
$$

$$
\text{转子:}\quad \boldsymbol{\omega}_R=\dot{\alpha}\boldsymbol{i}_0+\dot{\beta}\boldsymbol{j}+\dot{\varphi}\boldsymbol{k} \tag{3.2.4c}
$$

将内环角速度 $\boldsymbol{\omega}_1$ 的下标略去改记为 $\boldsymbol{\omega}$, 向 $(O-xyz)$ 投影, 得到

$$
\omega_x=\dot{\alpha}\cos\beta,\quad \omega_y=\dot{\beta},\quad \omega_z=\dot{\alpha}\sin\beta \tag{3.2.5}
$$

规定各部件的主惯性矩为

外环:　A_0　B_0　C_0

内环:　A_1　B_1　C_1

转子:　A_{R}　A_{R}　C_{R}

依据式 (2.2.11) 写出各部件的动量矩

$$
\text{外环:}\quad \boldsymbol{H}_0=A_0\dot{\alpha}\boldsymbol{i}_0 \tag{3.2.6a}
$$

$$
\text{内环:}\quad \boldsymbol{H}_1=A_1\omega_x\boldsymbol{i}+B_1\omega_y\boldsymbol{j}+C_1\omega_z\boldsymbol{k} \tag{3.2.6b}
$$

$$
\text{转子:}\quad \boldsymbol{H}_{\mathrm{R}}=A_{\mathrm{R}}\left(\omega_x\boldsymbol{i}+\omega_y\boldsymbol{j}\right)+C_{\mathrm{R}}\left(\omega_z+\dot{\varphi}\right)\boldsymbol{k} \tag{3.2.6c}
$$

利用图 3.1 定义的力矩符号, 各部件上作用的相对 O 点的合力矩为

外环:　$\boldsymbol{M}_0+\boldsymbol{L}_0-\boldsymbol{L}_1$

内环:　$\boldsymbol{M}_1+\boldsymbol{L}_1-\boldsymbol{L}_2$

转子:　$\boldsymbol{M}_2+\boldsymbol{L}_2$

写出 $\boldsymbol{L}_0$, $\boldsymbol{M}_0$ 相对 $(O-x_0y_0z_0)$ 和 $\boldsymbol{L}_i$, $\boldsymbol{M}_i$ $(i=1,2)$ 相对 $(O-xyz)$ 的投影, 通常为 α,β 及其导数的确定函数

$$
\boldsymbol{L}_0=L_{0x}\boldsymbol{i}_0+L_{0y}\boldsymbol{j}_0+L_{0z}\boldsymbol{k}_0 \tag{3.2.7a}
$$

$$
\boldsymbol{L}_i=L_{ix}\boldsymbol{i}+L_{iy}\boldsymbol{j}+L_{iz}\boldsymbol{k}\quad (i=1,2) \tag{3.2.7b}
$$

$$
\boldsymbol{M}_0=M_{0x}\boldsymbol{i}_0+M_{0y}\boldsymbol{j}_0+M_{0z}\boldsymbol{k}_0 \tag{3.2.7c}
$$

$$
\boldsymbol{M}_i=M_{ix}\boldsymbol{i}+M_{iy}\boldsymbol{j}+M_{iz}\boldsymbol{k}\quad (i=1,2) \tag{3.2.7d}
$$

如将式 (3.2.6),(3.2.7) 分别代入外环、内环和转子的欧拉方程, 则总共 9 个方程, 确定 9 个未知变量, 即 3 个角度坐标 α, β, φ 和 6 个与转动轴正交的轴承约束力矩 L_{0y}, L_{0z}, L_{1x}, L_{1z}, L_{2x}, L_{2y}. 但其中只有前面 3 个变量 α, β, φ 对确定陀螺的运动规律有用. 为避免出现轴承约束力矩以减少未知变量和运动方程的数目, 最好改为对不同的刚体组合列写运动方程. 为此将内环与转子的组合称为**内环组合体**, 外环、内环与转子的组合称为**外环组合体**. 各组合体的动量矩为

内环组合体:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}_1 + \boldsymbol{H}_{\rm R} = &(A_1 + A_{\rm R})\,\omega_x \boldsymbol{i} + (B_1 + A_{\rm R})\,\omega_y \boldsymbol{j}\\ &+ [C_1\omega_z + C_{\rm R}(\omega_z + \dot{\varphi})]\,\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{3.2.8a}$$

外环组合体:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{H}_1 + \boldsymbol{H}_{\rm R} = &\{A_0\dot{\alpha} + (A_1 + A_{\rm R})\,\omega_x\cos\beta\\ &+ [C_1\omega_z + C_{\rm R}(\omega_z + \dot{\varphi})]\sin\beta\}\,\boldsymbol{i}_0 + (\cdots)\,\boldsymbol{j}_0 + (\cdots)\,\boldsymbol{k}_0\end{aligned} \tag{3.2.8b}$$

作用在各组合体上的合力矩为

外环组合体: $\boldsymbol{M}_0 + \boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2 + \boldsymbol{L}_0$

内环组合体: $\boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2 + \boldsymbol{L}_1$

转子: $\boldsymbol{M}_2 + \boldsymbol{L}_2$

根据式 (2.2.34c) 和 (3.2.6c) 列出转子的欧拉方程对 z 轴的投影式

$$C_{\rm R}\frac{{\rm d}(\dot{\varphi} + \dot{\alpha}\sin\beta)}{{\rm d}t} = M_{2z} + L_{2z} \tag{3.2.9}$$

根据式 (2.2.32b) 和 (3.2.8a) 列出内环组合体的欧拉方程对 y 轴的投影式

$$\begin{aligned}&(B_1 + A_{\rm R})\,\ddot{\beta} + (A_1 + A_{\rm R} - C_1)\,\dot{\alpha}^2\cos\beta\sin\beta\\ &- C_{\rm R}(\dot{\varphi} + \dot{\alpha}\sin\beta)\,\dot{\alpha}\cos\beta = M_{1y} + M_{2y} + L_{1y}\end{aligned} \tag{3.2.10}$$

根据式 (3.2.8b) 列出外环组合体绕固定轴 x_0 转动的运动方程

$$\begin{aligned}&\frac{\rm d}{{\rm d}t}\left\{\left[A_0 + C_1 + (A_1 + A_{\rm R} - C_1)\cos^2\beta\right]\dot{\alpha} + C_{\rm R}(\dot{\varphi} + \dot{\alpha}\sin\beta)\sin\beta\right\}\\ &= M_{0x} + (M_{1x} + M_{2x})\cos\beta + (M_{1z} + M_{2z})\sin\beta + L_{0x}\end{aligned} \tag{3.2.11}$$

力矩的变化规律确定以后, 含 3 个未知变量 α, β, φ 的方程组 (3.2.9),(3.2.10),(3.2.11) 封闭.

3.2.2　稳态动力学方程

驱动过程结束后陀螺的运动称为**稳态运动**. 有两种约束条件不同的稳态运动, 分别对应于两种不同类型的驱动电机:

1) **理想约束**: 稳态时转子上作用的驱动力矩与阻尼力矩互相平衡而维持合力矩为零;

2) **恒速约束**: 稳态时转子相对定子的相对转速维持恒值.

对于理想约束的第一种稳态, 令方程 (3.2.9) 右边的力矩项为零, 积分得到以下非完整约束条件

$$\dot{\varphi} + \dot{\alpha}\sin\beta = \omega_0 \tag{3.2.12}$$

积分常数 ω_0 是转子绝对转速的稳态值. 引入常数 H_0, 定义为

$$H_0 = C_{\mathrm{R}}\omega_0 \tag{3.2.13}$$

H_0 为陀螺的动量矩常数, 它是转子绝对动量矩的稳态值. 将式 (3.2.12),(3.2.13) 代入方程 (3.2.10),(3.2.11), 导出理想约束条件下陀螺仪的稳态动力学方程组

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[A(\beta)\,\dot{\alpha} + H_0\sin\beta\right] = M_x \tag{3.2.14a}$$

$$B\ddot{\beta} - \frac{1}{2}A'(\beta)\,\dot{\alpha}^2 - H_0\dot{\alpha}\cos\beta = M_y \tag{3.2.14b}$$

式中 $A(\beta)$ 为外环组合体相对外环轴的惯性矩, 是内环转角 β 的函数; 常数 B 为内环组合体相对内环轴的惯性矩

$$\begin{aligned} &A(\beta) = A_0 + C_1 + (A_1 + A_{\mathrm{R}} - C_1)\cos^2\beta \\ &B = B_1 + A_{\mathrm{R}} \end{aligned} \tag{3.2.15}$$

$A'(\beta) = -(A_1 + A_{\mathrm{R}} - C_1)\sin 2\beta$ 为 $A(\beta)$ 的导函数, M_x 为外环组合体上作用的绕 x_0 轴的合力矩, M_y 为内环组合体上作用的绕 y 轴的合力矩

$$\begin{aligned} &M_x = M_{0x} + (M_{1x} + M_{2x})\cos\beta + (M_{1z} + M_{2z})\sin\beta + L_{0x} \\ &M_y = M_{1y} + M_{2y} + L_{1y} \end{aligned} \tag{3.2.16}$$

第二种稳态的恒速约束条件为

$$\dot{\varphi} = \omega_0 \tag{3.2.17}$$

其中常数 ω_0 的定义改为转子相对内环的相对转速的稳态值. 动量矩常数 H_0 的定义也相应地改为转子相对动量矩的稳态值. 将式 (3.2.17) 代替 (3.2.12) 代入方程 (3.2.10),(3.2.11), 得到恒速约束条件下的稳态运动方程组. 它在形式上与式 (3.2.14)

完全相同, 只须将式 (3.2.15) 中的 C_1 改为 C_1+C_R. 在以后的讨论中, 如不特殊指明, 一般只讨论理想约束的稳态运动, 所得结论不难推广到恒速约束情形.

M_x, M_y 为零的陀螺仪称为**自由陀螺**, 它要求内、外环轴承光滑无摩擦, 且支架和转子的质心都与支承中心重合. 应注意, 带万向支架的自由陀螺并非免除一切外力矩作用, 因为外环轴承可以产生与外环轴垂直的约束力矩 L_{0y} 和 L_{0z}, 对陀螺的运动产生影响.

3.2.3 动力学方程的简化

由于高速旋转陀螺仪的稳定性, 万向支架的转动角速度 $\dot\alpha, \dot\beta$ 极小, 如允许忽略其二阶微量, 则动力学方程组 (3.2.14) 简化为

$$A(\beta)\ddot\alpha+(H_0\cos\beta)\dot\beta=M_x \tag{3.2.18a}$$

$$B\ddot\beta-(H_0\cos\beta)\dot\alpha=M_y \tag{3.2.18b}$$

设外环和内环的偏角 α, β 保持在某个稳态位置 α_0, β_0 附近, 令

$$\alpha=\alpha_0+\Delta\alpha,\quad \beta=\beta_0+\Delta\beta \tag{3.2.19}$$

如允许忽略 $\Delta\alpha, \Delta\beta$ 及其导数的二阶以上微量, 则式 (3.2.18) 简化为线性方程组

$$A\ddot\alpha+H\dot\beta=M_x \tag{3.2.20a}$$

$$B\ddot\beta-H\dot\alpha=M_y \tag{3.2.20b}$$

式中 A 为内环处于稳态位置时外环组合体相对外环轴的惯性矩, H 为转子的动量矩沿 z_0 轴的投影

$$A=A(\beta_0),\quad H=H_0\cos\beta_0 \tag{3.2.21}$$

在多数情况下, 极轴的稳态位置与外环轴垂直, $\beta_0=0$, 以上定义简化为

$$A=A_0+A_1+A_R,\quad H=H_0 \tag{3.2.22}$$

方程组 (3.2.20) 也可直接从动量矩定理导出, 只须将式 (3.2.5) 中的 $\dot\alpha$ 和 $\dot\beta$ 的二阶以上微量略去, 简化为

$$\omega_x=\dot\alpha,\quad \omega_y=\dot\beta,\quad \omega_z=0 \tag{3.2.23}$$

设 $\beta_0=0$, 将线性化了的外环组合体绕 x_0 轴、内环组合体绕 y 轴和转子绕 z 轴的动量矩分量综合成陀螺的总动量矩 $\boldsymbol{H}$

$$\boldsymbol{H}=A\dot\alpha\boldsymbol{i}+B\dot\beta\boldsymbol{j}+H\boldsymbol{k} \tag{3.2.24}$$

将式 (3.2.23),(3.2.24) 代入动量矩定理的投影式 (2.2.32a), (2.2.32b), 即直接导出线性方程组 (3.2.20).

在第 7 章的陀螺章动理论中将要证明: 转子的转速极高且外力矩变化平缓时, 允许从陀螺运动方程 (3.2.20) 中舍去二阶导数 $\ddot{\alpha}$ 和 $\ddot{\beta}$, 简化为一阶线性方程组, 称为**进动方程**.

$$H\dot{\alpha} = -M_y \tag{3.2.25a}$$

$$H\dot{\beta} = M_x \tag{3.2.25b}$$

进动方程可看作是略去内、外环质量和转子的赤道惯性矩后导出的陀螺运动方程. 作以上近似时, 陀螺的动量矩矢量 $\boldsymbol{H}$ 与转子极轴的方向完全一致, 令

$$\boldsymbol{H} = H\boldsymbol{k} \tag{3.2.26}$$

将式 (3.2.23), (3.2.26) 代入动量矩定理 (2.2.27), 可直接导出进动方程 (3.2.25).

在进动方程基础上建立起来的理论称为陀螺仪的**进动理论**, 它是一种数学形式十分简单的近似理论. 转速足够高时进动理论能成功地解释陀螺运动的基本现象, 成为指导陀螺仪的研究和设计的工程实用理论. 由于进动理论略去了万向支架的质量, 因此实际选择基准坐标系 $(O-\xi\eta\zeta)$ 时, 不一定要求 ξ 轴与陀螺外环轴一致. 只须将 α, β 理解为极轴相对 $(O-\xi\eta\zeta)$ 的角度坐标, 而不一定代表外环和内环的实际转角. 不过这并不意味进动理论可以完全忽视万向支架的存在, 因为在确定力矩项 M_x, M_y 时必须考虑万向支架的力矩传递作用. 在进动理论中一般不必严格区分转子的两类约束条件, 因为无论理想约束或恒速约束, 进动方程在形式上完全相同, 只是常数 H 的定义为转子的绝对动量矩或相对动量矩而有所区别. 转速极高时此微小差别也可忽略.

陀螺运动方程经过多次简化才从式 (3.2.14) 演变为 (3.2.25) 的简明形式, 因此进动理论只能作为陀螺仪实际运动过程的近似描述. 即使对于未经简化的方程 (3.2.14), 由于实际陀螺仪存在各种工艺误差、轴承间隙、弹性变形等因素, 也不能认为是绝对正确地反映陀螺仪的实际运动. 因此过多保留运动方程中的次要因素或盲目追求微分方程解的精确性, 致使计算公式繁琐冗长的做法并不可取. 在以后的讨论中, 将力求用简明的数学形式讨论陀螺仪的基本运动规律.

3.2.4　三环陀螺动力学方程

三环陀螺是在内环与外环之间再增加一个中环组成的四刚体系统. 将原来的内环改为中环, $(O-xyz)$ 的定义改为中环的主轴坐标系. 内环相对中环绕极轴 z 的转角记作 γ, 内环的主轴坐标系改以 $(O-x_1y_1z_1)$ 表示 (见图 3.5). 这种结构常见于陀螺罗经. 各坐标系之间的关系为 (见图 3.6)

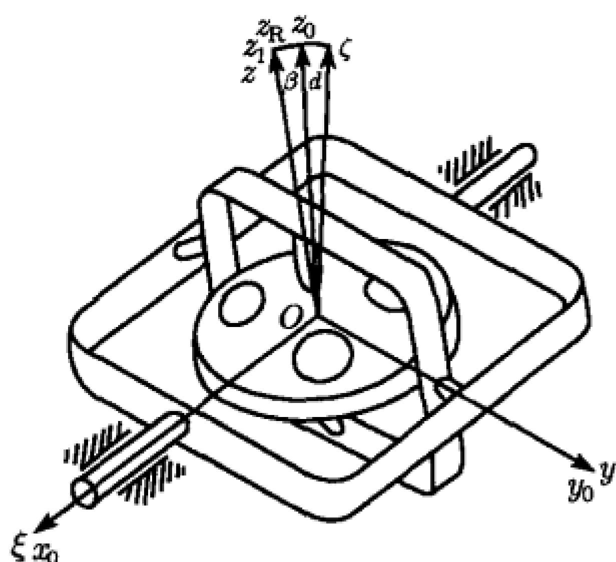


图 3.5　三环陀螺

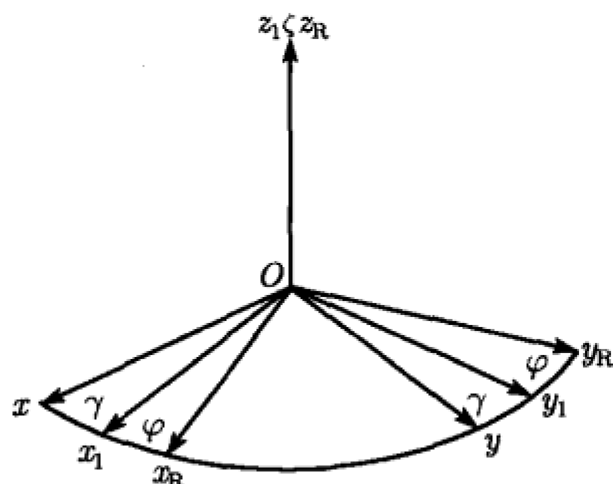


图 3.6　三环陀螺的中环和内环

$$(O-\xi\eta\zeta)\xrightarrow[\xi,x_0]{\alpha}(O-x_0y_0z_0)\xrightarrow[y_0,y]{\beta}(O-xyz)\xrightarrow[z,z_1]{\gamma}(O-x_1y_1z_1)\xrightarrow[z_1,z_R]{\varphi}(O-x_Ry_Rz_R)$$

$(O-x_1y_1z_1)$ 相对 $(O-xyz)$ 和 $(O-\xi\eta\zeta)$ 的方向余弦矩阵分别为

$$\boldsymbol{C}_x^{x_1}=\begin{pmatrix}\cos\gamma & -\sin\gamma & 0\\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{3.2.27}$$

$$\boldsymbol{C}_\xi^{x_1}=\begin{pmatrix}\mathrm{c}\beta\mathrm{c}\gamma & -\mathrm{c}\beta\mathrm{s}\gamma & \mathrm{s}\beta\\ \mathrm{s}\alpha\mathrm{s}\beta\mathrm{c}\gamma+\mathrm{c}\alpha\mathrm{s}\gamma & -\mathrm{s}\alpha\mathrm{s}\beta\mathrm{s}\gamma+\mathrm{c}\alpha\mathrm{c}\gamma & -\mathrm{s}\alpha\mathrm{c}\beta\\ -\mathrm{c}\alpha\mathrm{s}\beta\mathrm{c}\gamma+\mathrm{s}\alpha\mathrm{s}\gamma & \mathrm{c}\alpha\mathrm{s}\beta\mathrm{s}\gamma+\mathrm{s}\alpha\mathrm{c}\gamma & \mathrm{c}\alpha\mathrm{c}\beta\end{pmatrix} \tag{3.2.28}$$

中环坐标系 $(O-xyz)$、内环坐标系 $(O-x_1y_1z_1)$ 和转子坐标系 $(O-x_Ry_Rz_R)$ 均为轴对称转子的主轴坐标系, z, z_1, z_R 均为转子的极轴. 讨论三环陀螺的运动时, 可将 $(O-xyz)$ 代替内环坐标系作为矢量和张量的投影坐标系. 内环转动角速度仍记作 $\boldsymbol{\omega}$, 其相对 $(O-xyz)$ 的投影为

$$\omega_x=\dot{\alpha}\cos\beta,\quad \omega_y=\dot{\beta},\quad \omega_z=\dot{\gamma}+\dot{\alpha}\sin\beta \tag{3.2.29}$$

由于进动理论完全忽略万向支架质量, 且中环的存在不影响极轴的转动自由度, 因此三环陀螺的进动方程与 (3.2.25) 完全相同, 仅须增加内环组合体绕极轴的转动方程. 将上式代入 (3.2.8a),(2.2.32c), 列出内环组合体的欧拉方程对 z 轴的投影式, 略去二阶微量后得到

$$C_1\ddot{\gamma}=M_z \tag{3.2.30}$$

其中 C_1 为内环组合体绕 z 轴的惯性矩, M_z 为作用于内环组合体的绕 z 轴的合力矩. 对于恒速约束, 上式中的 C_1 应改为 C_1+C_R.

3.2.5　复摆与单自由度陀螺动力学方程

如转子停止转动, 令方程 (3.2.20) 中 $H=0$, 得到

$$A\ddot{\alpha}=M_x \tag{3.2.31a}$$

$$B\ddot{\beta}=M_y \tag{3.2.31b}$$

当力矩项 M_x, M_y 仅包含由于系统的质心与支点不重合而产生的重力矩时, 方程组 (3.2.31) 就是万向支架支承的二自由度复摆的动力学方程. 其中每个方程都可独立为绕固定轴转动的单自由度复摆的动力学方程.

将二自由度陀螺的外环与基座固定, 令 $\alpha\equiv 0$, 方程 (3.2.20) 转变为单自由度陀螺的动力学方程

$$H\dot{\beta}=M_x \tag{3.2.32a}$$

$$B\ddot{\beta}=M_y \tag{3.2.32b}$$

方程 (3.2.32b) 与复摆动力学方程 (3.2.31b) 完全相同. 可见外环固定后, 无论转子是否转动, 内环的运动规律均与复摆相同. 当转子转动存在动量矩 H 时, 方程 (3.2.32a) 中的 M_x 为内环轴承的约束力矩, 与惯性力矩自行平衡.

3.3　运动基座上的陀螺动力学方程

3.3.1　运动基座上的进动方程

一般情况下, 陀螺的基座均处于运动状态. 即使基座相对地球静止, 也存在地球自转运动. 设基座 $(O-\xi\eta\zeta)$ 绕固定点 O 在惯性空间中的转动角速度为

$$\boldsymbol{\Omega}=\Omega_\xi\boldsymbol{\xi}^0+\Omega_\eta\boldsymbol{\eta}^0+\Omega_\zeta\boldsymbol{\zeta}^0 \tag{3.3.1}$$

利用 (3.2.2) 导出 $\boldsymbol{\Omega}$ 相对 $(O-xyz)$ 轴系的投影

$$\Omega_x=\Omega_\xi\cos\beta+\Omega_\eta\sin\alpha\sin\beta-\Omega_\zeta\cos\alpha\sin\beta \tag{3.3.2a}$$

$$\Omega_y=\Omega_\eta\cos\alpha+\Omega_\zeta\sin\alpha \tag{3.3.2b}$$

$$\Omega_z=\Omega_\xi\sin\beta-\Omega_\eta\sin\alpha\cos\beta+\Omega_\zeta\cos\alpha\cos\beta \tag{3.3.2c}$$

在内环角速度中增加基座的牵连角速度 $\boldsymbol{\Omega}$, 其角速度分量为式 (3.2.23) 与 (3.3.2) 各投影之和

$$\omega_x=\dot{\alpha}+\Omega_x,\quad \omega_y=\dot{\beta}+\Omega_y,\quad \omega_z=\Omega_z \tag{3.3.3}$$

略去 α,β 的二阶以上微量后化作

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\alpha} + \Omega_\xi - \Omega_\zeta\beta \\ \omega_y &= \dot{\beta} + \Omega_\eta + \Omega_\zeta\alpha \\ \omega_z &= \Omega_\xi\beta - \Omega_\eta\alpha + \Omega_\zeta\end{aligned} \tag{3.3.4}$$

将简化的动量矩定理 (2.2.27) 中的 $\boldsymbol{\omega}_1$ 略去下标, 以式 (3.3.4) 代入, 令 $\boldsymbol{H} = H\boldsymbol{k}$, 导出转动基座上的陀螺进动方程

$$\dot{\alpha} - \Omega_\zeta\beta = -\Omega_\xi - \frac{M_y}{H} \tag{3.3.5a}$$

$$\dot{\beta} + \Omega_\zeta\alpha = -\Omega_\eta + \frac{M_x}{H} \tag{3.3.5b}$$

设陀螺支点 O 随载体做任意运动, $\boldsymbol{a}$ 为 O 点的加速度

$$\boldsymbol{a} = a_\xi\boldsymbol{\xi}^0 + a_\eta\boldsymbol{\eta}^0 + a_\zeta\boldsymbol{\zeta}^0 \tag{3.3.6}$$

如陀螺的质心 O_c 与 O 点不重合, $\boldsymbol{l}$ 为 O 至 O_c 的矢径, 则陀螺在随 O 点平动的坐标系内有牵连惯性力矩 $\boldsymbol{M}_a$ 产生

$$\boldsymbol{M}_a = \boldsymbol{l} \times (-m\boldsymbol{a}) \tag{3.3.7}$$

在方程 (3.3.5) 的力矩项 M_x, M_y 中增加此牵连惯性力矩, 即成为基座做任意运动时的陀螺进动方程.

3.3.2　自然坐标系

近似将地球看作理想球体, 设地球表面 $\mathscr{E}$ 是以 O_e 为球心, $R = 6371$ km 为半径的球面. 定义 $\mathscr{N}$ 是与 $\mathscr{E}$ 重合但不参与地球自转的球面, 它只随 O_e 做平动运动. 忽略 O_e 点的加速度, $\mathscr{N}$ 可视为惯性坐标系. 以沿 $\mathscr{N}$ 球面运动的陀螺支点 O 为原点建立直角坐标系 $(O-XYZ)$, Z 轴沿 $\mathscr{N}$ 球面的法线方向, 即半径 O_eO 的延续方向或 O 点处的地垂线方向. (X,Y) 坐标面在 O 点与 $\mathscr{N}$ 球面相切, 成为 O 点处的切平面. 按上述定义的坐标系称为**达尔布**(Darboux)**坐标系**. 根据 X 轴和 Y 轴的不同规定方法, 可有各种达尔布坐标系.

自然坐标系是一种常用的达尔布坐标系, 它的 X 轴沿 O 点的绝对速度矢量 $\boldsymbol{V}$ 的方向, 即 O 点在 $\mathscr{N}$ 球面上运动轨迹的切线方向, Y 轴方向由右手定则确定 (见图 3.7). 自然坐标系 $(O-XYZ)$ 的 O 点速度 $\boldsymbol{V}$ 和转动角速度 $\boldsymbol{\Omega}_D$ 分别为

$$\boldsymbol{V} = V\boldsymbol{X}^0 \tag{3.3.8}$$

$$\boldsymbol{\Omega}_D = \frac{V}{R}\boldsymbol{Y}^0 + \Omega\boldsymbol{Z}^0, \quad \Omega = \frac{V}{\rho} \tag{3.3.9}$$

式中 R 为 O 点在 $\mathscr{N}$ 球面上的轨迹的法曲率半径, 即地球半径, ρ 为测地曲率半径.

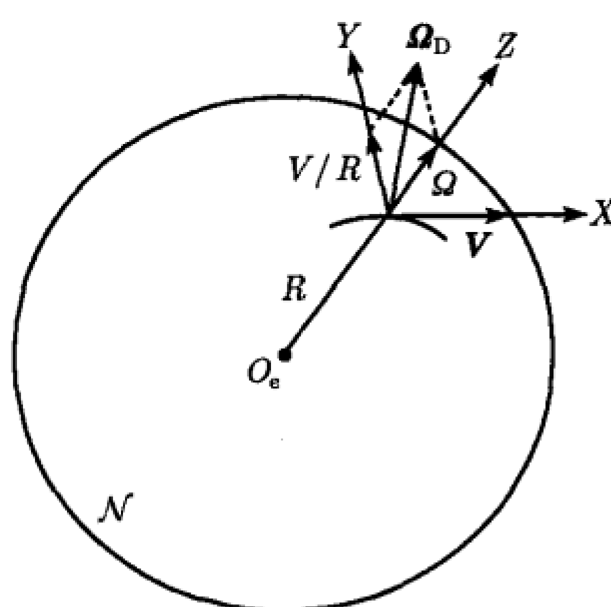


图 3.7　自然坐标系

定义 $\boldsymbol{f}$ 为运动坐标系内单位质量物体所受重力与惯性力的合力, 它等于重力加速度与 O 点的加速度之差, 称作**比力**.

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{g} - \boldsymbol{a} \tag{3.3.10}$$

对于自然坐标系, $\boldsymbol{g}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 分别为

$$\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{Z}^0 \tag{3.3.11}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{\tilde{\partial} \boldsymbol{V}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{D}} \times \boldsymbol{V} \tag{3.3.12}$$

波浪号表示对转动坐标系 $(O-XYZ)$ 的局部导数. 将式 (3.3.8), (3.3.9) 代入式 (3.3.12), 得到

$$\boldsymbol{f} = -\dot{V}\boldsymbol{X}^0 - V\Omega\boldsymbol{Y}^0 - \left(g - \frac{V^2}{R}\right)\boldsymbol{Z}^0 \tag{3.3.13}$$

设陀螺基座固定于自然坐标系. 对于极轴位置在地垂线附近的垂直陀螺仪, 令 $(O-\xi\eta\zeta)$ 各轴依次与 X, Y, Z 重合. 对于极轴位置在水平面附近的方位陀螺仪, 则改令 $(O-\xi\eta\zeta)$ 各轴依次与 Z, X, Y 重合. 因此利用式 (3.3.9) 和 (3.3.13) 确定基座角速度分量和比力分量时各有不同的定义, 如表 3.1 和表 3.2 所示.

表 3.1

	Ω_ξ	Ω_η	Ω_ζ
垂直陀螺	0	V/R	Ω
方位陀螺	Ω	0	V/R

表 3.2

	f_ξ	f_η	f_ζ
垂直陀螺	$-\dot{V}$	$-V\Omega$	$-g+(V^2/R)$
方位陀螺	$-g+(V^2/R)$	$-\dot{V}$	$-V\Omega$

将普遍形式进动方程 (3.3.5) 中的 $\Omega_\xi, \Omega_\eta, \Omega_\zeta$ 以表 3.1 的第一行代替, 得到自然坐标系中的垂直陀螺进动方程

$$\dot{\alpha} - \Omega\beta = -\frac{M_y}{H} \tag{3.3.14a}$$

$$\dot{\beta} + \Omega\alpha = -\frac{V}{R} + \frac{M_x}{H} \tag{3.3.14b}$$

改用表 3.1 的第二行, 得到自然坐标系中的方位陀螺进动方程

$$\dot{\alpha} - \left(\frac{V}{R}\right)\beta = -\Omega - \frac{M_y}{H} \tag{3.3.15a}$$

$$\dot{\beta} + \left(\frac{V}{R}\right)\alpha = \frac{M_x}{H} \tag{3.3.15b}$$

3.3.3　地理坐标系

地理坐标系$(O-ENZ)$ 是另一种达尔布坐标系, 仍以 O 点为原点, Z 轴仍沿地垂线向上, 但 E 轴沿 O 点处地理纬线的切线指向东, N 轴沿子午线的切线指向北. 沿地球表面运动的载体, 如船舶或飞机通常以 $(O-ENZ)$ 作为姿态参考基准, 因为它是由当地水平面和子午面所构成的坐标系 (见图 3.8).

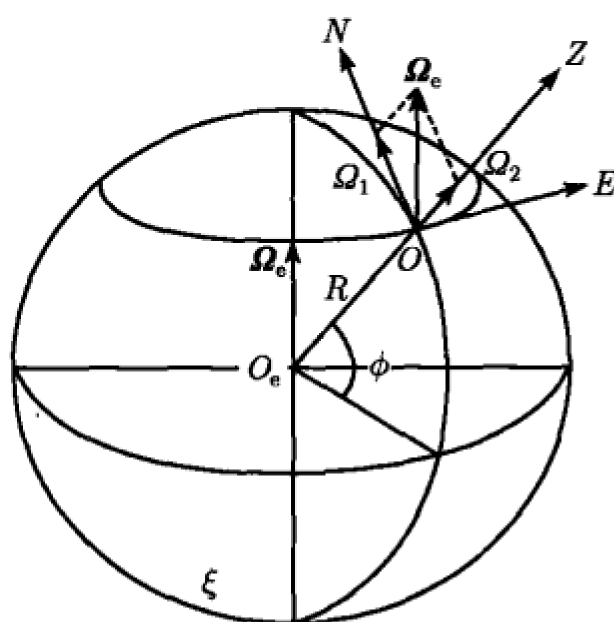


图 3.8　地理坐标系

设地球绕极轴的自转角速度为 Ω_e, 其瞬时旋转轴的微小变动可忽略不计. 陀螺支点 O 由于地球自转和载体沿地球表面 $\mathscr{E}$ 的相对运动而改变其在惯性空间中的位置. 设 ϕ 为 O 点的地理纬度, O 点的绝对速度 $\boldsymbol{V}$ 相对 $(O-ENZ)$ 的投影式为

$$\boldsymbol{V} = V_E\boldsymbol{E}^0 + V_N\boldsymbol{N}^0 \tag{3.3.16}$$

其中

$$V_E = v_E + \Omega_e R\cos\phi, \quad V_N = v_N \tag{3.3.17}$$

其中 v_E, v_N 为 O 点相对地球速度 $\boldsymbol{v}$ 的投影. 地理坐标系的转动角速度 $\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{G}}$ 为

$$\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{G}} = -\frac{V_N}{R}\boldsymbol{E}^0 + \frac{V_E}{R}\boldsymbol{N}^0 + \frac{V_E}{R}\tan\phi \boldsymbol{Z}^0 \tag{3.3.18}$$

将式 (3.3.12) 中的 $\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{D}}$ 改为 $\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{G}}$, 波浪号改为对 $(O-ENZ)$ 的局部导数, 计算比力 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{g}-\boldsymbol{a}$, 得到

$$\boldsymbol{f} = -\left(\dot{V}_E - \frac{V_E V_N}{R}\tan\phi\right)\boldsymbol{E}^0 - \left(\dot{V}_N + \frac{V_E^2}{R}\tan\phi\right)\boldsymbol{N}^0 - \left(g - \frac{V^2}{R}\right)\boldsymbol{Z}^0 \tag{3.3.19}$$

将陀螺基座固定于地理坐标系. 对于垂直陀螺仪, 令 $(O-\xi\eta\zeta)$ 各轴依次与 E, N, Z 重合. 对于方位陀螺仪, 改令 $(O-\xi\eta\zeta)$ 各轴依次与 Z, E, N 重合. 基座角速度分量和比力分量重新规定如表 3.3 和表 3.4 所示.

表 3.3

	Ω_ξ	Ω_η	Ω_ζ
垂直陀螺	$-V_N/R$	V_E/R	$(V_E/R)\tan\phi$
方位陀螺	$(V_E/R)\tan\phi$	$-V_N/R$	V_E/R

表 3.4

	f_ξ	f_η	f_ζ
垂直陀螺	$-\dot{V}_E + (V_E V_N/R)\tan\phi$	$-\dot{V}_N - (V_E^2/R)\tan\phi$	$-g + (V^2/R)$
方位陀螺	$-g + (V^2/R)$	$-\dot{V}_E + (V_E V_N/R)\tan\phi$	$-\dot{V}_N - (V_E^2/R)\tan\phi$

利用表 3.3 和表 3.4 可从普遍形式的进动方程 (3.3.5) 中导出地理坐标系中的垂直陀螺进动方程

$$\dot{\alpha} - \left(\frac{V_E}{R}\tan\phi\right)\beta = \frac{V_N}{R} - \frac{M_y}{H} \tag{3.3.20a}$$

$$\dot{\beta} + \left(\frac{V_E}{R}\tan\phi\right)\alpha = -\frac{V_E}{R} + \frac{M_x}{H} \tag{3.3.20b}$$

或地理坐标系中的方位陀螺进动方程

$$\dot{\alpha} - \left(\frac{V_E}{R}\right)\beta = -\frac{V_E}{R}\tan\phi - \frac{M_y}{H} \tag{3.3.21a}$$

$$\dot{\beta} + \left(\frac{V_E}{R}\right)\alpha = \frac{V_N}{R} + \frac{M_x}{H} \tag{3.3.21b}$$

3.3.4 运动基座上的复摆与单自由度陀螺

转子不旋转时二自由度陀螺转变为二自由度复摆. 转动基座上复摆的动量矩 $\boldsymbol{H}$ 为

$$\boldsymbol{H} = A\omega_x \boldsymbol{i} + B\omega_y \boldsymbol{j} + C\omega_z \boldsymbol{k} \tag{3.3.22}$$

其中 A, C 为内环组合体相对 x 和 z 轴的惯性矩. 将上式代入动量矩定理 (2.2.23), 其中 $\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\omega}$ 以式 (3.3.3) 代入, 略去 α, β 及其导数的二阶以上微量, 得到运动基座上的复摆运动方程

$$\begin{aligned} &A\ddot{\alpha} - (A+B-C)\,\Omega_\zeta\dot{\beta} + (B-C)\,\Omega_\eta^2\alpha - [A\,\dot{\Omega}_\zeta + (B-C)\,\Omega_\xi\Omega_\eta]\,\beta \\ &= -A\dot{\Omega}_\xi + (B-C)\,\Omega_\eta\Omega_\zeta + M_x \end{aligned} \tag{3.3.23a}$$

$$\begin{aligned} &B\ddot{\beta} + (A+B-C)\,\Omega_\zeta\dot{\alpha} - (C-A)\,\Omega_\xi^2\beta - [B\,\dot{\Omega}_\zeta + (C-A)\,\Omega_\xi\Omega_\eta]\,\alpha \\ &= -B\dot{\Omega}_\eta + (C-A)\,\Omega_\xi\Omega_\zeta + M_y \end{aligned} \tag{3.3.23b}$$

对于自然坐标系中的复摆, 将上式中 $\Omega_\xi, \Omega_\eta, \Omega_\zeta$ 以表 3.1 的第一行代替, 略去 (V/R) 的二次项, 得到

$$A\ddot{\alpha} - (A+B-C)\,\Omega\dot{\beta} - A\dot{\Omega}\beta = (B-C)\frac{V\Omega}{R} + M_x \tag{3.3.24a}$$

$$B\ddot{\beta} + (A+B-C)\,\Omega\dot{\alpha} + B\dot{\Omega}\alpha = -B\frac{\dot{V}}{R} + M_y \tag{3.3.24b}$$

建立转动基座上单自由度陀螺运动方程时, 设外环与基座固定, $\alpha = 0$, 内环成为唯一的支架. 利用式 (2.2.34a) 和 (2.2.34b) 写出内环组合体对 x 轴和 y 轴的欧拉方程, 设 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{\omega}_1$ 分别为转子和内环角速度, 其中

$$\begin{aligned} &\omega_x = \omega_{1x} = \Omega_x, \quad \omega_y = \omega_{1y} = \dot{\beta} + \Omega_y \\ &\omega_z = \dot{\varphi} + \Omega_z, \quad \omega_{1z} = \Omega_z \end{aligned} \tag{3.3.25}$$

利用理想约束条件, 令 $H_0 = C_R\omega_z$, 导出

$$A\dot{\Omega}_x + [H_0 + (C_1 - A)\Omega_z](\dot{\beta} + \Omega_y) = M_x \tag{3.3.26a}$$

$$B\left(\ddot{\beta} + \dot{\Omega}_y\right) - H_0\Omega_x - (C_1 - A)\,\Omega_x\Omega_z = M_y \tag{3.3.26b}$$

式中 $A = A_1 + A_{\rm R}$, $B = B_1 + A_{\rm R}$ 为内环组合体的惯性矩. 如为恒速约束, 则 C_1 应由 $C_1 + C_{\rm R}$ 代替. 力矩项中包含了基座平动引起的牵连惯性力矩. 利用式 (3.3.2) 将方程 (3.3.26b) 变换为

$$\begin{aligned} &B\left(\ddot{\beta} + \dot{\Omega}_\eta\right) + H_0\left(\Omega_\zeta\sin\beta - \Omega_\xi\cos\beta\right) - (C_1 - A)\left[\frac{1}{2}\left(\Omega_\xi^2 - \Omega_\zeta^2\right)\sin 2\beta\right. \\ &\left.+\Omega_\xi\Omega_\zeta\sin 2\beta\right] = M_y \end{aligned} \tag{3.3.27}$$

3.4　动力学方程的分析力学表述

3.4.1　拉格朗日方程

将所讨论的陀螺系统视为 n 个自由度的动力学系统, 以广义坐标 $q_j(j=1,2,\cdots,n)$ 表示系统的位形, 与相应的广义速度 $\dot{q}_j(j=1,2,\cdots,n)$ 表示系统的运动状态. 系统的动能 T 可用广义坐标和广义速度表示为

$$T=T_0+T_1+T_2 \tag{3.4.1}$$

其中 T_0,T_1,T_2 分别为广义速度 $\dot{q}_j(j=1,2,\cdots,n)$ 的零次、一次和二次齐次式

$$T_0=\frac{1}{2}a_0,\quad T_1=\sum_{j=1}^{n}a_j\dot{q}_j,\quad T_2=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k \tag{3.4.2}$$

系数 a_0,a_j,a_{jk} 均为广义坐标 $q_j(j=1,2,\cdots,n)$ 和 t 的函数. 设 $Q_j(j=1,2,\cdots,n)$ 为各广义坐标对应的广义力, 则完整系统动力学方程的普遍形式为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j\quad(j=1,2,\cdots,n) \tag{3.4.3}$$

即**拉格朗日方程**. 利用式 (3.4.1),(3.4.2), 将拉格朗日方程展开为以广义坐标 $q_j(j=1,2,\cdots,n)$ 为未知变量的 $2n$ 阶微分方程

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n}a_{ji}\ddot{q}_j+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial a_{ji}}{\partial q_k}-\frac{1}{2}\frac{\partial a_{jk}}{\partial q_i}\right)\dot{q}_j\dot{q}_k+\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial a_i}{\partial q_j}-\frac{\partial a_j}{\partial q_i}\right)\dot{q}_j\\&+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial a_{ji}}{\partial t}\dot{q}_j+\frac{\partial a_i}{\partial t}-\frac{1}{2}\frac{\partial a_0}{\partial q_i}=Q_i\quad(i=1,2,\cdots,n)\end{aligned} \tag{3.4.4}$$

将其中第三项增加负号, 称为**陀螺力**, 是与旋转运动引起的科氏惯性力有关的广义速度的一次式, 记作 Q_{gi}

$$Q_{\mathrm{gi}}=-\sum_{j=1}^{n}g_{ij}\dot{q}_j,\quad g_{ij}=\frac{\partial a_i}{\partial q_j}-\frac{\partial a_j}{\partial q_i} \tag{3.4.5}$$

系数 $g_{ij}\,(i,j=1,\cdots,f)$ 具有反对称性, 即

$$g_{ij}=-g_{ji}\ ,\quad g_{ii}=0\quad(i,j=1,2,\cdots,n) \tag{3.4.6}$$

陀螺力的特殊性在于它所做功的总功率为零

$$\sum_{i=1}^{n} Q_{gi}\dot{q}_i = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j = 0 \tag{3.4.7}$$

以 $g_{ij}\,(i,j=1,\cdots,f)$ 为元素组成的矩阵 $\boldsymbol{G}=(g_{ij})$ 为反对称矩阵, 即**陀螺力矩阵**.

3.4.2 拉格朗日方程的初积分

设保守系统中的广义力存在势能 V, 以 $-\partial V/\partial q_j$ 表示有势的广义力, 拉格朗日方程 (3.4.3) 写作

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (j=1,2,\cdots,n) \tag{3.4.8}$$

其中 $L=T-V$ 为**拉格朗日函数**. 如系统中还存在非保守力, 则上式右边应增加 Q_j 表示的非保守广义力.

保守系统的拉格朗日方程在某些情况下存在初积分. 如拉格朗日函数 L 或动能 T 不显含某个坐标 q_j, 不显含的这个坐标称为**循环坐标**. 对应的广义速度 $\dot{q}_j$ 称为**循环速度**. 由于 $\partial L/\partial q_j=0$, 从拉格朗日方程 (3.4.8) 导出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) = 0 \tag{3.4.9}$$

积分得到

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = C_j \tag{3.4.10}$$

此初积分称为**循环积分**, 对应的坐标称为**循环坐标**. 由于 $\partial T/\partial \dot{q}_j$ 具有动量或动量矩量纲而称为**广义动量**, 因此循环积分的物理意义为：与循环坐标对应的广义动量守恒, 可称作**广义动量积分**.

设拉格朗日函数 L 不显含时间 t, 则 L 对 t 的全导数为

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j\right) \tag{3.4.11}$$

将拉格朗日方程 (3.4.8) 中的每个方程乘以相应的 $\dot{q}_j$ 后相加, 得到

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\dot{q}_j\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \dot{q}_j\frac{\partial L}{\partial q_j}\right] = 0 \tag{3.4.12}$$

将式 (3.4.11), (3.4.12) 相加, 得到

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{n}\left[\dot{q}_j\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) + \ddot{q}_j\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right] = \sum_{j=1}^{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{q}_j\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) \tag{3.4.13}$$

交换求导和求和的次序并移项, 得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{j=1}^{n}\dot{q}_j\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}-L\right)=0 \tag{3.4.14}$$

从式 (3.4.14) 导出初积分

$$\sum_{j=1}^{n}\dot{q}_j\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}-L=常数 \tag{3.4.15}$$

上式左边定义的函数称为**哈密顿函数**, 记作 $\mathscr{H}$

$$\mathscr{H}=\sum_{j=1}^{n}\dot{q}_j\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}-L \tag{3.4.16}$$

初积分 (3.4.15) 即哈密顿函数 $\mathscr{H}$ 守恒. 将式 (3.4.1),(3.4.2) 代入式 (3.4.15), 利用欧拉齐次函数定理可将 $\mathscr{H}$ 表示为

$$\mathscr{H}=T_2-T_0+V \tag{3.4.17}$$

对于定常约束的特殊情形, $T_0=T_1=0,\ \ T_2\ =T$, 上式化作

$$\mathscr{H}=T+V \tag{3.4.18}$$

则初积分 (3.4.15) 的物理意义为保守系统的机械能守恒, 称为**能量积分**. 在非定常约束条件下, 可将哈密顿函数 $\mathscr{H}$ 视为系统的**广义能量**, 式 (3.4.17) 可写作与式 (3.4.20) 相仿的形式

$$\mathscr{H}=T_2+V^* \tag{3.4.19}$$

一般情况下的初积分 (3.4.15) 称为**广义能量积分或雅可比积分**. 对于相对匀速转动坐标系运动的系统, T_2 为系统相对动参考系的**相对动能**, V^* 为系统在转动参考系内的**相对势能**, 由主动力势能 V 和坐标系转动产生的离心力场势能 $-T_0$ 两项组成

$$V^*=V-T_0 \tag{3.4.20}$$

因此关于雅可比积分 (3.4.19) 的物理意义可理解为: 系统相对动参考系运动时的相对动能与相对势能之和守恒.

3.4.3 哈密顿正则方程

将上节定义的广义动量记作 $p_j(j=1,2,\cdots,n)$

$$p_j=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\quad (j=1,2,\cdots,n) \tag{3.4.21}$$

广义坐标和广义动量的集合 $q_j, p_j (j=1,2,\cdots,n)$ 称为系统的**正则变量**. 系统每个时刻的运动状态由正则变量完全确定. 将式 (3.4.1),(3.4.2) 代入后, 广义动量 (3.4.19) 为广义速度 $\dot{q}_j (j=1,2,\cdots,n)$ 的线性函数

$$p_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\dot{q}_j + a_i \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{3.4.22}$$

其中系数 a_{ij} $(i,j=1,\cdots,n)$ 与式 (3.4.2) 中动能 T_2 公式的系数相同. 动能的物理性质决定了 T_2 必须为广义速度的正定函数, 则线性代数方程 (3.4.22) 可解出

$$\dot{q}_j = \tilde{\dot{q}}_j(q,p,t) \quad (j=1,2,\cdots,n) \tag{3.4.23}$$

其中以 q,p 表示 $q_j, p_j (j=1,2,\cdots,n)$ 共 $2n$ 个变量的组合. 将式 (3.4.23) 代入式 (3.4.16), 使哈密顿函数以正则变量 $q_j, p_j (j=1,2,\cdots,n)$ 为自变量, 写作

$$\mathscr{H}(q,p,t) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\dot{q}}_i p_i - L(q,\tilde{\dot{q}},t) \tag{3.4.24}$$

将 $\mathscr{H}(q,p,t)$ 对 q_j 求偏导数, 利用式 (3.4.21) 和拉格朗日方程 (3.4.9) 化作

$$\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{n}\left(p_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\frac{\partial \tilde{\dot{q}}_i}{\partial q_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = -\frac{\partial L}{\partial q_j} = -\dot{p}_j \tag{3.4.25}$$

再将 $\mathscr{H}(q,p,t)$ 对 p_j 求偏导数, 得到

$$\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p_j} = \dot{q}_j + \sum_{i=1}^{n}\left(p_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\frac{\partial \tilde{\dot{q}}_i}{\partial p_j} = \dot{q}_j \tag{3.4.26}$$

式 (3.4.25) 和 (3.4.26) 组成正则变量的一阶微分方程组, 称为**哈密顿正则方程**

$$\dot{q}_j = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p_j} \quad (j=1,\cdots,n) \tag{3.4.27a}$$

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial q_j} \quad (j=1,\cdots,n) \tag{3.4.27b}$$

与拉格朗日方程相比, 哈密顿正则方程是具有对耦形式的一阶方程组, 有利于数值积分. 哈密顿正则方程也是第 13 章讨论陀螺混沌运动时采用的数学模型.

3.4.4 劳斯方程

利用 3.4.2 节叙述的循环积分可使动力学微分方程降阶. 设拉格朗日方程存在 m 个循环积分 $(m \leqslant n)$, 对应于 m 个循环坐标

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = C_j \quad (j=1,2,\cdots,m) \tag{3.4.28}$$

m 个循环积分组成 $\dot{q}_j$ 的线性方程组, 可解出 m 个循环速度 $\dot{q}_j\,(j=1,\cdots,m)$ 为其余 $n-m$ 个非循环速度 $\dot{q}_i\,(i=m+1,\cdots,n)$ 的确定函数

$$\dot{q}_j=\tilde{\dot{q}}_j\,(q_{m+1},\cdots,q_n,\dot{q}_{m+1},\cdots\dot{q}_n,C_1,\cdots,C_m,t)\qquad(j=1,\cdots,m)\tag{3.4.29}$$

利用上式消去动能 T 中的循环速度 $\dot{q}_j\,(j=1,\cdots,m)$, 得到由非循环坐标 q_i 及其导数 $\dot{q}_i\,(i=m+1,\cdots,n)$、积分常数 $C_j\,(j=1,\cdots,m)$ 和时间 t 表示的动能函数, 记作 $\tilde{T}$

$$T=\tilde{T}\left(q_{m+1},\cdots,q_f,\tilde{\dot{q}}_1,\cdots,\tilde{\dot{q}}_m,\dot{q}_{m+1},\cdots,\dot{q}_f,C_1,\cdots,C_m,t\right)\tag{3.4.30}$$

计算 $\tilde{T}$ 对非循环坐标 q_i 和非循环速度 $\dot{q}_i\,(i=m+1,\cdots,n)$ 的复合导数, 化作

$$\begin{aligned}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial q_i}&=\frac{\partial T}{\partial q_i}+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}\frac{\partial\tilde{\dot{q}}_j}{\partial q_i}=\frac{\partial T}{\partial q_i}+\sum_{j=1}^{m}C_j\frac{\partial\tilde{\dot{q}}_j}{\partial q_i}\\\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\dot{q}_i}&=\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}\frac{\partial\tilde{\dot{q}}_j}{\partial\dot{q}_i}=\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}+\sum_{j=1}^{m}C_j\frac{\partial\tilde{\dot{q}}_j}{\partial\dot{q}_i}\end{aligned}\tag{3.4.31}$$

导出

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial q_i}&=\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\tilde{T}-\sum_{j=1}^{m}C_j\tilde{\dot{q}}_j\right)=\frac{\partial R}{\partial q_i}\\\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}&=\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}\left(\tilde{T}-\sum_{j=1}^{m}C_j\tilde{\dot{q}}_j\right)=\frac{\partial R}{\partial\dot{q}_i}\end{aligned}\right.\qquad(i=m+1,\cdots,n)\tag{3.4.32}$$

其中函数 R 为非循环坐标 q_i 及其导数的函数, 称为**劳斯** (E. J. Routh)**函数**[①]

$$R=\tilde{T}-\sum_{j=1}^{m}C_j\tilde{\dot{q}}_j\tag{3.4.33}$$

利用关系式 (3.4.32), 将拉格朗日方程 (3.4.3) 中的动能函数 T 置换为劳斯函数 R, 得到 $n-m$ 个独立的方程组, 称为**劳斯方程**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial R}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial R}{\partial q_i}=Q_i\quad(i=m+1,\cdots,n)\tag{3.4.34}$$

劳斯方程 (3.4.34) 完全确定非循环坐标 $q_i\,(i=m+1,\cdots,f)$ 的变化规律, 使动力学微分方程的阶数从 $2n$ 阶降为 $2\,(n-m)$ 阶.

---

①分析力学著作中通常将劳斯函数定义为 $R=\tilde{L}-\sum\limits_{j=1}^{m}C_j\tilde{\dot{q}}_j$, $\tilde{L}=\tilde{T}-V$. 此处将劳斯函数定义中的 $\tilde{L}$ 改为 $\tilde{T}$, 则所构成的劳斯方程不受系统保守性限制而更具普遍性, 更适合对陀螺系统具体问题的应用.

3.5　多陀螺系统的动力学方程

3.5.1　框架陀螺的正则方程

应用上述分析力学方法列写框架陀螺的动力学方程. 取卡尔丹角为广义坐标, 对应的力矩分量为广义力

$$\begin{aligned} &q_1=\alpha, \quad q_2=\beta, \quad q_3=\varphi \\ &Q_1=M_x, \ Q_2=M_y, \ Q_3=M_z \end{aligned} \tag{3.5.1}$$

根据式 (2.2.14) 列写陀螺各部件的动能, 其中的内环角速度投影 ω_x, ω_y, ω_z 以式 (3.2.5) 代入, 相加为陀螺的总动能 T

$$T=\frac{1}{2}\left[A(\beta)\dot{\alpha}^2+B\dot{\beta}^2+C_{\mathrm{R}}(\dot{\varphi}+\dot{\alpha}\sin\beta)^2\right] \tag{3.5.2}$$

其中 $A(\beta)$ 和 B 的定义见式 (3.2.15). 由于动能式 (3.5.2) 中不含变量 φ, 存在相应的循环积分. 在理想约束情形为

$$p_\varphi=\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}=C_{\mathrm{R}}(\dot{\varphi}+\dot{\alpha}\sin\beta)=H_0 \tag{3.5.3}$$

根据 3.2.2 节的分析, 轴对称转子稳态运动时即存在此初积分, 而不受系统的作用力是否具有保守性的限制. 将式 (3.5.1),(3.5.2) 代入拉格朗日方程 (3.4.3), 考虑循环积分 (3.5.3), 即导出与式 (3.2.14) 一致的框架陀螺动力学方程组.

除 p_φ 以外, 系统的另两个广义动量为

$$\begin{aligned} p_\alpha&=\frac{\partial T}{\partial\dot{\alpha}}=A(\beta)\dot{\alpha}+C_{\mathrm{R}}(\dot{\varphi}+\dot{\alpha}\sin\beta)\sin\beta \\ p_\beta&=\frac{\partial T}{\partial\dot{\beta}}=B\dot{\beta} \end{aligned} \tag{3.5.4}$$

从式 (3.5.3),(3.5.4) 解出

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}&=\frac{1}{A(\beta)}(p_\alpha-H_0\sin\beta) \\ \dot{\beta}&=\frac{p_\beta}{B} \end{aligned} \tag{3.5.5}$$

静止基座上的框架陀螺属于定常约束, 式 (3.4.18) 表明, 哈密顿函数等于动能与势能之和. 将式 (3.5.5) 代入式 (3.5.2), 与势能 V 相加, 得到用广义坐标和广义动量表示的哈密顿函数 $\mathscr{H}$

$$\mathscr{H}=\frac{1}{2}\left[\frac{(p_\alpha-H_0\sin\beta)^2}{A(\beta)}+\frac{p_\beta^2}{B}+\frac{H_0^2}{C_{\mathrm{R}}}\right]+V(\alpha,\beta) \tag{3.5.6}$$

代入方程组 (3.4.27), 列出哈密顿正则方程形式的陀螺动力学方程

$$
\begin{aligned}
\dot{\alpha} &= \frac{p_\alpha - H_0 \sin\beta}{A(\beta)} \\
\dot{p}_\alpha &= -\frac{\partial V}{\partial \alpha} \\
\dot{\beta} &= \frac{p_\beta}{B} \\
\dot{p}_\beta &= \frac{(p_\alpha - H_0 \sin\beta)\left[A(\beta) H_0 \cos\beta - A'(\beta)\right]}{A^2(\beta)}
\end{aligned}
\tag{3.5.7}
$$

将正则方程中的广义动量转换为广义速度, 即得到与方程组 (3.2.14) 相同的结果. 对于势能 V 不含 α 的特殊情形, 外环转角 α 为另一个循环坐标.

3.5.2　框架陀螺的劳斯方程

循环积分式 (3.5.3) 可用于构成劳斯方程以减少未知变量的个数. 对于单个陀螺情形, 令 $n=3$, $m=1$, 按式 (3.4.33) 的定义, 劳斯函数 R 为

$$R = \tilde{T} - H_0\dot{\varphi} \tag{3.5.8}$$

利用式 (3.5.3) 消去动能式 (3.5.2) 中的循环速度 $\dot{\varphi}$, 代入上式略去常数项, 得到

$$R = \frac{1}{2}\left\{\left[A_0 + C_1 + (A_1 + A_{\mathrm{R}} - C_1)\cos^2\beta\right]\dot{\alpha}^2 + (B_1 + A_{\mathrm{R}})\dot{\beta}^2 + 2H_0\dot{\alpha}\sin\beta\right\} \tag{3.5.9}$$

代入劳斯方程 (3.4.34), 即得到广义坐标数减少为 2 的陀螺稳态运动方程组 (3.2.14). 在恒速约束情形, 令 $\dot{\varphi} = H_0/C_{\mathrm{R}}$, 劳斯函数为

$$
\begin{aligned}
R = \frac{1}{2}\{&[A_0 + C_1 + (A_1 + A_{\mathrm{R}} - C_1)\cos^2\beta + C_{\mathrm{R}}\sin^2\beta]\dot{\alpha}^2 \\
&+ (B_1 + A_{\mathrm{R}})\dot{\beta}^2 + 2H_0\dot{\alpha}\sin\beta\}
\end{aligned}
\tag{3.5.10}
$$

代入劳斯方程 (3.4.34), 得到恒速约束的陀螺稳态运动方程组. 对于 $\beta_0 = 0$ 的小偏角情形, 在劳斯函数 R 的表示式中仅须保留 α, β 及其导数的二次项, 即直接导出线性化的动力学方程组 (3.2.20).

如动量矩常数 H_0 足够大, 在式 (3.5.8) 或 (3.5.9) 中略去不含 H_0 的项和常数项, 劳斯函数简化为

$$R = H_0\dot{\alpha}\sin\beta \tag{3.5.11}$$

则进动方程的推导可极大简化. 定义**简化劳斯函数**R^* 为动量矩常数 H_0 与内环角速度沿极轴的投影 $\omega_z = \dot{\alpha}\sin\beta$ 的乘积

$$R^* = H_0\omega_z \tag{3.5.12}$$

设 $\beta_0=0$, 只保留二阶微量, 化作

$$R^*=H_0\dot{\alpha}\beta \tag{3.5.13}$$

将劳斯方程 (3.4.34) 中的 R 改为 R^*, 称为**简化劳斯方程**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial R^*}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial R^*}{\partial q_i}=Q_i \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{3.5.14}$$

将式 (3.5.13) 代入后, 即直接得到进动方程 (3.2.25). 两种不同约束条件对应的简化劳斯函数 R^* 及由此导出的进动方程在形式上完全相同, 只是 H_0 的定义有所区别.

对于基座转动情形, 只须将 ω_z 换成 $\omega_z+\Omega_z$, Ω_z 为基座牵连角速度沿极轴的投影, 如 (3.3.2c) 所示. $\beta_0=0$ 时只保留二阶微量, 劳斯函数为

$$R^*=H\left[(\dot{\alpha}+\Omega_\xi)\beta-\Omega_\eta\alpha+\Omega_\zeta\left(1-\frac{\alpha^2}{2}-\frac{\beta^2}{2}\right)\right] \tag{3.5.15}$$

将上式代入简化劳斯方程 (3.5.14), 即得到转动基座上的陀螺进动方程 (3.3.5).

3.5.3　双陀螺系统动力学方程

利用简化劳斯方程建立由多个陀螺仪组成的复杂系统尤能显示出优越性. 设多陀螺系统由 n 个陀螺 G_j $(j=1,2,\cdots,n)$ 组成, H_{j0},ω_{jz} 分别为 G_i 的动量矩常数及内环沿极轴的角速度投影, 系统的简化劳斯函数定义为

$$R^*=\sum_{j=1}^{n}H_{j0}\omega_{jz} \tag{3.5.16}$$

先讨论 $n=2$ 的双陀螺系统, 它由球形壳体和装在球壳内的两只单自由度陀螺 G_j $(j=1,2)$ 共 5 个刚体组成. 球体悬浮在比重接近的液体内, 以浮心 O 为支点可绕任意轴自由转动, 相当于三环陀螺中用无质量的外环和中环支承起来的内环. 设 $(O-xyz)$ 为固结于球体的参考坐标系; $(O-x_jy_jz_j)$ $(j=1,2)$ 为固结于各陀螺 G_j 框架的主轴坐标系, 其中 x_j 为框架转轴, 均与 x 轴平行, z_j 为转子极轴①. 由于联杆机构的运动学约束作用, 两只陀螺框架在球壳内只能作方向相反、角度相等的转动, 极轴 z_1,z_2 与 z 轴有相同的夹角 ε (见图 3.9). 设两只陀螺有相同的动量矩常数 H_0, 其动量矩合矢量沿 z 轴方向. 定义 α,β,γ 为球体相对基座的角度坐标, 则球体的瞬时角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 在 $(O-xyz)$ 轴系中的投影 ω_x, ω_y, ω_z 与三环陀螺的内环角速度投影 (3.2.29) 完全相同

$$\omega_x=\dot{\alpha}\cos\beta,\quad \omega_y=\dot{\beta},\quad \omega_z=\dot{\alpha}\sin\beta+\dot{\gamma} \tag{3.5.17}$$

① 此处 $(O-x_jy_jz_j)$ 各坐标轴的下标 j 表示多陀螺系统中的陀螺标号, 不同于 3.2.1 节中以 i=1,2 表示单个陀螺的外环和内环.

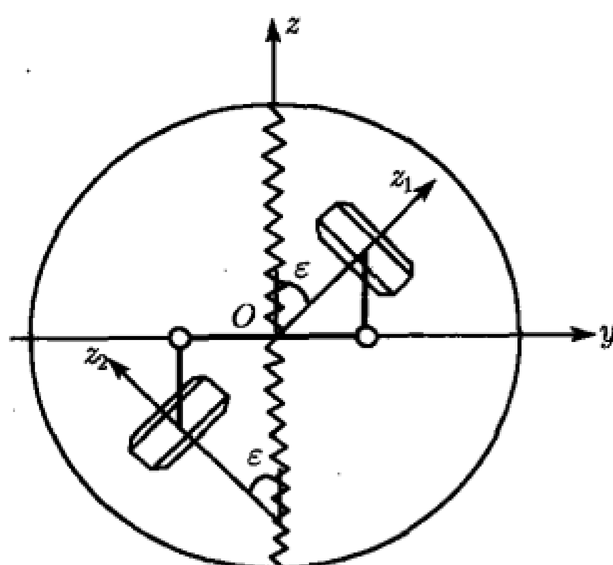


图 3.9　双陀螺系统

计算 $\boldsymbol{\omega}$ 相对 z_j 轴的投影 $\omega_{jz}\,(j=1,2)$.

$$\omega_{1z}=\omega_y\sin\varepsilon+\omega_z\cos\varepsilon,\ \ \omega_{2z}=-\omega_y\sin\varepsilon+\omega_z\cos\varepsilon \tag{3.5.18}$$

将上式代入简化劳斯函数 (3.5.12), 得到

$$R^*=2H_0\omega_z\cos\varepsilon \tag{3.5.19}$$

基座绕 O 点转动时, 上式中的 ω_z 必须换成 $\omega_z+\Omega_z$. 只保留二阶微量, 将式 (3.3.2c) 表示的 Ω_z 代入, 得到

$$R^*=2H_0\cos\varepsilon\left[\dot\gamma+(\dot\alpha+\Omega_\xi)\beta-\Omega_\eta\alpha+\Omega_\zeta\left(1-\frac{\alpha^2}{2}-\frac{\beta^2}{2}\right)\right] \tag{3.5.20}$$

定义以下广义坐标和广义力

$$\begin{aligned}&q_1=\alpha,\quad\ \ q_2=\beta,\quad\ \ q_3=\gamma,\quad\ \ q_4=\varepsilon\\&Q_1=M_x,\ \ Q_2=M_y,\ \ Q_3=M_z,\ \ Q_4=M_\varepsilon\end{aligned} \tag{3.5.21}$$

其中 M_x,M_y,M_z 为作用于球体的力矩沿 $(O-xyz)$ 轴系的投影, M_ε 为球体通过弹簧作用于两只陀螺框架的绕 x 轴的大小相等、方向相反的一对内力矩. 将式 (3.5.20) 代入简化劳斯方程 (3.5.14), 只保留除 ε 以外的全部广义坐标和速率的一次项, 得到双陀螺系统的进动方程组

$$\dot\alpha-\Omega_\zeta\beta=-\Omega_\xi-\frac{M_y}{2H_0\cos\varepsilon} \tag{3.5.22a}$$

$$\dot\beta+\Omega_\zeta\alpha=-\Omega_\eta+\frac{M_x}{2H_0\cos\varepsilon} \tag{3.5.22b}$$

$$\dot\gamma-\Omega_\eta\alpha+\Omega_\xi\beta=-\Omega_\zeta+\frac{M_\varepsilon}{2H_0\sin\varepsilon} \tag{3.5.22c}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2H_0\cos\varepsilon) = M_z \tag{3.5.22d}$$

设 ε 在 ε_0 附近小范围内变动, ε_0 为联杆居中时的 ε 值

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \delta \tag{3.5.23}$$

定义常数 H_1, H_2 为

$$H_1 = 2H_0\cos\varepsilon_0, \quad H_2 = 2H_0\sin\varepsilon_0 \tag{3.5.24}$$

将式 (3.5.23) 代入方程组 (3.5.22), 只保留 δ 的一阶微量, 简化为

$$\dot{\alpha} - \Omega_\zeta\beta = -\Omega_\xi - \frac{M_y}{H_1} \tag{3.5.25a}$$

$$\dot{\beta} + \Omega_\zeta\alpha = -\Omega_\eta + \frac{M_x}{H_1} \tag{3.5.25b}$$

$$\dot{\gamma} - \Omega_\eta\alpha + \Omega_\xi\beta = -\Omega_\zeta + \frac{M_\varepsilon}{H_2} \tag{3.5.25c}$$

$$\dot{\delta} = -\frac{M_z}{H_2} \tag{3.5.25d}$$

基座平动时, 各力矩项中还应包含牵连惯性力矩.

3.5.4　四陀螺系统动力学方程

讨论 $n = 4$ 的**四陀螺系统**, 它由万向支架的内、外环以及装在内环上的 4 只单自由度陀螺 G_j $(j = 1,2,3,4)$ 共 10 个刚体组成. 设各陀螺 G_j 的支架坐标系为 $(O - x_jy_jz_j)$　$(j = 1,2,3,4)$, z_j 轴为转子极轴, $\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2$ 的支架转轴 x_1, x_2; $\mathrm{G}_3, \mathrm{G}_4$ 的支架转轴 y_3, y_4 均与 z 轴平行. G_1 与 G_2 的支架之间、G_3 与 G_4 的支架之间分别受到联杆的运动学约束, 它们只能相对内环作方向相反、角度相等的转动. 联杆居中时 z_1 和 z_2 轴分别沿 y 轴的正向和负向, z_3 和 z_4 轴分别沿 x 轴的正向和负向 (见图 3.10). 设 α, β 为外环和内环的转角, γ 为 z_1, z_2 轴偏离 y 轴的转角, δ 为 z_3, z_4 轴偏离 x 轴的转角. 各陀螺极轴 z_j $(j = 1,2,3,4)$ 相对 $(O - xyz)$ 轴系的方向余弦在表 3.5 内列出.

设 $\boldsymbol{\omega}$ 为内环角速度, 考虑基座牵连转动时 $\boldsymbol{\omega}$ 沿 $(O - xyz)$ 的分量 ω_x, ω_y, ω_z 与式 (3.3.3) 相同

$$\omega_x = \dot{\alpha} + \Omega_x, \quad \omega_y = \dot{\beta} + \Omega_y, \quad \omega_z = \Omega_z \tag{3.5.26}$$

各陀螺支架的角速度 $\boldsymbol{\omega}_i$ $(i = 1,2,3,4)$ 为

$$\boldsymbol{\omega}_{1,2} = \boldsymbol{\omega} \pm \dot{\gamma}\boldsymbol{k} \tag{3.5.27a}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{3,4} = \boldsymbol{\omega} \pm \dot{\delta}\boldsymbol{k} \tag{3.5.27b}$$

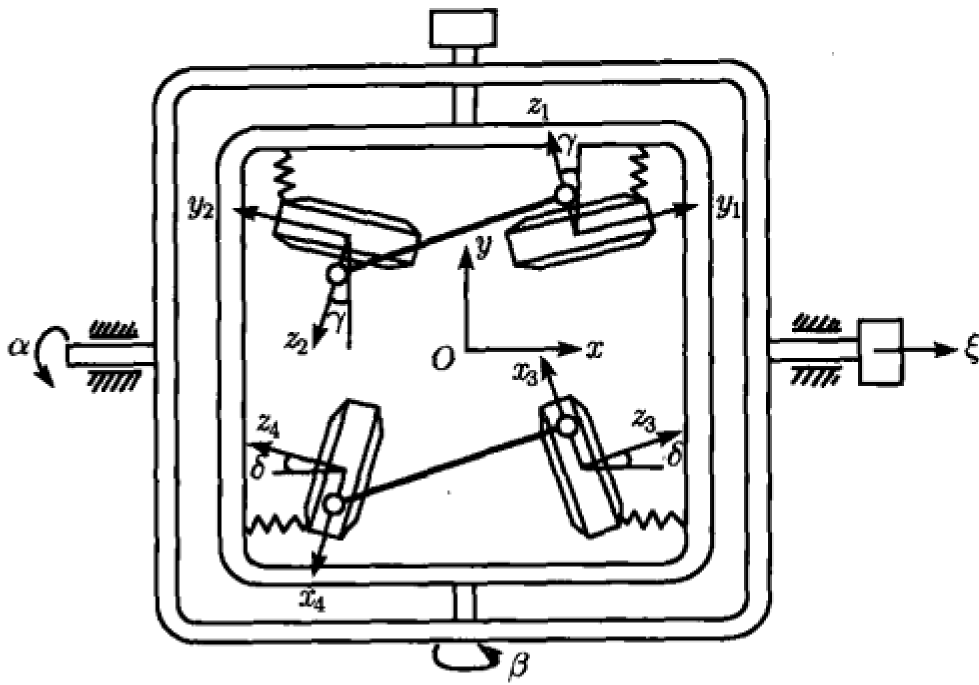


图 3.10　四陀螺系统

表 3.5

	z_1	z_2	z_3	z_4
x	$-\sin\gamma$	$-\sin\gamma$	$\cos\delta$	$-\cos\delta$
y	$\cos\gamma$	$-\cos\gamma$	$\sin\delta$	$\sin\delta$
z	0	0	0	0

利用表 3.5 计算 $\boldsymbol{\omega}_j$ 对各自极轴 z_j 的投影 $\omega_{jz}\,(i=1,2,3,4)$ 只保留 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 的二次项, 得到

$$\omega_{1z}=\dot{\beta}-(\dot{\alpha}+\Omega_\xi)+\Omega_\eta\left(1-\frac{\gamma^2}{2}\right)+\Omega_\zeta\,(\alpha+\beta\gamma) \tag{3.5.28a}$$

$$\omega_{2z}=-\dot{\beta}-(\dot{\alpha}+\Omega_\xi)-\Omega_\eta\left(1-\frac{\gamma^2}{2}\right)-\Omega_\zeta\,(\alpha-\beta\gamma) \tag{3.5.28b}$$

$$\omega_{3z}=\dot{\alpha}+\dot{\beta}\delta+\Omega_\xi\left(1-\frac{\delta^2}{2}\right)+\Omega_\eta\delta-\Omega_\zeta\,(\beta-\alpha\gamma) \tag{3.5.28c}$$

$$\omega_{4z}=-\dot{\alpha}+\dot{\beta}\delta-\Omega_\xi\left(1-\frac{\delta^2}{2}\right)+\Omega_\eta\delta+\Omega_\zeta\,(\beta+\alpha\gamma) \tag{3.5.28d}$$

设各陀螺有相同的动量矩常数 H_0, 将上式代入简化劳斯函数 (3.5.16), 得到

$$R^*=2H_0\left[\dot{\beta}\delta-(\dot{\alpha}+\Omega_\xi)\,\gamma+\Omega_\eta\delta+\Omega_\zeta\,(\alpha\delta+\beta\gamma)\right] \tag{3.5.29}$$

定义广义坐标和广义力为

$$\begin{aligned}&q_1=\alpha,\quad\ \ q_2=\beta,\quad\ \ q_3=\gamma,\quad\ \ q_4=\delta\\&Q_1=M_x,\ \ Q_2=M_y,\ \ Q_3=M_\gamma,\ \ Q_4=M_\delta\end{aligned} \tag{3.5.30}$$

其中 M_x, M_y 分别为外环组合体和内环组合体上作用的绕各自转动轴的力矩, M_γ 为内环通过弹簧作用于 G_1, G_2 框架的绕 z 轴的大小相等、方向相反的一对内力矩, M_δ 为内环作用于 G_3, G_4 框架的另一对内力矩. 将式 (3.5.29) 代入简化劳斯方程 (3.5.14), 略去 H_0 的下标, 得到四陀螺系统的进动方程组

$$\dot{\alpha} - \Omega_\zeta \beta = -\Omega_\xi + \frac{M_\gamma}{H} \tag{3.5.31a}$$

$$\dot{\beta} + \Omega_\zeta \alpha = -\Omega_\eta - \frac{M_\delta}{H} \tag{3.5.31b}$$

$$\dot{\gamma} + \Omega_\zeta \delta = -\frac{M_x}{H} \tag{3.5.31c}$$

$$\dot{\delta} - \Omega_\zeta \gamma = \frac{M_y}{H} \tag{3.5.31d}$$

第 7 章中分析四陀螺稳定器时, 需要保留二阶导数的陀螺动力学方程, 为此必须写出系统 G 的未经简化的劳斯函数. 设基座静止, 只保留二阶微量, 四陀螺系统的总动能为

$$T = \frac{1}{2}\left[A_1\dot{\alpha}^2 + A_2\dot{\beta}^2 + B_1\dot{\gamma}^2 + B_2\dot{\delta}^2 + \sum_{j=1}^{4} C_j\left(\omega_{jz} + \dot{\varphi}_j\right)^2\right] \tag{3.5.32}$$

其中 A_1, A_2 分别为外环组合体和内环组合体相对各自转动轴的惯性矩, B_1, B_2 分别为陀螺 $\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2$ 的框架组合体和 $\mathrm{G}_3, \mathrm{G}_4$ 的框架组合体相对各自转动轴的惯性矩, $C_j, \dot{\varphi}_j$ 为 G_j 的转子极惯性矩和自转角速度, ω_{jz} 的定义见 (3.5.27). 对于理想约束情形, 存在循环积分

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_j} = C_j\left(\dot{\varphi}_j + \omega_j\right) = H_{j0} \quad (j = 1, 2, 3, 4) \tag{3.5.33}$$

利用上式消去式 (3.5.32) 中的循环速度 $\dot{\varphi}_j$, 代入未经简化的劳斯函数, 得到

$$R = T - \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_j}\right)\dot{\varphi}_j = R^* + \frac{1}{2}\left(A_1\dot{\alpha}^2 + A_2\dot{\beta}^2 + B_1\dot{\gamma}^2 + B_2\dot{\delta}^2\right) \tag{3.5.34}$$

式中 R^* 为简化劳斯函数 (3.5.29). 将上式代入劳斯方程 (3.4.34), 得到保留二阶导数的四陀螺系统的动力学方程组

$$A_1\ddot{\alpha} - H\dot{\gamma} = M_x \tag{3.5.35a}$$

$$B_1\ddot{\gamma} + H\dot{\alpha} = M_\gamma \tag{3.5.35b}$$

$$A_2\ddot{\beta} + H\dot{\delta} = M_y \tag{3.5.35c}$$

$$B_2\ddot{\delta} - H\dot{\beta} = M_\delta \tag{3.5.35d}$$

第4章　复摆与单自由度陀螺

在重力作用下绕支点可自由摆动且质心与支点不重合的刚体称为复摆. 讨论复摆的运动有助于理解陀螺仪的运动规律. 不仅因为复摆是转子不旋转时框架部件的力学模型, 而且因为单自由度陀螺与复摆有着完全相同的动力学方程. 复摆也作为指示地垂线或量测加速度的元件而成为陀螺指示仪表的组成部分. 1916 年舒勒从理论上证明: 如重力摆的周期等于 84.4 分钟, 则具有不受载体加速度影响而保持与地垂线一致的能力. 虽然实际上舒勒周期在单摆或复摆上均不可能实现, 但它对陀螺摆和陀螺罗经避免干扰问题具有指导意义. 单自由度陀螺是由单个框架和转子组成的陀螺仪, 也是 1851 年傅科在巴黎科学院展示的最早的陀螺仪器. 原则上傅科陀螺可在地球自转产生的陀螺力矩推动下跟踪地球子午面. 但具体实现为指北仪器存在不少困难. 单自由度陀螺附加弹簧和阻尼器可构成速率陀螺或积分陀螺, 用于载体角速度或转角的量测. 也可用于力矩转换构成控制力矩陀螺. 此外, 本章还讨论与框架和转轴的弹性变形有关的更具普遍性的问题, 如转子旋转轴的弯曲振动和临界转速、不等刚度和载体振动引起的陀螺漂移以及考虑框架弹性变形的陀螺固有频率等问题.

4.1　复　　摆

4.1.1　复摆的定性理论

在重力作用下绕支点可自由摆动且质心与支点不重合的刚体称为**复摆**. 如框架陀螺的外环与基座固定, 转子与内环固定, 则内环组合体成为绕内环轴转动的单自由度复摆. 设 ζ 轴沿地垂线向上, 质心 O_c 相对 O 点沿 z 轴向下偏移, O_c 的矢径 $\boldsymbol{l}$ 沿 z 轴的负方向, β 为复摆的偏角 (见图 4.1). 复摆质量为 m 时, 重力对悬挂轴 y 的力矩为

$$M_y = -\mu \sin\beta \tag{4.1.1}$$

参数 μ 为摆重与距离 l 的乘积, 称为**摆性系数**

$$\mu = mgl \tag{4.1.2}$$

忽略地球自转影响, 将式 (4.1.1) 代入式 (3.2.31b), 得到复摆的动力学方程

$$B\ddot{\beta} + \mu \sin\beta = 0 \tag{4.1.3}$$

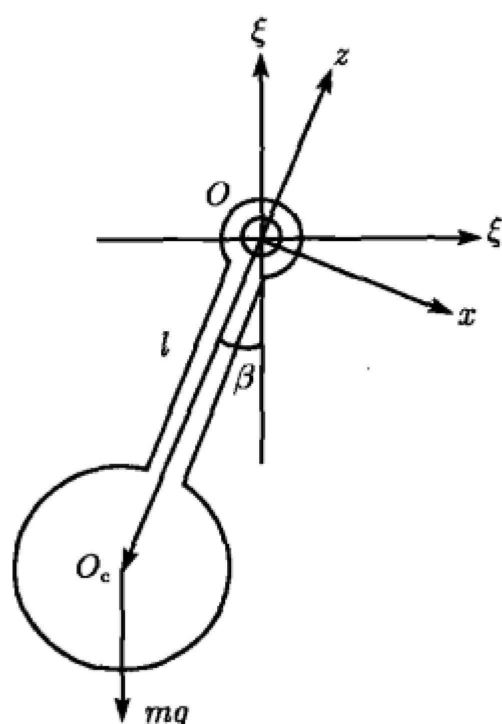


图 4.1　复摆

令 $x=\beta$, $y=\dot{\beta}$, 将方程 (4.1.3) 化作一阶微分方程组

$$\dot{y}=-\left(\frac{\mu}{B}\right)\sin x \tag{4.1.4a}$$

$$\dot{x}=y \tag{4.1.4b}$$

将此二式相除消去时间的微分, 得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\left(\frac{\mu}{B}\right)\frac{\sin x}{y} \tag{4.1.5}$$

x, y 为确定复摆运动状态的**状态变量**, 对应于 (x, y) 平面上的点, 称为**相平面**和**相点**. 方程 (4.1.5) 的解 $x(t), y(t)$ 在相平面上的轨迹称为**相轨迹**. 相轨迹的奇点 $x_s=0$ 或 $\pm\pi$, $y_s=0$ 与复摆的平衡位置相对应, 即复摆的重心与地垂线重合的两个位置. 其中重心在支点下方为下摆, 在支点上方为上摆. 利用附录三的一次近似式 (A.3.6) 判断, $x_s=0$ 为**中心**, $x_s=\pm\pi$ 为**鞍点**. 表明下摆的平衡位置稳定, 上摆的平衡位置不稳定. 方程 (4.1.5) 在 (x, y) 相平面上所确定的相轨迹如图 4.2 所示, 过鞍点的**分隔线**将相平面划分为摆动区和回转区. 复摆的初始角速度小于某临界值时相点在摆动区内, 复摆在地垂线附近做等幅摆动. 大于此临界值时相点进入回转区, 复摆做单方向回转运动.

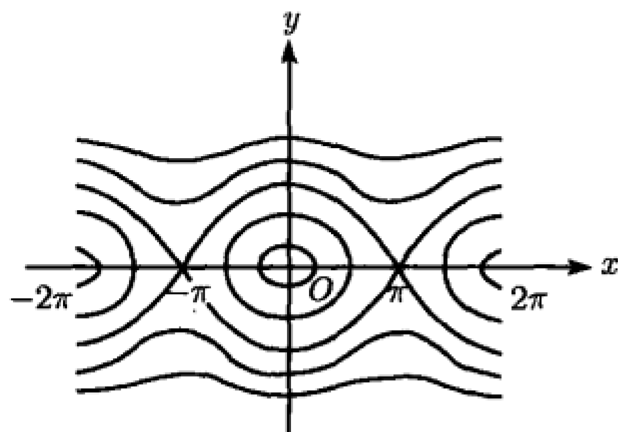


图 4.2　复摆的相轨迹图

如复摆存在黏性阻尼, 阻尼力矩与角速度 $\dot{\beta}$ 成正比, D 为阻尼力矩系数, 则复摆上绕 y 轴的合力矩为

$$M_y=-\mu\sin\beta-D\dot{\beta} \tag{4.1.6}$$

将式 (4.1.6) 代入式 (3.2.31b), 得到有阻尼的复摆动力学方程

$$B\ddot{\beta}+D\dot{\beta}+\mu\sin\beta=0 \tag{4.1.7}$$

也可消去时间变量, 化作

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\left(\frac{\mu}{B}\right)\frac{\sin x + ay}{y} \tag{4.1.8}$$

其中 $a = B/\mu$. 利用表 A.3 判断 $x_s = 0$ 的奇点性质, 可得出: 当 $D < 2\sqrt{B\mu}$ 时, 奇点从中心转变为**稳定焦点**, 复摆做衰减的周期摆动 (图 4.3(a)). $D > 2\sqrt{B\mu}$ 时奇点为**稳定结点**, 复摆做衰减的非周期运动 (图 4.3(b)). 无论焦点或结点, 只要有阻尼存在复摆的运动都逐渐趋于静止, 然后保持与地垂线位置一致.

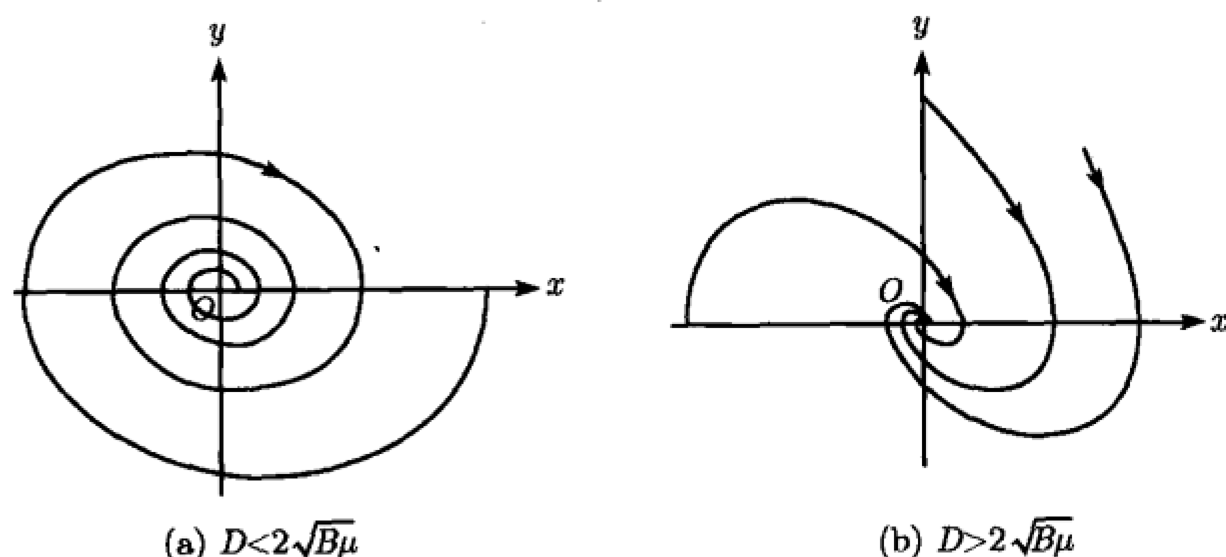


图 4.3　有阻尼复摆的相轨迹图

4.1.2　复摆的微振动

复摆做小偏角摆动时, 只保留方程 (4.1.7) 中 β 的一次项, 简化为线性方程

$$B\ddot{\beta} + D\dot{\beta} + \mu\beta = 0 \tag{4.1.9}$$

或改写为

$$\ddot{\beta} + 2\zeta k\dot{\beta} + k^2\beta = 0 \tag{4.1.10}$$

其中 k 为无阻尼复摆的**固有频率**, ζ 为**阻尼系数**

$$k = \sqrt{\frac{\mu}{B}}, \quad \zeta = \frac{D}{2\sqrt{B\mu}} \tag{4.1.11}$$

根据线性振动理论, 复摆自由振动的性质取决于阻尼系数 ζ, $\zeta = 0$ 时无阻尼复摆做等幅自由振动, 周期为

$$T = \frac{2\pi}{k} \tag{4.1.12}$$

$\zeta < 1$ 时为衰减振动, 周期大于无阻尼情形

$$T = \frac{2\pi}{k\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{4.1.13}$$

$\zeta > 1$ 时复摆做衰减非周期运动. $\zeta = 1$ 为临界情形. 此结论也可从附录三中利用奇点的定性分析中得出.

如复摆上除重力矩和阻尼力矩以外还受到常值力矩 M_0 作用, 则运动方程为

$$B\ddot{\beta} + D\dot{\beta} + \mu\beta = M_0 \tag{4.1.14}$$

β 存在常值特解 β_s, 对应于复摆的静态平衡位置

$$\beta_s = \frac{M_0}{\mu} \tag{4.1.15}$$

方程 (4.1.14) 的一般解是特解 (4.1.15) 与齐次方程 (4.1.9) 的一般解的叠加, 表示复摆在常值偏角 β_s 附近做衰减的周期或非周期运动. 如复摆上受到频率为 ω 的简谐变化力矩 $M_0 \sin \omega t$ 的激励, 动力学方程为

$$\ddot{\beta} + 2\zeta k\dot{\beta} + k^2\beta = k^2\beta_s \sin \omega t \tag{4.1.16}$$

β_s 的定义同式 (4.1.15), 它表示与幅值 M_0 相等的常值力矩作用下复摆的常值偏角.

引入复变量 $z = \alpha + \mathrm{i}\beta$, 方程 (4.1.16) 是以下复数方程的虚数部分

$$\ddot{z} + 2\zeta k\dot{z} + k^2 z = k^2\beta_s \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \tag{4.1.17}$$

根据线性振动理论, 此方程的**受迫振动**特解为

$$z = \sigma\beta_s \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \delta)} \tag{4.1.18}$$

复摆的受迫振动规律由式 (4.1.18) 的虚数部分确定. σ 为受迫振动振幅与 β_s 之比, 称为**放大因子**, δ 为受迫振动与激励力矩之间的**相位差**. 设量纲为一量 $s = \omega/k$ 为激励频率与无阻尼固有频率之比, 则 σ 和 δ 可表示为 s 和 ζ 的函数

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{(1 - s^2)^2 + (2\zeta s)^2}} \tag{4.1.19}$$

$$\delta = \arctan\left(\frac{2\zeta s}{1 - s^2}\right) \tag{4.1.20}$$

图 4.4 和图 4.5 为以 ζ 为参变量的 σ, δ 与 s 之间的函数曲线族, 即复摆受迫振动的幅频曲线族和相频曲线族. 图 4.4 中的虚线表示曲线族的峰值. 根据曲线的几何性质判断, 受迫振动规律具有以下特点:

1) $s \ll 1,\ \ \omega \ll k$

σ 接近于 1, δ 接近于零, β 的变化规律可近似表示为

$$\beta = \frac{M(t)}{\mu} \tag{4.1.21}$$

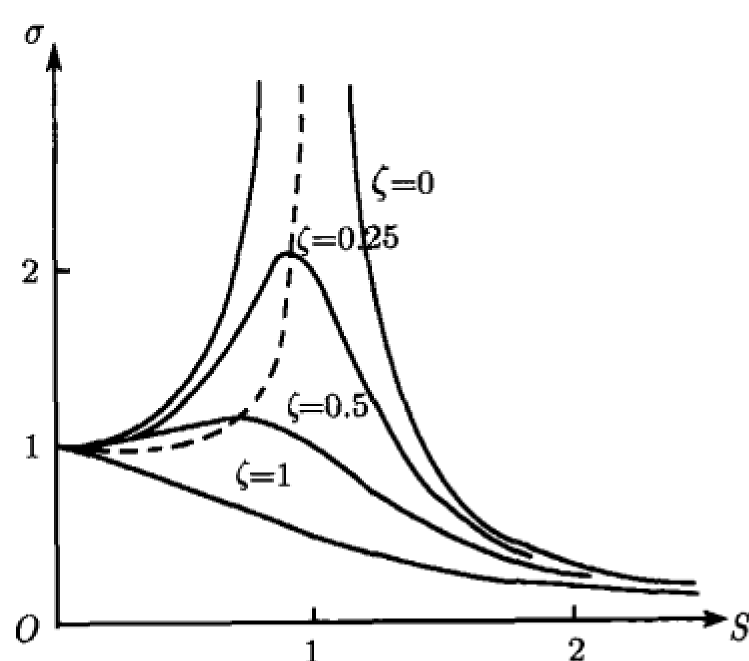


图 4.4　复摆受迫振动的幅频曲线族

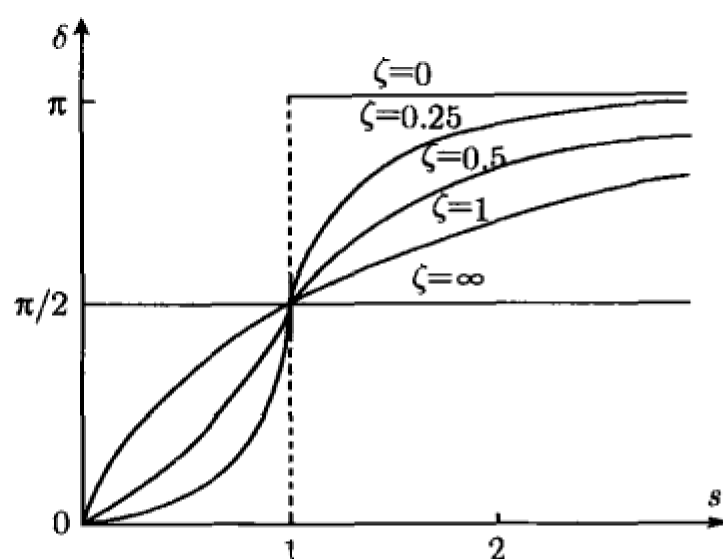


图 4.5　复摆受迫振动的相频曲线族

对比式 (4.1.21) 与式 (4.1.15) 可以看出, 缓慢变化的激励力矩与复摆受迫振动的关系接近于常值力矩与复摆常值偏角的关系. 原因是当复摆缓慢运动时, 与 β 成比例的重力矩远远大于与 β 的一阶和二阶导数成比例的阻尼力矩和惯性力矩, 因而可略去后者使重力矩单独与激励力矩平衡.

2) $s \ll 1,\ \omega \ll k$

σ 急剧增大, δ 接近于 $\pi/2$, 复摆产生谐振现象.

3) $s \gg 1,\ \omega \gg k$

σ 接近于零, δ 接近于 π, 复摆对高频变化的干扰作用无响应. 如激励力矩为高频变化的任意周期函数, 将 $M(t)$ 展成傅里叶级数, 复摆只对其中的零次项产生响应, 受迫振动规律近似为

$$\beta \approx \frac{\langle M \rangle}{\mu} \tag{4.1.22}$$

$\langle M \rangle$ 为傅里叶级数的零次项, 即 $M(t)$ 在一个周期 $T = 2\pi/\omega$ 内的平均值

$$\langle M \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T M(t)\,\mathrm{d}t \tag{4.1.23}$$

4.1.3 运动基座上的复摆

基座运动时复摆运动方程的力矩项中应增加支点加速度引起的牵连惯性力矩 $\boldsymbol{M}_a$. 设 O 点在复摆摆动平面内做任意运动, 加速度 $\boldsymbol{a}$ 对 ξ, ζ 轴的投影为 a_ξ, a_ζ, 比力 $\boldsymbol{f}$ 为

$$\boldsymbol{f} = -a_\xi \boldsymbol{\xi}^0 - (g + a_\zeta)\,\boldsymbol{\zeta}^0 \tag{4.1.24}$$

所引起的重力与牵连惯性力的合力矩为

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{l} \times m\boldsymbol{f} \tag{4.1.25}$$

将 (4.1.24) 和 $\boldsymbol{l} = -l\boldsymbol{k}$ 代入 (4.1.25), 并考虑黏性阻尼作用, 导出复摆绕 y 轴的合力矩

$$M_y = \mu\left[\frac{a_\xi}{g} - \left(1 + \frac{a_\zeta}{g}\right)\beta\right] - D\dot{\beta} \tag{4.1.26}$$

在力矩 (4.1.26) 作用下的复摆动力学方程为

$$\ddot{\beta} + 2\zeta k\dot{\beta} + k^2\left(1 + \frac{a_\zeta}{g}\right)\beta = \frac{k^2 a_\xi}{g} \tag{4.1.27}$$

分别讨论以下几种情形:

1) 支点沿水平轴运动, 速度缓慢变化

设 a_ξ 缓慢变化, $a_\zeta = 0$, 复摆的重力矩与惯性力矩平衡, 利用式 (4.1.21) 导出

$$\beta = \frac{a_\xi}{g} \tag{4.1.28}$$

水平加速度 a_ξ 使复摆的静态位置偏离地垂线. 式 (4.1.28) 表示用复摆指示的视垂线偏离实际垂线的误差角, 它与 a_ξ 成正比, 以 g 的倒数为比例系数. 因此可将复摆用于量测载体的水平加速度.

2) 支点沿水平轴做线振动

设线振动的频率为 ω, 振幅为 b

$$a_\xi = b\omega^2 \sin\omega t, \quad a_\zeta = 0 \tag{4.1.29}$$

代入式 (4.1.27), 得到的方程是以下复数方程的虚数部分

$$\ddot{z} + 2\zeta k\dot{z} + k^2 z = \omega^2 \beta_s e^{i\omega t} \tag{4.1.30}$$

其中 $\beta_s = bk^2/g$ 是与频率为 k 振幅为 b 的线振动所产生的惯性力幅值相等的常值力作用在复摆上所引起的常值偏角. 受迫振动特解与式 (4.1.18) 有类似形式

$$z = \sigma^* \beta_s e^{i(\omega t - \delta)} \tag{4.1.31}$$

相位差 δ 与频率关系与式 (4.1.20) 和图 4. 4 完全相同. 放大因子 σ^* 与频率的关系式改为

$$\sigma^* = \frac{s^2}{\sqrt{(1-s^2)^2 + (2\zeta s)^2}} \tag{4.1.32}$$

以 ζ 为参数的 σ^* 与 s 之间的函数曲线见图 4.6. 与图 4.4 相反, $s \ll 1$ 时 σ^* 接近于零, $s \gg 1$ 时 σ^* 接近于 1.

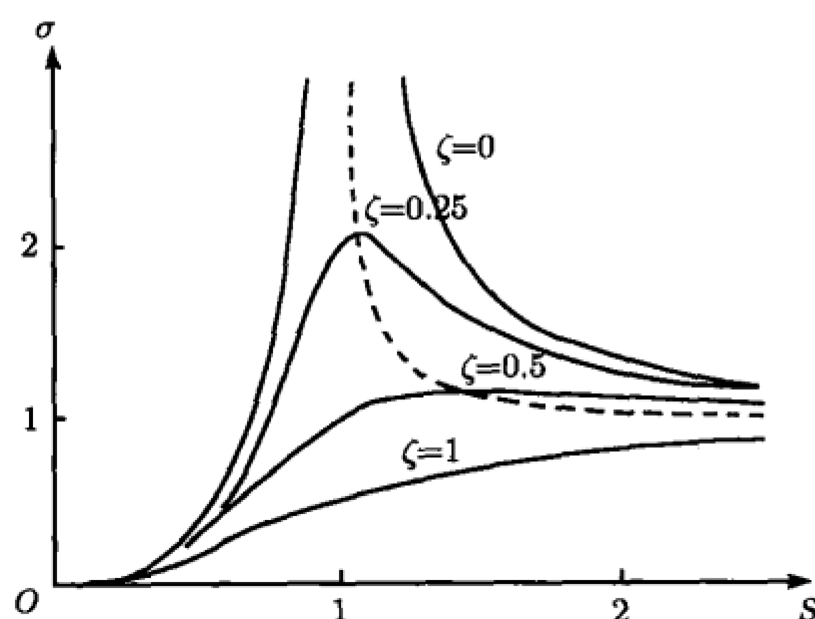


图 4.6 振动基座上复摆的幅频曲线族

3) 支点沿 (ξ, ζ) 平面内任意方向做线振动

设振动方向与 ξ 轴夹角为 ϕ, 频率为 ω, 振幅为 b, 所产生的加速度分量为

$$a_\xi = b\omega^2 \cos\phi \sin\omega t, \quad a_\zeta = b\omega^2 \sin\phi \sin\omega t \tag{4.1.33}$$

代入方程 (4.1.27), 得到

$$\ddot{\beta} + 2\zeta k\dot{\beta} + k^2\left(1 + \frac{b\omega^2}{g}\sin\phi\sin\omega t\right)\beta = \frac{b\omega^2 k^2}{g}\cos\phi\sin\omega t \tag{4.1.34}$$

方程 (4.1.34) 为周期变系数的非齐次方程, 如 $b\omega^2 \ll g$, 可使用摄动法求近似解. 定义量纲为一的小参数 $\varepsilon = b\omega^2/g$, 将方程 (4.1.34) 写作

$$\ddot{\beta}+2\zeta k\dot{\beta}+k^2\left(1+\varepsilon\sin\phi\sin\omega t\right)\beta=\varepsilon k^2\cos\phi\sin\omega t \tag{4.1.35}$$

将方程 (4.1.35) 的解展成 ε 的幂级数

$$\beta=\beta_0+\varepsilon\beta_1+\varepsilon^2\beta_2+\cdots \tag{4.1.36}$$

将上式代入式 (4.1.35), 令两边同次幂的系数相等, 得到

$$\ddot{\beta}_0+2\zeta k\dot{\beta}_0+k^2\beta_0=0 \tag{4.1.37a}$$

$$\ddot{\beta}_1+2\zeta k\dot{\beta}_1+k^2\beta_1=k^2\left(\cos\phi-\beta_0\sin\phi\right)\sin\omega t \tag{4.1.37b}$$

$$\ddot{\beta}_2+2\zeta k\dot{\beta}_2+k^2\beta_2=-k^2\beta_1\sin\phi\sin\omega t \tag{4.1.37c}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

零次近似方程 (4.1.37a) 的解 β_0 表示衰减的自由振动. 仅讨论复摆的受迫振动时, 假定 β_0 已衰减为零. 一次近似方程 (4.1.37b) 的特解为

$$\beta_1=\sigma\cos\phi\sin\left(\omega t-\delta\right) \tag{4.1.38}$$

式中 σ,δ 的定义与式 (4.1.19),(4.1.20) 相同. 将式 (4.1.38) 代入二次近似方程 (4.1.37c) 的右边, 其受迫振动特解为

$$\beta_2=-\frac{\sigma}{4}\cos\delta\sin2\phi+(2\omega\text{频率的周期项}) \tag{4.1.39}$$

将式 (4.1.38),(4.1.39) 代入式 (4.1.36), 得到方程 (4.1.35) 的精确到 ε^2 的受迫振动特解

$$\beta=-\frac{\sigma\varepsilon^2}{4}\cos\delta\sin2\phi+(\omega\text{与}2\omega\text{频率的周期项}) \tag{4.1.40}$$

因此复摆除产生 ω 与 2ω 频率的受迫振动以外, 还存在与 ε^2 成比例的常值偏角. 将式 (4.1.40) 中的 ε 以 $b\omega^2/g$ 代替, 常值项以 $\langle\beta\rangle$ 表示, 得到

$$\langle\beta\rangle=-\frac{b^2k^4\sigma^{**}}{4g^2}\cos\delta\sin2\phi \tag{4.1.41}$$

式中 σ^{**} 为 s 的函数

$$\sigma^{**}=\frac{s^4}{\sqrt{\left(1-s^2\right)^2+\left(2\zeta s\right)^2}} \tag{4.1.42}$$

$\phi=0$ 或 $\pi/2$, 即支点沿水平轴或垂直轴振动时, 复摆无常值偏角.

4.1.4　强阻尼摆

受强烈阻尼作用的复摆, 例如, 浸在高黏度液体中的复摆称为**强阻尼摆**. 由于强阻尼作用使复摆的运动减缓, 以致与 $\ddot{\beta}$ 成比例的惯性项可被略去, 认为重力矩仅与阻尼力矩相平衡. 方程 (4.1.9) 的第一项略去后, 简化为

$$T\dot{\beta}+\beta=0 \tag{4.1.43}$$

其中 $T=D/\mu$ 为强阻尼摆的时间常数. 此方程的一般解所表示的复摆自由振动为衰减的非周期运动.

$$\beta=\beta_0\mathrm{e}^{-t/T} \tag{4.1.44}$$

略去方程 (4.1.16) 的第一项, 即成为强阻尼摆的受迫振动方程, 写作

$$T\dot{\beta}+\beta=\beta_{\mathrm{s}}\sin\omega t \tag{4.1.45}$$

对于任意一阶线性常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+p\left(t\right)x=f\left(t\right) \tag{4.1.46}$$

可利用常数变易法求出其一般解

$$x\left(t\right)=\left\{x\left(0\right)+\int_0^t f\left(\tau\right)\exp\left[\int_0^{\tau}p\left(\tau\right)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\tau\right\}\exp\left[-\int_0^{\tau}p\left(\tau\right)\mathrm{d}\tau\right] \tag{4.1.47}$$

其中 $x\left(0\right)$ 为 x 的初始值. $p\left(t\right)$ 为常数时上式简化为

$$x\left(t\right)=\left[x\left(0\right)+\int_0^t f\left(\tau\right)\mathrm{e}^{p\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{-pt} \tag{4.1.48}$$

方程 (4.1.45) 的解可直接利用公式 (4.1.48) 得到

$$\beta=\left(\beta_0-\frac{\beta_{\mathrm{s}}}{1+\omega^2T^2}\right)\mathrm{e}^{-t/T}+\sigma\beta_{\mathrm{s}}\sin\left(\omega t-\delta\right) \tag{4.1.49}$$

其中第一项表示自由振动, β_0 为 β 的初值, β_{s} 的定义同式 (4.1.15). 第二项为受迫振动, 放大因子 σ 和相位差 δ 与频率的关系为

$$\sigma=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2T^2}},\quad \delta=\arctan\left(\omega T\right) \tag{4.1.50}$$

图 4.7 和图 4.8 为 σ, δ 与 ωT 之间的函数曲线. 随着阻尼增强时间常数增大, σ 接近于零, δ 接近于 $\pi/2$. 此时强阻尼摆作振幅极小相位差接近 90° 的受迫振动

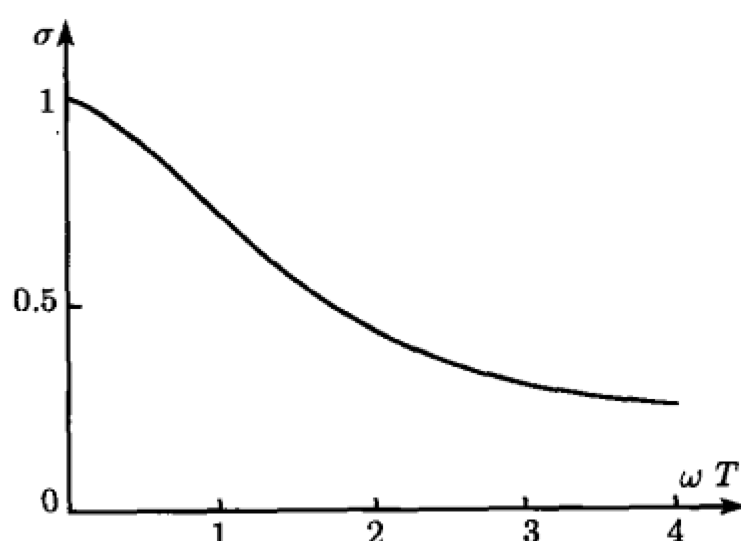


图 4.7 强阻尼摆的幅频曲线

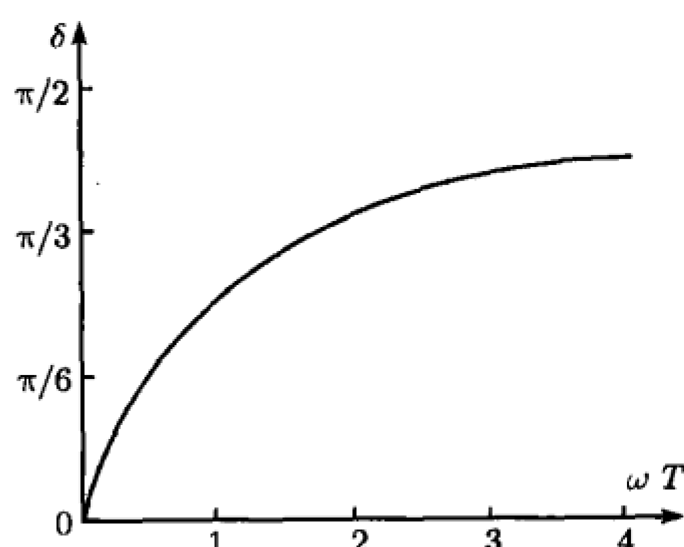


图 4.8 强阻尼摆的相频曲线

液体摆是一种特殊类型的强阻尼摆, 它由两只盛有黏性液体的形状相同容器组成, 容器间以细管相连通. 实验证明液体在连通管内的流速与两端压力差成正比. 连通器静止平放时此压力差与液面相对容器轴 x 的倾角 ϑ 成正比 (见图 4.9). 液体流动规律符合以下泊肃叶 (Poisseulle) 公式

$$\dot{\vartheta} = -c\vartheta \tag{4.1.51}$$

比例系数 c 取决于液体的比重、黏度以及连通管截面积和长度等因素. 将 c 的倒数记作 T, 方程 (4.1.51) 转化为强阻尼摆的自由振动方程

$$T\dot{\vartheta} + \vartheta = 0 \tag{4.1.52}$$

如连通器随基座摆动, x 轴相对水平轴 ξ 倾斜 β 角, 则连通管两端压力差与 $\vartheta - \beta$ 成正比 (见图 4.10). 将方程 (4.1.52) 中的第二项改为 $\vartheta - \beta$, 得到强阻尼摆的受迫振动方程

$$T\dot{\vartheta} + \vartheta = \beta \tag{4.1.53}$$



图 4.9 液体摆

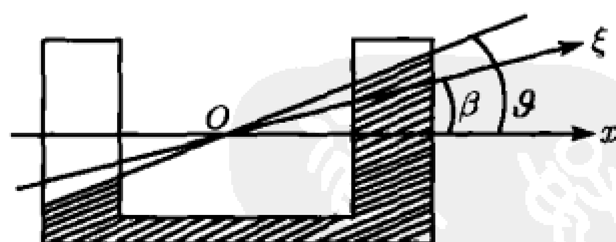


图 4.10 摆动基座上的液体摆

基座的周期摆动 $\beta(t)$ 对连通器产生激励作用. 当连通器倾斜时, 液体从高端容器流入低端容器而产生倾覆力矩, 类似于重心在支点上方的上摆, 故称为液体摆. 根据强阻尼摆的受迫振动特点可以推断, 当时间常数 T 足够大时, 与 ϑ 成比例的倾覆力矩和基座的摇摆运动 β 之间有接近于 90° 的相位差.

4.1.5 复摆的舒勒条件

讨论万向支架支承的二自由度复摆. 设 $(O-\xi\eta\zeta)$ 各轴与自然坐标系 $(O-XYZ)$ 重合. 支点 O 沿 $\mathscr{N}$ 球面做变速运动时, 复摆受到由支点加速度引起的惯性力矩作用而产生受迫振动 (见图 4.11). 利用表 3.2 第一行列出的比力, 计算重力与惯性力对 O 点的合力矩 $\boldsymbol{M}$

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{l}\times m\boldsymbol{f} \tag{4.1.54}$$

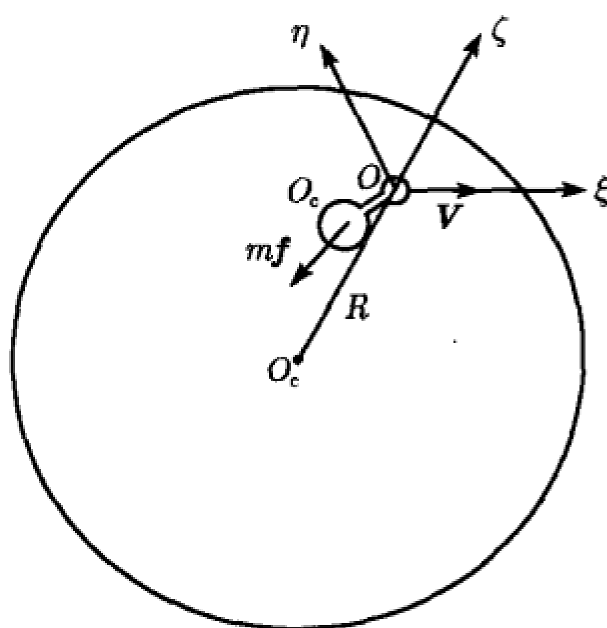


图 4.11　支点沿地球表面运动的复摆

得到 $\boldsymbol{M}$ 沿 x 和 y 轴的投影

$$M_x=-\mu\left[\left(1-\frac{V^2}{gR}\right)\alpha+\frac{V\Omega}{g}\right] \tag{4.1.55a}$$

$$M_y=-\mu\left[\left(1-\frac{V^2}{gR}\right)\beta-\frac{\dot{V}}{g}\right] \tag{4.1.55b}$$

将式 (4.1.55) 代入方程组 (3.3.24), 假定 O 点沿 $\mathscr{N}$ 球面的大圆弧运动, $\Omega=0$, 得到复摆的运动方程

$$\ddot{\alpha}+\frac{\mu}{A}\left(1-\frac{V^2}{gR}\right)\alpha\ =0 \tag{4.1.56a}$$

$$\ddot{\beta}+\frac{\mu}{A}\left(1-\frac{V^2}{gR}\right)\beta=\frac{\dot{V}}{g}\left(\frac{\mu}{B}-\frac{g}{R}\right) \tag{4.1.56b}$$

设 O 点的速度 V 远小于 $\sqrt{gR}$①, 略去 V^2/gR, 且设 $A=B$, 简化为

$$\ddot{\alpha}+k^2\alpha\ =0 \tag{4.1.57a}$$

① $\sqrt{gR}$ 为实现人造地球卫星的最小速度, 即第一宇宙速度.

$$\ddot{\beta}+k^2\beta=\frac{\dot{V}}{g}\left(k^2-\frac{g}{R}\right) \tag{4.1.57b}$$

参数 k 的定义见式 (4.1.11). 利用复变量 $z=\alpha+\mathrm{i}\beta$, 将上式写作复数形式

$$\ddot{z}+k^2z=\frac{\mathrm{i}\dot{V}}{g}\left(k^2-\frac{g}{R}\right) \tag{4.1.58}$$

如复摆的参数满足以下条件

$$k=\sqrt{\frac{g}{R}} \tag{4.1.59}$$

则方程 (4.1.58) 的非齐次项被消除. 只要复摆的初始位置与地垂线一致, 即

$$z(0)=\dot{z}(0)=0 \tag{4.1.60}$$

则方程 (4.1.58) 满足初始条件 (4.1.60) 的解必恒等于零

$$z(t)\equiv 0 \tag{4.1.61}$$

此时不论载体沿 $\mathscr{N}$ 球面做何种变速运动, 复摆必保持与地垂线重合而不受支点加速度的影响. 原因是当 (4.1.59) 条件满足时, 牵连惯性力矩所引起的复摆运动恰好与地垂线的转动同步. 此结论于 1923 年由德国人舒勒 (M. Schuler) 得出, 称为复摆的**舒勒条件**. 满足此条件的复摆固有频率称为**舒勒频率**, 记为 $k_s=\sqrt{gR}$, 周期称为**舒勒周期**T_s

$$T_s=\frac{2\pi}{k_s}=2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}=84.4\text{分钟} \tag{4.1.62}$$

舒勒周期 T_s 相当于摆长等于地球半径的单摆周期, 或沿地球表面运行的人造地球卫星的周期. 周期如此之长的复摆在技术上无法实现. 但舒勒条件对陀螺摆和陀螺罗经的避免干扰问题具有更重要的指导意义, 将在第 5 章和第 6 章中叙述.

4.2 单自由度陀螺

4.2.1 傅科陀螺

1852 年傅科在巴黎科学院展示的世上第一只陀螺仪是一只单自由度陀螺. 陀螺的质心与支点重合, 框架的转动轴沿地垂线固定于地球, 极轴能在水平面内自由转动 (见图 4.12). 实验的最初目的是想通过旋转轴相对地球的偏转证明地球自转运动的存在. 虽然简陋的支承装置未能实现预定目标, 但傅科陀螺的重要启示在于, 可以利用地球自转效应促使极轴向子午面趋近, 以代替磁罗盘指示方位. 可以认为, 傅科陀螺是人类利用高速旋转转子的陀螺特性作为导航仪器的最初尝试.

设单自由度陀螺由内环组合件构成, 内环转轴 y_1 与载体轴 η 一致. 载体轴沿地垂线 Z 固定于地球, $(O-\xi\eta\zeta)$ 各轴依次与地理坐标轴 $-E, Z, N$ 重合 (见图 4.13). 设 ϕ 为地理纬度, 地球自转角速度 $\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{e}}$ 相对 $(O-\xi\eta\zeta)$ 轴系的投影为

$$\Omega_\xi = 0, \quad \Omega_\eta = \Omega_{\mathrm{e}} \sin\phi, \quad \Omega_\zeta = \Omega_{\mathrm{e}} \cos\phi \tag{4.2.1}$$

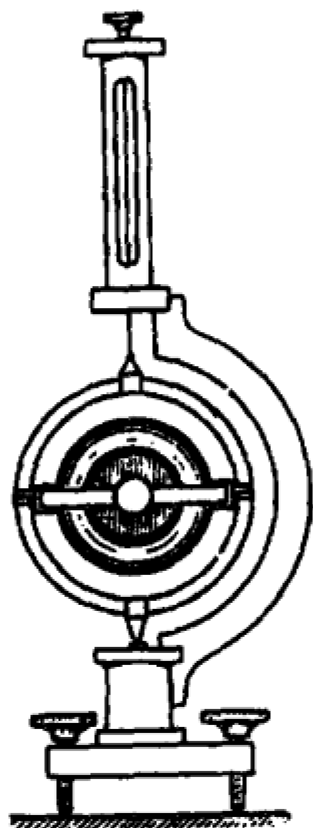


图 4.12　傅科陀螺

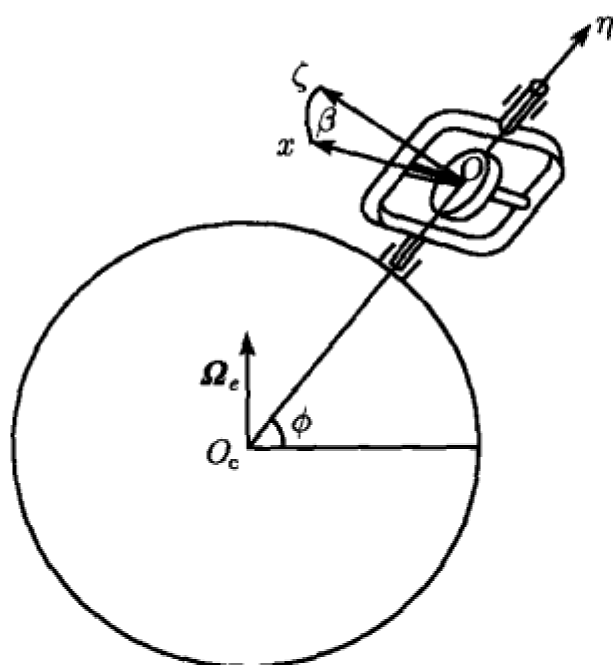


图 4.13　固定于地球的傅科陀螺

将式 (4.2.1) 代入方程 (3.3.25), 设框架轴承为理想约束, 令 $M_y = 0$, 只保留 Ω_{e} 的一次项, 得到与复摆运动方程 (4.1.3) 完全相同的傅科陀螺动力学方程

$$B\ddot{\beta} + \mu \sin\beta = 0 \tag{4.2.2}$$

参数 μ 定义为

$$\mu = H_0 \Omega_{\mathrm{e}} \cos\phi \tag{4.2.3}$$

由于地球自转产生的陀螺力矩起了复摆中的重力矩作用, 傅科陀螺的框架绕地垂线的摆动规律与复摆的自由振动规律完全相同. 微振动的固有周期公式也与 (4.1.12) 相同

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{B}{H_0 \Omega_{\mathrm{e}} \cos\phi}} \tag{4.2.4}$$

陀螺的动量矩常数出现于分母, 因此转子高速旋转时, 傅科陀螺的固有周期极短. 根据图 4. 2 的相轨迹曲线判断, 极轴沿 N 轴的指北位置为稳定平衡位置, 可以利用极轴的摆动中心指示子午线. 极轴的指南位置为不稳定平衡位置.

要使傅科陀螺能实际应用, 必须保证框架转动轴无干扰力矩, 且必须与地垂线严格保持一致. 否则方程 (4.2.2) 右边出现的常值干扰力矩可引起 β 的静态误差, 周期变化的干扰力矩可因陀螺框架的固有周期极短而激起显著的受迫振动. 设载体轴 η 向东偏离地垂线 Z 微小角度 ε, 只保留 ε 的一次项时, 式 (4.2.1) 中 $\Omega_\eta, \Omega_\zeta$ 不变, Ω_ξ 从零变为 $\varepsilon\Omega_e\sin\phi$(图 4.14). 动力学方程改为

$$B\ddot{\beta} + \mu(\sin\beta - \varepsilon\tan\phi\cos\beta) = 0 \tag{4.2.5}$$

此方程存在随纬度 ϕ 增长的常值特解 β_s

$$\beta_s = \arctan(\varepsilon\tan\phi) \tag{4.2.6}$$

为避免出现偏角 β_s, 傅科陀螺只能与地球直接固定, 作为陆上指示方位的仪器, 如矿井中使用的陀螺方位仪.

4.2.2 速率陀螺

速率陀螺也是质心与支点重合, 框架轴 y_1 沿载体轴 η 的单自由度陀螺. 框架与载体之间有弹簧和阻尼器相联系 (见图 4.15). 略去框架轴 y_1 的下标, 框架偏转时弹簧和阻尼器产生与 β 和 $\dot{\beta}$ 成比例的绕 y 轴的约束力矩

$$M_y = -K\beta - D\dot{\beta} \tag{4.2.7}$$

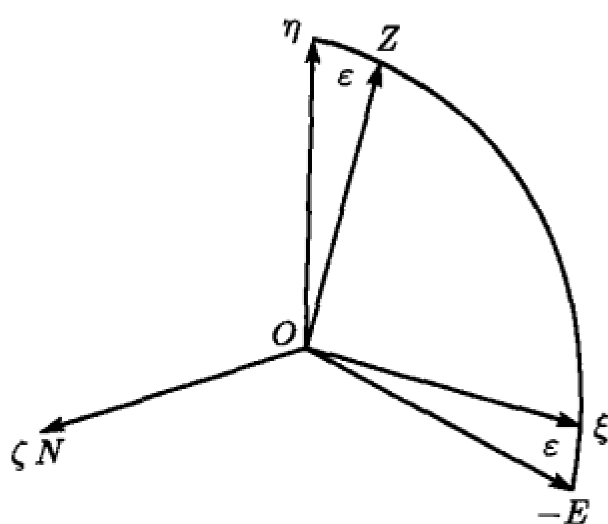


图 4.14 框架轴偏置的傅科陀螺

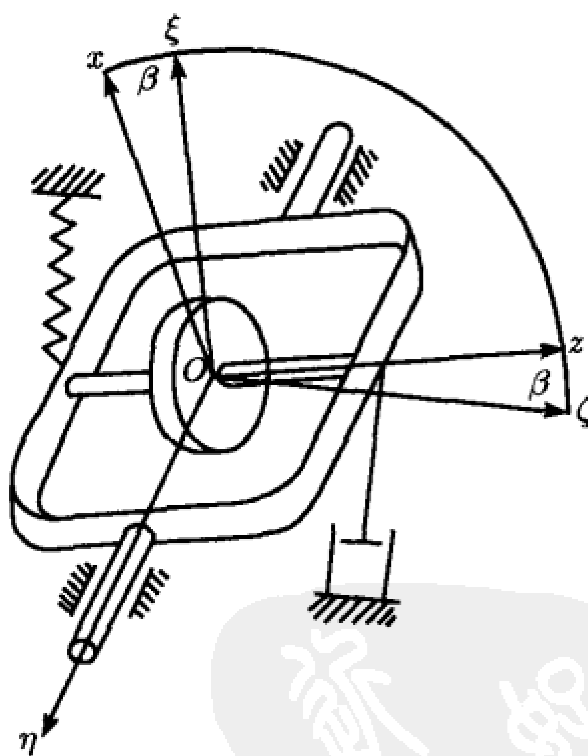


图 4.15 速率陀螺

K, D 分别为弹簧刚度和阻尼系数. 设偏角 β 极小, 将式 (4.2.7) 代入方程 (3.3.27), 只保留 β 的线性项, 略去 H_0 的下标, 得到

$$\begin{aligned} &B\ddot{\beta} + D\dot{\beta} + \left[K + H\Omega_\zeta + (C_1 - A)\left(\Omega_\zeta^2 - \Omega_\xi^2\right)\right]\beta \\ &= [H + (C_1 - A)\Omega_\zeta]\Omega_\xi - B\dot{\Omega}_\eta \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

弹簧足够刚硬且转子动量矩足够大时, 略去上式中与 $(C_1 - A)$ 有关的各项, 简化为

$$B\ddot{\beta} + D\dot{\beta} + (K + H\Omega_\zeta)\beta = H\Omega_\xi - B\dot{\Omega}_\eta \tag{4.2.9}$$

分别讨论以下几种情况:

1) 载体绕 ξ 轴转动

令 $\Omega_\eta = \Omega_\zeta = 0$, 方程 (4.2.9) 简化为

$$\ddot{\beta} + 2\zeta k\dot{\beta} + k^2\beta = \left(\frac{H}{B}\right)\Omega_\xi \tag{4.2.10}$$

其中 $k = \sqrt{K/B}$, $\zeta = D/2\sqrt{BK}$, k 为陀螺绕 y 轴做角振动的无阻尼固有频率, 仅取决于惯性矩 B 和弹簧刚度 K 而与转子动量矩 H 无关. 如载体匀速转动, Ω_ξ 为常值, 则 β 存在与 Ω_ξ 成正比的常值特解

$$\beta_s = \left(\frac{H}{K}\right)\Omega_\xi \tag{4.2.11}$$

可视为弹簧反力矩与陀螺力矩互相平衡, 即 $K\beta_s = H\Omega_\xi$ 的结果. 利用式 (4.2.11), 可根据 β 的量测值确定载体绕 ξ 轴的角速度 Ω_ξ, 比例系数取决于 H 和 K. 以 Ω'_ξ 表示 Ω_ξ 的量测值, 得到

$$\Omega'_\xi = \left(\frac{K}{H}\right)\beta \tag{4.2.12}$$

因此上述单自由度陀螺可作为载体角速度的量测元件, 称为**速率陀螺**, ξ 轴为角速度的量测轴.

如载体绕 ξ 轴作频率为 ω、角速度幅值为 Ω_0 的角振动, Ω_ξ 的变化规律为

$$\Omega_\xi = \Omega_0 \sin\omega t \tag{4.2.13}$$

将上式代入方程 (4.2.10) 的右边, β 的受迫振动特解为式 (4.1.18) 的虚数部分

$$\beta = \sigma\beta_s \sin(\omega t - \delta) \tag{4.2.14}$$

放大因子 σ 和相位差 δ 与 s 的函数关系均与式 (4.1.19),(4.1.20) 相同. 将式 (4.2.14) 代入式 (4.2.12), 得到的载体角速度量测值 Ω'_ξ 仅当激励频率 ω 远小于固有频率 k 时才接近真实值, 否则将导致误差.

2) 载体绕 η 轴转动

令 $\Omega_\xi = \Omega_\zeta = 0$, 动力学方程为

$$\ddot{\beta} + 2\zeta k\dot{\beta} + k^2\beta = -\dot{\Omega}_\eta \tag{4.2.15}$$

载体绕 η 轴的匀速转动不影响陀螺的运动. 载体做匀加速转动时, β 存在与 $\dot{\Omega}_\eta$ 成正比的常值特解

$$\beta_s = -\left(\frac{B}{K}\right)\dot{\Omega}_\eta \tag{4.2.16}$$

其物理意义为 $K\beta_s = -B\dot{\Omega}_\eta$, 即弹簧反力矩与惯性力矩相平衡. 此时虽然载体绕量测轴 ξ 并无转动发生, 却产生如 (4.2.16) 所示的错误信息, 似乎陀螺仪的量测基准在惯性空间中绕 ξ 轴朝相反方向转动. 将量测基准的角速度定义为速率陀螺的漂移率, 以 Ω_d 表示. 将式 (4.2.16) 代替式 (4.2.12) 右边的 β 并免去负号, 得到漂移率的表示式

$$\Omega_d = \left(\frac{B}{H}\right)\dot{\Omega}_\eta \tag{4.2.17}$$

3) 载体绕 (ξ,ζ) 平面内任意轴转动

令 $\Omega_\eta = 0$, 动力学方程为

$$\ddot{\beta} + 2\zeta k\dot{\beta} + \left(k^2 + \frac{H\Omega_\zeta}{B}\right)\beta = \frac{H\Omega_\xi}{B} \tag{4.2.18}$$

如载体匀速转动, 陀螺的常值偏角虽仍与 Ω_ξ 成比例, 但比例系数并非确定值而与 Ω_ζ 有关

$$\beta_s = \frac{H}{K}\left(1 + \frac{H\Omega_\zeta}{K}\right)^{-1}\Omega_\xi \tag{4.2.19}$$

加大系数 (H/K) 虽有利于提高陀螺对角速度 Ω_ξ 的灵敏度, 但 Ω_ζ 对量测系数的干扰亦随之增大.

如载体绕与 ξ 轴夹角为 ϕ 的任意轴做频率为 ω、角速度幅值为 Ω_0 的角振动

$$\Omega_\xi = \Omega_0\cos\phi\sin\omega t, \quad \Omega_\eta = \Omega_0\sin\phi\sin\omega t \tag{4.2.20}$$

Ω_0 足够小时, 定义小参数 $\varepsilon = H\Omega_0/K$, 将上式代入方程 (4.2.18), 得到的方程形式上与式 (4.1.35) 完全相同. 因此可直接利用式 (4.1.40) 写出 β 的近似解

$$\beta = -\frac{\sigma H^2\Omega_0^2}{4K^2}\cos\delta\sin 2\phi + (\omega\text{与}2\omega\text{频率的周期项}) \tag{4.2.21}$$

陀螺除产生 ω 与 2ω 频率的受迫振动以外, 还出现与 Ω_0^2 成比例的常值项引起陀螺漂移, 漂移率为

$$\Omega_d = \frac{\sigma H\Omega_0^2}{4K}\cos\delta\sin 2\phi \tag{4.2.22}$$

4.2.3　积分陀螺

将速率陀螺的弹簧除去, 只剩下阻尼器, 设载体绕 ξ 轴转动. 令方程 (4.2.9) 中 $K=0$, $\Omega_\eta=\Omega_\zeta=0$, 并引入变量 $y=\dot{\beta}$, 改造为 y 的一阶微分方程

$$\dot{y}+\left(\frac{D}{B}\right)y=\left(\frac{H}{B}\right)\Omega_\xi \tag{4.2.23}$$

设 β 和 $\dot{\beta}$ 的初值为零, 利用公式 (4.1.48) 直接写出方程 (4.2.23) 的解

$$y=\left(\frac{H}{B}\right)\mathrm{e}^{-Dt/B}\int_0^t\Omega_\xi(\tau)\,\mathrm{e}^{D\tau/B}\mathrm{d}\tau \tag{4.2.24}$$

使用分部积分法化作

$$y=\left(\frac{H}{D}\right)\left\{\Omega_\xi(t)-\mathrm{e}^{-Dt/B}\left[\Omega_\xi(0)+\int_0^t\dot{\Omega}_\xi(\tau)\,\mathrm{e}^{D\tau/B}\mathrm{d}\tau\right]\right\} \tag{4.2.25}$$

如阻尼作用强烈且 Ω_ξ 变化平缓, 则上式中第二项迅速衰减, 化作

$$y=\left(\frac{H}{D}\right)\Omega_\xi(t) \tag{4.2.26}$$

再积分一次, 令 $\beta(0)=0$, 得到

$$\beta=\left(\frac{H}{D}\right)\int_0^t\Omega_\xi(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{4.2.27}$$

因此陀螺转角与载体绕 ξ 轴的转动角速度 Ω_ξ 的积分成正比, 称为**积分陀螺**. 减小阻尼系数 D 可使放大系数增大, 但自由振动的衰减时间随之延长.

如将阻尼器也除去, 成为完全自由的单自由度陀螺, 令方程 (4.2.23) 中 $D=0$, 积分二次后得到

$$\beta=\left(\frac{H}{B}\right)\int_0^t\int_0^t\Omega_\xi(\tau)\mathrm{d}\tau^2 \tag{4.2.28}$$

陀螺转角与载体角速度 Ω_ξ 的二重积分成正比, 称为**二重积分陀螺**.

主要用于航空的单自由度速率陀螺或积分陀螺, 其结构常采用**液浮陀螺**方案. 转子装在密封的浮筒内构成支架组合体, 其重量由充满在仪器壳体内的黏性液体所支承, 以减小支架轴承内的摩擦. 浮筒与壳体之间受液体润滑的间隙起阻尼器作用.

4.2.4　控制力矩陀螺

单自由度陀螺除作为速率陀螺或积分陀螺用于指示仪表, 还可利用其惯性效应起力矩转换作用. 分析静止载体上的单自由度陀螺动力学方程 (3.2.32)

$$H\dot{\beta}=M_x \tag{4.2.29a}$$

$$B\ddot{\beta} = M_y \tag{4.2.29b}$$

沿框架轴 y 施加力矩 M_y, 使内环组合体产生绕 y 轴转动的角加速度 $\ddot{\beta}$, 且从静止开始积累角速度 $\dot{\beta}$

$$\dot{\beta} = \int_0^t \frac{M_y(\tau)}{B} \mathrm{d}\tau \tag{4.2.30}$$

方程 (4.2.29a) 表明, $\dot{\beta}$ 的出现使转子绕 x 轴进动, 所产生的陀螺力矩与框架轴的约束力矩 M_x 平衡. 其反作用力矩通过轴承作用于载体. 绕 y 轴的力矩 M_y 与动量矩常数 H 无关, 但所产生的绕 x 轴的力矩 M_x 与 H 成正比. 当 H 足够大时, 载体对框架轴施加的力矩通过单自由度陀螺的惯性效应, 转换为绕与框架轴正交的更强大的力矩作用于载体. 这种特殊的单自由度陀螺称为**控制力矩陀螺**, 应用于卫星姿态控制系统.

4.3 弹性变形问题

4.3.1 临界转速

陀螺仪的刚体系统模型是一种近似模型. 实际上万向支架及其转轴在力或力偶作用下都可能产生弹性变形. 为便于讨论, 假定弹性变形集中体现于无质量转轴的弯曲变形. 力的作用可引起转子质心的线位移, 力偶的作用则引起转子绕质心的角位移. 前者使转轴产生对称变形 (见图 4.16(a)), 后者使转轴产生反对称变形 (见图 4.16(b)).

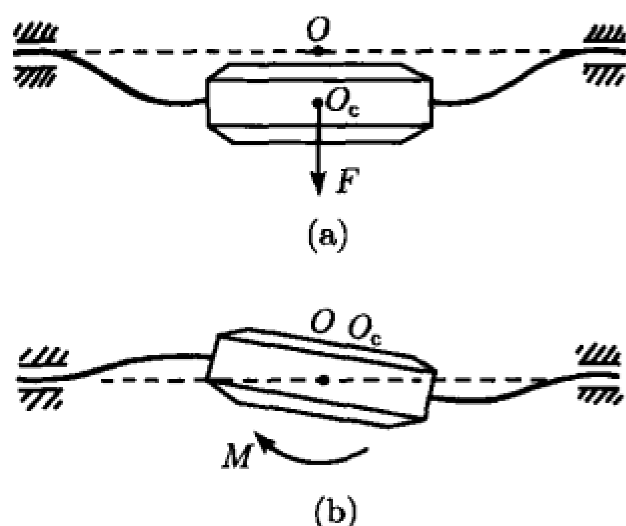


图 4.16　陀螺的对称变形和反对称变形

先讨论转子径向质量偏心引起转轴的对称弯曲变形. 忽略转子质心运动与绕质心转动之间的相互影响, 设极轴保持与地垂线方向一致. 定义 O 为两端轴承的连线与转子赤道面的交点, 载体静止时为固定点. 弹性转轴的中心线通过赤道面的几何中心 O_1 点. 转轴的对称弯曲变形使 O_1 点偏离 O 点, 并在轴承上产生与线位移

$e = \overrightarrow{OO_1}$ 的大小成正比, 方向相反的约束反力, 其合力作用于 O 点 (见图 4.17). 考虑弹性材料的内阻尼, 轴承对转子的作用力为

$$\boldsymbol{F} = -K\boldsymbol{e} - D\dot{\boldsymbol{e}} \tag{4.3.1}$$

式中 K 和 D 为弹性轴的刚度系数和阻尼系数. 如转子质心 O_c 与几何中心 O_1 不重合而存在微小的径向偏心, $\boldsymbol{\Delta} = \overrightarrow{O_1O_c}$ 为**偏心距矢量**(见图 4.18). O_c 相对固定点 O 的位移矢量 $\boldsymbol{r}_c = \overrightarrow{OO_c}$ 为

$$\boldsymbol{r}_c = \boldsymbol{e} + \boldsymbol{\Delta} \tag{4.3.2}$$

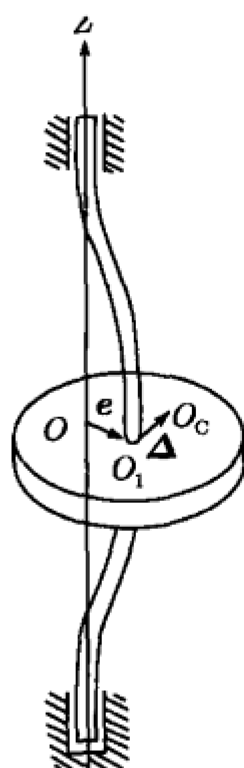


图 4.17　弹性转轴上的偏心转子

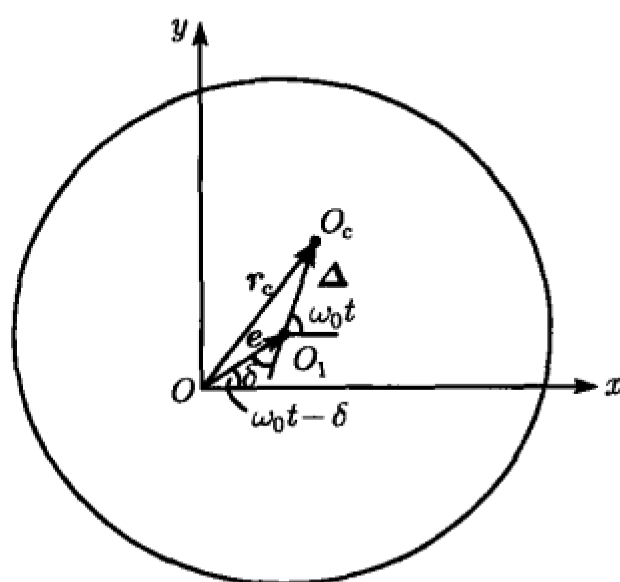


图 4.18　偏心转子的径向位移

转子质心的运动方程为

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}_c = \boldsymbol{F} \tag{4.3.3}$$

将式 (4.3.1),(4.3.2) 代入方程 (4.3.3), 导出

$$\ddot{\boldsymbol{e}} + 2\zeta k\dot{\boldsymbol{e}} + k^2\boldsymbol{e} = -\ddot{\boldsymbol{\Delta}} \tag{4.3.4}$$

其中 k, ζ 定义为

$$k = \sqrt{\frac{K}{m}}, \quad \zeta = \frac{D}{2\sqrt{mK}} \tag{4.3.5}$$

转子以角速度 ω_0 匀速旋转时, 偏心距矢量 $\boldsymbol{\Delta}$ 随同转子绕 O_1 点转动. 其相对赤道平面内的固定轴 x, y 的投影式为

$$\boldsymbol{\Delta} = \Delta\,(\cos\omega_0 t\,\boldsymbol{i} + \sin\omega_0 t\,\boldsymbol{j}) \tag{4.3.6}$$

将上式代入方程 (4.3.4), 设 e 在 x, y 轴上的投影为 e_x, e_y, 引入复变量 $z = e_x + \mathrm{i}e_y$ 表示 e 矢量, z 的复数平面即转子质心的运动平面. 矢量方程 (4.3.4) 可化作与式 (4.1.30) 相同的复数方程

$$\ddot{z} + 2\zeta k\dot{z} + k^2 z = \omega_0^2 \Delta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t} \tag{4.3.7}$$

此方程的受迫振动特解与 (4.1.31) 相同, 只须将 β_s 改为 Δ, ω 改为 ω_0

$$z = \sigma^* \Delta \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_0 t - \delta)} \tag{4.3.8}$$

此特解表示转子质心绕 O 点的圆周运动, 称为转子的**侧摆运动**. 放大因子 σ^* 和相位差 δ 与量纲为一频率 $s = \omega_0/k$ 的关系同式 (4.1.32),(4.1.20), 如图 4.4 和 4.5 所示. 振幅为峰值时对应的旋转角速度称为转子的**临界转速**ω_{cr}, 令 σ^* 对 s 的导数为零, 导出

$$\omega_{\mathrm{cr}} = \frac{k}{\sqrt{1-2\zeta^2}} \tag{4.3.9}$$

当实际转速接近 ω_{cr} 时, 转子产生激烈涡动而出现谐振现象. 最大涡动振幅为

$$(\sigma^* \Delta)_{\max} = \frac{\Delta}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{4.3.10}$$

临界转速 ω_{cr} 取决于弹性轴的刚度、转子质量和阻尼系数等因素. 无阻尼时临界转速 ω_{cr} 等于固有频率 k, 对应的振幅峰值为 ∞. 随着阻尼系数增大, 临界转速升高而峰值下降, 谐振曲线趋于平缓. $\zeta > 1/2$ 时曲线的峰值消失, 临界转速遂不存在.

4.3.2 旋转轴迹线

以上对涡动运动的分析中, 相位差 δ 具有确定的几何意义, 即等于矢量 e 与 $\boldsymbol{\Delta}$ 的夹角 (见图 4.18). 对于确定的 s 和 ζ, 式 (4.1.32) 和 (4.1.20) 给出确定的 σ^* 和 δ 的值, 从而以极坐标形式完全确定转子的瞬时旋转轴在赤道平面 (x, y) 上的**迹点**位置. O 点的位置随 s 和 ζ 变化, 其轨迹称为转子旋转轴的**迹线**, 类似于 2.3.2 节中定义的本体极迹. 在图 4.19 中坐标轴 $x_{\mathrm{R}}, y_{\mathrm{R}}$ 固定于转子赤道平面, 以几何中心 O_1 为原点, x_{R} 轴沿 $\boldsymbol{\Delta}$ 方向. 实线表示 ζ 不变, 以 s 为参变量的迹线族; 虚线表示 s 不变, 以 ζ 为参变量的迹线族. 后者是以 y_{R} 轴为公切线, 圆心分布在 x_{R} 轴上的圆族. 分析图 4.19, 可得出以下结论:

1) 转速为零或刚度无限大 ($s = 0$) 时, 旋转轴迹点 O 与几何中心 O_1 重合.
2) 转速无限大或刚度为零 ($s = \infty$) 时, O 点与质心 O_c 重合.
3) 阻尼无限大 ($\zeta = \infty$) 时, O 点与 O_1 点重合而与转速或刚度无关.

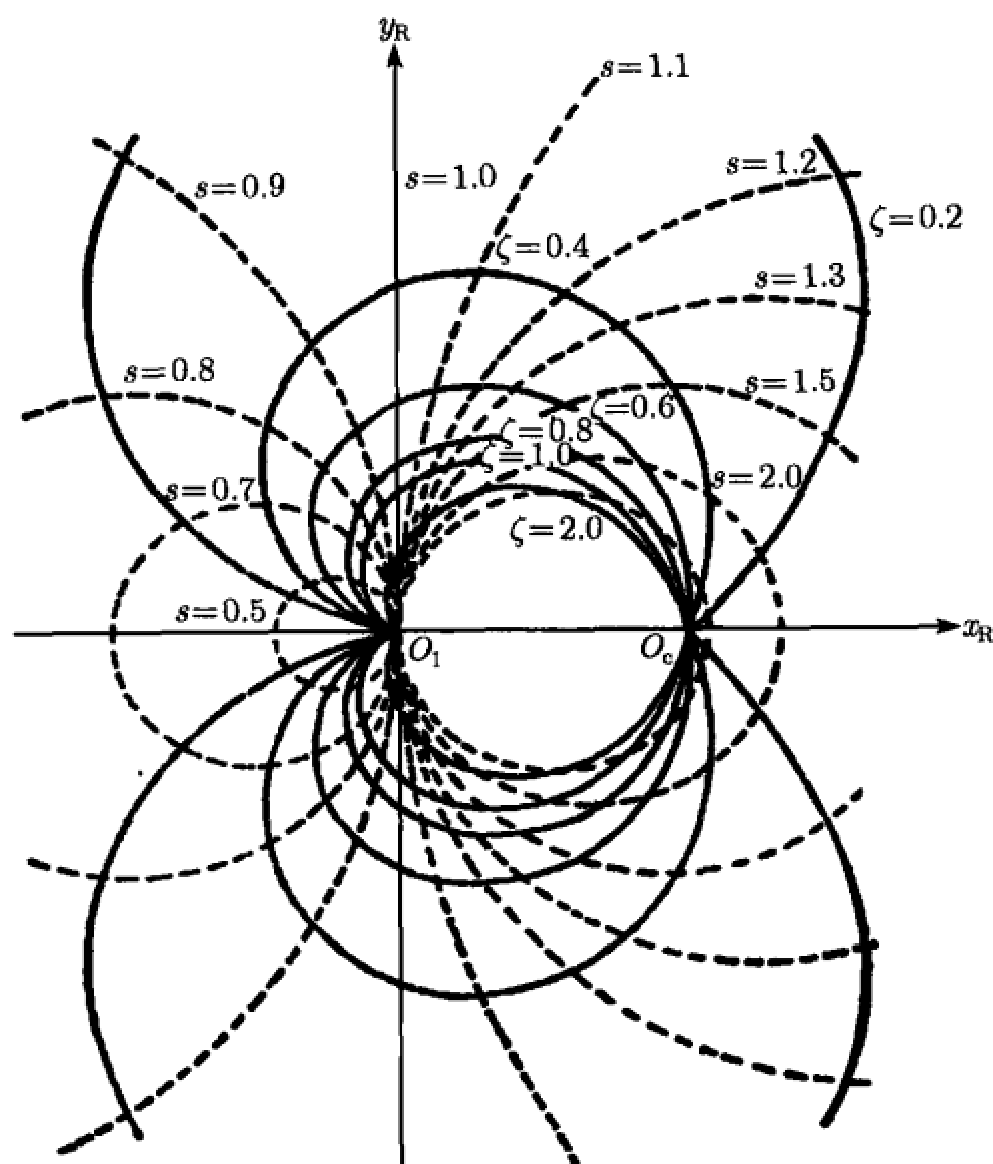


图 4.19　转子的旋转轴迹线

4) 阻尼系数 ζ 确定不变, s 从零开始逐渐增大时, 即刚度不变增加转速, 或转速不变减小刚度时, O 点朝与质量偏心相反方向离开 O_1 点, 然后返回改朝质心方向移动. $s=1$ 时 O 点与 y_R 轴相交, O, O_1, O_c 三点构成直角三角形. s 继续增大时 O 点继续朝 O_c 点趋近. 旋转轴迹线为通过 O_1, O_c 两点的连续曲线.

5) 阻尼系数 ζ 愈小, 上述迹线愈远离 O_1 和 O_c 点. $\zeta=0$ 时此连续曲线分为两个直线分支, 分支 1 从 O_1 点向 x_R 轴的负方向延伸, 分支 2 从 O_c 点向 x_R 轴的正方向延伸. 随着 s 的增大, O 点沿直线分支 1 离开 O_1 点, 至临界转速 ($s=1$) 时 O 点到达正无限远处, s 继续增大则 O 点从负无限远处沿直线分支 2 返回向 O_c 点趋近. O,O_1,O_c 三点始终保持共线.

4.3.3　不等刚度引起的陀螺漂移

由于弹性变形, 转子因质量力引起的质心线位移会对转子绕质心的转动产生影响. 将无弹性变形时万向支架各转轴的交点 O 视为转子的支承中心. 暂不考虑径向偏心, 令 $\Delta=0$, 转子质心 O_c 与几何中心 O_1 重合. O_c 偏离 O 点的线位移使万向支架转轴产生对称弯曲变形. 变形引起外环轴承的约束反力作用于 O 点, 成为

对转子质心运动的弹性恢复力. 图 4.20(a),(b),(c) 分别表示 O_c 沿 x,y,z 各轴作线位移时各转轴的弯曲变形情况. 将转子简化为质量–弹簧系统, 沿 x,y,z 各轴有不同的刚度系数, 分别以 K_i $(i=x,y,z)$ 表示. 设 $\boldsymbol{e}$ 为 O_c 偏离 O 点的位移矢量, $\boldsymbol{f}$ 为比力, 转子上作用的质量力 $\boldsymbol{F}_1$ 和弹簧恢复力 $\boldsymbol{F}_2$ 为

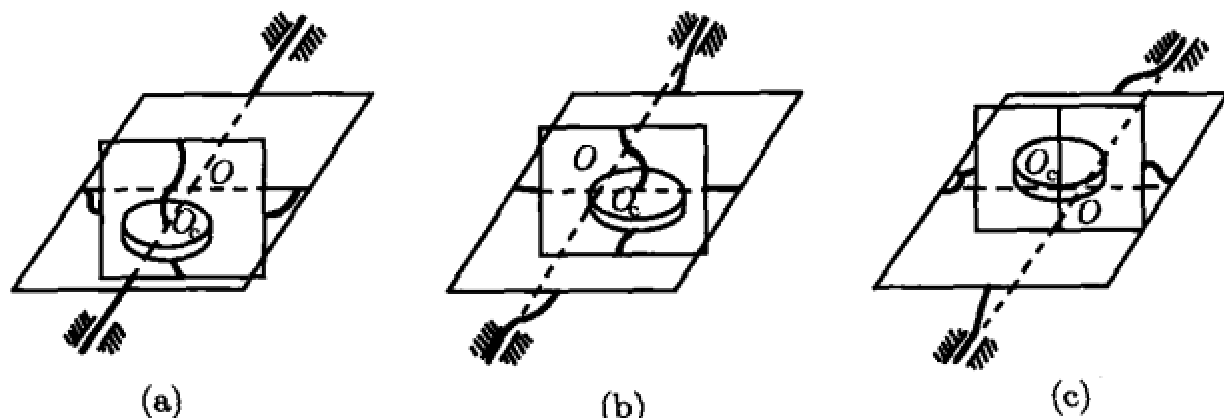


图 4.20　框架陀螺在惯性力作用下的弹性变形

$$\boldsymbol{F}_1 = mf\left(c_x\boldsymbol{i} + c_y\boldsymbol{j} + c_z\boldsymbol{k}\right) \tag{4.3.11}$$

$$\boldsymbol{F}_2 = -\left(K_xe_x\boldsymbol{i} + K_ye_y\boldsymbol{j} + K_ze_z\boldsymbol{k}\right) \tag{4.3.12}$$

其中 e_i 和 c_i $(i=x,y,z)$ 分别为 $\boldsymbol{e}$ 在 $(O-xyz)$ 中的投影和 $\boldsymbol{f}$ 的方向余弦. 令方程 (4.3.3) 中 $\boldsymbol{r}_c=\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2$, 忽略弹性轴的内阻尼, 写出转子质心运动方程的投影式

$$m\ddot{e}_i + K_ie_i = mfc_i \quad (i=x,y,z) \tag{4.3.13}$$

从方程 (4.3.13) 解出 e_i 后, 计算比力 $\boldsymbol{F}_1$ 相对 O 点的力矩 $\boldsymbol{M}$

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{e}\times\boldsymbol{F}_1 \tag{4.3.14}$$

得到 $\boldsymbol{M}$ 在 x,y 轴上的投影

$$M_x = mf\left(c_ze_y - c_ye_z\right) \tag{4.3.15a}$$

$$M_y = mf\left(c_xe_z - c_ze_x\right) \tag{4.3.15b}$$

先讨论 $\boldsymbol{f}$ 为静载荷情形, 当转子质心的自由振动由于实际存在的阻尼而衰减后, 方程 (4.3.13) 的特解为

$$e_i = mf\left(\frac{c_i}{K_i}\right) \quad (i=x,y,z) \tag{4.3.16}$$

将式 (4.3.16) 代入 (4.3.15), 得到

$$M_x = m^2f^2c_yc_z\left(K_y^{-1} - K_z^{-1}\right) \tag{4.3.17a}$$

$$M_y = m^2 f^2 c_z c_x \left(K_z^{-1} - K_x^{-1}\right) \tag{4.3.17b}$$

此力矩称为**不等刚度力矩**, 因为它是由于弹性支架沿各个方向的刚度不等, 以致位移方向与载荷方向不共线所引起. 如系统为等刚度, $K_x = K_y = K_z$, 此力矩即消失为零. 如载荷沿 $(O-xyz)$ 的任一坐标轴方向, 由于位移与载荷方向一致, 也不存在不等刚度力矩. 一般情况下, $\boldsymbol{M}$ 与比力的平方成比例, 对于与地球固定的坐标系, $f=g$, $\boldsymbol{M}$ 与 g 的平方成比例.

不等刚度力矩的存在使转子的质心运动与绕质心的转动产生耦合. 对于静止基座上的速率陀螺, 将式 (4.3.17) 中的 M_y 加入方程 (4.2.9) 的力矩项, 令 $\Omega_\xi = \Omega_\eta = \Omega_\zeta = 0$, 得到

$$\ddot{\beta} + 2\zeta k\dot{\beta} + k^2\beta = \frac{M_y}{B} \tag{4.3.18}$$

将上式与方程 (4.2.10) 对比, 可看出不等刚度力矩的作用等价于载体绕 ξ 轴以角速度 $\Omega_\xi = M_y/H$ 转动的效果. 由此导出速率陀螺的漂移率 Ω_{d}

$$\Omega_{\mathrm{d}} = \frac{m^2 f^2 c_z c_x}{H}\left(\frac{1}{K_x} - \frac{1}{K_z}\right) \tag{4.3.19}$$

此漂移率公式与参数 B, D, K 无关, 它也适合于积分陀螺或其他单自由度陀螺.

以上关于不等刚度力矩的讨论可推广到静止基座上二自由度陀螺情形. 将进动方程 (3.2.25) 中的力矩项以 M_x, M_y 代替, 得到

$$H\dot{\alpha} = -M_y \tag{4.3.20a}$$

$$H\dot{\beta} = M_x \tag{4.3.20b}$$

上式中陀螺的进动角速度 $\dot{\alpha}, \dot{\beta}$ 即为二自由度陀螺绕 x 和 y 轴的漂移率, 分别以 $\Omega_{\mathrm{d}x}$ 和 $\Omega_{\mathrm{d}y}$, 表示为

$$\Omega_{\mathrm{d}x} = \frac{m^2 f^2 c_z c_x}{H}\left(\frac{1}{K_x} - \frac{1}{K_z}\right) \tag{4.3.21a}$$

$$\Omega_{\mathrm{d}y} = \frac{m^2 f^2 c_y c_z}{H}\left(\frac{1}{K_y} - \frac{1}{K_z}\right) \tag{4.3.21b}$$

其中式 (4.3.21a) 与 (4.3.19) 完全相同. 可见静载荷引起的不等刚度力矩对于单自由度陀螺或二自由度陀螺有着相同的漂移率公式.

4.3.4　载体线振动引起的陀螺漂移

设载体作振幅为 b、频率为 ω 的线振动, 振动方向相对 $(O-xyz)$ 的方向余弦为 c_i $(i=x,y,z)$. 忽略常值的重力项, 比力 $\boldsymbol{f}$ 的模为以下周期函数:

$$f = b\omega^2 \sin\omega t \tag{4.3.22}$$

将上式代入方程 (4.3.13), 令 $k_i=\sqrt{K_i/m}$, 得到简化为质点的转子在周期变化惯性力激励下的受迫振动方程,

$$\ddot{e}_i+k_i^2e_i=bc_i\omega^2\sin\omega t\quad(i=x,y,z)\tag{4.3.23}$$

自由振动衰减后, 此方程的受迫振动特解为

$$e_i=\sigma_ibc_i\sin\omega t\quad(i=x,y,z)\tag{4.3.24}$$

其中

$$\sigma_i=\frac{s_i^2}{1-s_i^2},\quad s_i=\frac{\omega}{k_i}\tag{4.3.25}$$

将式 (4.3.22),(4.3.24) 代入代入 (4.3.15), 得到载体线振动引起的不等刚度力矩

$$M_x=\frac{1}{2}mb^2\omega^2c_yc_z\left(\sigma_y-\sigma_z\right)\left(1-\cos2\omega t\right)\tag{4.3.26a}$$

$$M_y=\frac{1}{2}mb^2\omega^2c_zc_x\left(\sigma_z-\sigma_x\right)\left(1-\cos2\omega t\right)\tag{4.3.26b}$$

力矩中出现常值项是由于惯性力矢量与位移矢量同时改变方向, 因而使周期变化的干扰力矩受到 “整流” 作用的结果.

将式 (4.3.26b) 代入方程 (4.3.18), 其周期项使陀螺产生绕支架轴的 2ω 频率的受迫振动, 常值项引起与 (4.3.19) 类似的漂移, 漂移率 Ω_{d} 为

$$\Omega_{\mathrm{d}}=\frac{mb^2\omega^2c_zc_x}{2H}\left(\sigma_x-\sigma_z\right)\tag{4.3.27}$$

陀螺仪的结构设计必须保证使转子质心因支架弹性变形而产生的线振动固有频率 k_x,k_y 避开载体的线振动频率 ω, 此外还必须保证使陀螺绕框架轴的角振动固有频率 k 避开二倍载体线振动频率 2ω, 以防止出现谐振现象使误差急剧增大.

将式 (4.3.26) 代入二自由度陀螺进动方程 (4.3.20), 得到的漂移率公式与式 (4.3.27) 相同

$$\Omega_{\mathrm{d}x}=\frac{mb^2\omega^2c_zc_x}{2H}\left(\sigma_x-\sigma_z\right)\tag{4.3.28a}$$

$$\Omega_{\mathrm{d}y}=\frac{mb^2\omega^2c_yc_z}{2H}\left(\sigma_y-\sigma_z\right)\tag{4.3.28b}$$

除载体的振动方向与极轴一致或相垂直的特殊情况以外, 载体沿其他任意方向的线振动都可能引起漂移.

对于转子有径向质量偏心情形, 即使载体线振动方向与极轴一致, 只要振动频率等于转子旋转频率 ω_0, 仍可能引起陀螺漂移. 忽略常值的重力项, 设 b 和 δ^* 为

轴向线振动的振幅以及线振动与旋转运动之间的相位差, 载体线振动引起的比力 $\boldsymbol{f}$ 沿极轴方向周期变化

$$\boldsymbol{f} = b\omega_0^2 \sin(\omega_0 t - \delta^*)\,\boldsymbol{k} \tag{4.3.29}$$

径向偏心矢量 $\boldsymbol{\Delta}$ 按式 (4.3.6) 变化时, 忽略弹性轴的内阻尼, 令 $\zeta = \delta = 0$, 转子几何中心 O_1 的弹性位移 $\boldsymbol{e}$ 可从式 (4.3.8) 导出

$$\boldsymbol{e} = \sigma^* \Delta \exp(\cos\omega_0 t\,\boldsymbol{i} + \sin\omega_0 t\,\boldsymbol{j}) \tag{4.3.30}$$

将式 (4.3.6), (4.3.30) 代入式 (4.3.2), 计算质心 O_c 相对支点 O 的位移 $\boldsymbol{r}_c$

$$\boldsymbol{r}_c = (1+\sigma^*)\,\Delta \exp(\cos\omega_0 t\,\boldsymbol{i} + \sin\omega_0 t\,\boldsymbol{j}) \tag{4.3.31}$$

利用式 (4.3.29),(4.3.31) 计算转子的惯性力对 O 点的力矩 $\boldsymbol{M}_a$

$$\boldsymbol{M}_a = \boldsymbol{r}_c \times m\boldsymbol{f} \tag{4.3.32}$$

$\boldsymbol{M}_a$ 相对 x, y 轴的投影为

$$M_{ax} = \frac{1}{2} m\Delta b\omega_0^2 c_y c_z (1+\sigma^*)\cos\delta^* + (2\omega_0\text{频率的周期项}) \tag{4.3.33a}$$

$$M_{ay} = \frac{1}{2} m\Delta b\omega_0^2 c_y c_z (1+\sigma^*)\sin\delta^* + (2\omega_0\text{频率的周期项}) \tag{4.3.33b}$$

常值项的出现是由于周期变化的比力 $\boldsymbol{f}$ 与力臂 $\boldsymbol{\rho}$ 同时改变方向而产生“整流”作用的结果.

将式 (4.3.33b) 代入方程 (4.3.18), 其周期项引起 σ^* 频率的受迫振动, 常值项引起的漂移率为

$$\Omega_d = \frac{m\Delta b\omega_0^2 (1+\sigma^*)\sin\delta^*}{2H} \tag{4.3.34}$$

只要转子存在径向偏心 Δ, 即使旋转轴绝对刚硬, 仍有漂移存在. 因此陀螺的稳态旋转频率 ω_0 必须避开载体的线振动频率, 且陀螺绕支架轴的角振动频率必须避开二倍旋转频率 $2\omega_0$, 以防止谐振现象发生.

将 (4.3.33) 代入二自由度陀螺进动方程 (4.3.20), 得到与式 (4.3.34) 相同的漂移率公式

$$\Omega_{dx} = \frac{m\Delta b\omega_0^2 (1+\sigma^*)\sin\delta^*}{2H} \tag{4.3.35a}$$

$$\Omega_{dy} = \frac{m\Delta b\omega_0^2 (1+\sigma^*)\cos\delta^*}{2H} \tag{4.3.35b}$$

此漂移率不仅与载体线振动的振幅和频率有关, 而且取决于线振动与转子旋转运动之间的相位差 δ^*.

4.3.5 速率陀螺的固有频率

讨论框架绕 x 轴的角弹性变形对速率陀螺固有频率的影响. 定义 $(O-x^*y^*z^*)$ 和 $(O-xyz)$ 为弹性变形前后的框架坐标系, θ 为 $(O-xyz)$ 相对 $(O-x^*y^*z^*)$ 绕 x 轴的弹性角位移 (见图 4.21). 各坐标系之间的关系为

$$(O-\xi\eta\zeta)\xrightarrow[\eta,y^*]{\beta}(O-x^*y^*z^*)\xrightarrow[x^*,x]{\theta}(O-xyz)$$

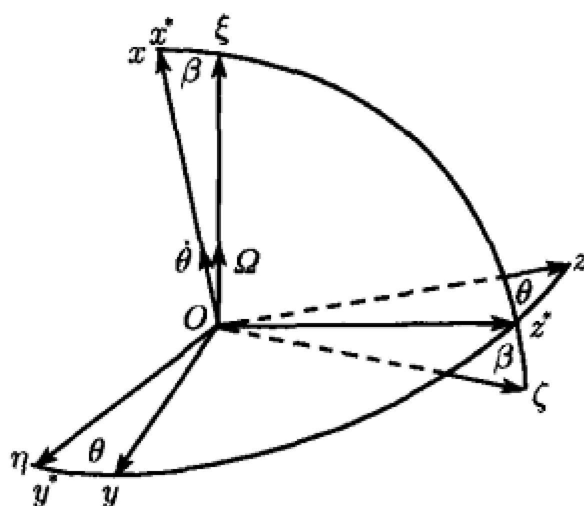


图 4.21　速率陀螺框架轴的变形前后位置

框架转轴的反对称弯曲变形使陀螺极轴增加绕 x 轴的转动自由度, 静止基座上框架角速度在 $(O-xyz)$ 轴系中的投影为

$$\omega_x=\dot{\theta},\ \ \omega_y=\dot{\beta},\ \ \omega_z=0 \tag{4.3.36}$$

框架组合体的动量矩投影为

$$H_x=A\dot{\theta},\ \ H_y=B\dot{\beta},\ \ H_z=H \tag{4.3.37}$$

此组合体除受到 (4.2.7) 所示弹簧和阻尼器力矩 M_y 作用以外, 还受到弹性轴产生的与 θ 成比例的约束力矩 M_x 作用, 设 K_1 为比例系数

$$M_x=-K_1\theta \tag{4.3.38}$$

将式 (4.3.36),(4.3.37), (4.2.7),(4.3.38) 代入动量矩定理 (2.2.32), 略去阻尼作用, 令 $D=0$. 得到

$$A\ddot{\theta}+H\dot{\beta}+K_1\theta=0 \tag{4.3.39a}$$

$$B\ddot{\beta}-H\dot{\theta}+K\beta=0 \tag{4.3.39b}$$

此线性方程组的特征方程为

$$ABs^4+\left(H^2+BK_1+AK\right)s^2+K_1K=0 \tag{4.3.40}$$

设陀螺的动量矩足够大, 且框架转轴抗角弹性变形的刚度极强, $K_1 \gg K$, 略去上式中括号内的 AK 项, 解出以下特征值

$$\left(s^2\right)_{1,2} = \frac{-\left(H^2 + BK_1\right) \pm \sqrt{\left(H^2 + BK_1\right)^2 - 4ABK_1K}}{2AB} \tag{4.3.41}$$

定义以下小参数 ε

$$\varepsilon = \frac{4ABK_1K}{\left(H^2 + BK_1\right)^2} \tag{4.3.42}$$

将式 (4.3.41) 展成 ε 的幂级数, 令 $s = \pm \mathrm{i}\omega$, 只保留 ε 的一次项, 得到速率陀螺的固有频率

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{B + (H^2/K_1)}} \tag{4.3.43a}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{K_1 + (H^2/B)}{A}} \tag{4.3.43b}$$

令式 (4.3.43a) 中 $K_1 \to \infty$, 即得到支架转轴绝对刚硬时的固有频率 $\omega_1 = \sqrt{K/B}$. 式 (4.3.43b) 为陀螺绕 ξ 轴做角振动的固有频率, 转子不旋转时转变为刚体绕 ξ 轴的扭振频率 $\omega_2 = \sqrt{K_1/A}$. 式 (4.3.43a) 可用来解释实践中观察到的速率陀螺的固有频率 ω_1 随转速 ω_0 升高而降低的现象 (见图 4.22).

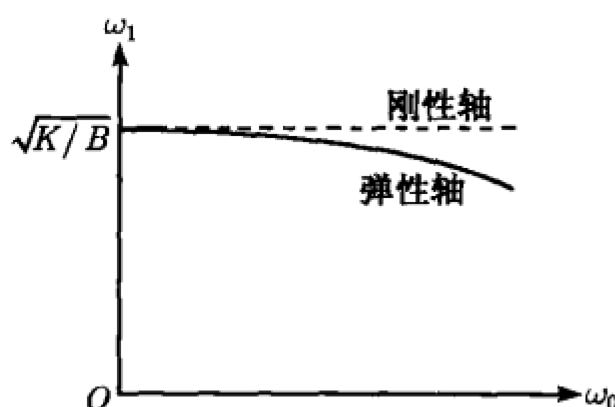


图 4.22　速率陀螺固有频率随转速的变化

第5章　垂直陀螺的进动理论

行进中的船舶、飞机和车辆需要一个稳定的平台作为导航系统、火炮系统或各种测量系统的水平基准. 第 4 章叙述的重力摆虽能模拟地垂线, 但因易受干扰而不可能实际应用. 早在 18 世纪就已出现利用陀螺摆效应制造稳定水平面的设想, 但真正用于实践的仪器始于 1866 年的弗勒里埃 (G. Fleuriais) 陀螺地平仪. 1917 年德国人安休茨 (H. Anschütz-Kaempfe) 采用液体消振器将陀螺地平仪做成实用的航空指示仪表. 同一时期美国人斯佩里 (E.A. Sppery) 的陀螺地平仪采用了径向修正技术. 陀螺摆或径向修正两种类型的陀螺垂直仪至今仍是简单有效的水平面指示仪器和自动导航的惯性元件. 本章基于陀螺进动理论叙述这两类垂直陀螺的力学原理. 分析陀螺摆的各种阻尼措施的力学原理以及载体的各种牵连运动对两类垂直陀螺产生的指示误差. 讨论不受加速度干扰的舒勒周期在陀螺摆上实现的可能性. 利用角度坐标的复数表达和相平面奇点理论判断极点轨迹的定性特点, 以避免繁琐的数学推导. 陀螺垂直仪也可由多陀螺组成, 以四陀螺垂直仪为例分析其动力学问题. 最后讨论各种非线性因素影响陀螺运动的更具普遍性问题.

5.1　陀螺垂直仪

5.1.1　平面极点轨迹

以陀螺支点 O 为中心作单位球面, 与基准坐标系 $(O-\xi\eta\zeta)$ 的 ζ 轴交于 O' 点, 过 O' 点作单位球面的切平面 (ξ',η') 与 (ξ,η) 平面平行. 极轴与 (ξ',η') 平面的交点 P 的坐标为

$$\xi'=\sec\alpha\tan\beta,\ \ \eta'=-\tan\alpha \tag{5.1.1}$$

当极轴在 ζ 轴附近的小范围内运动时, 略去 α,β 的二阶以上微量, 简化为

$$\xi'=\beta,\ \ \eta'=-\alpha \tag{5.1.2}$$

定义复变量 z

$$z=\alpha+\mathrm{i}\beta \tag{5.1.3}$$

(ξ',η') 平面即 z 的复数平面, 可将 $-\eta'$ 轴改称为 α 轴, ξ' 轴称为 β 轴. 极轴在单位球面上的轨迹在 O' 点附近可近似地以 (α,β) 平面上的轨迹代替, 即平面**极点轨迹**(见图 5.1).

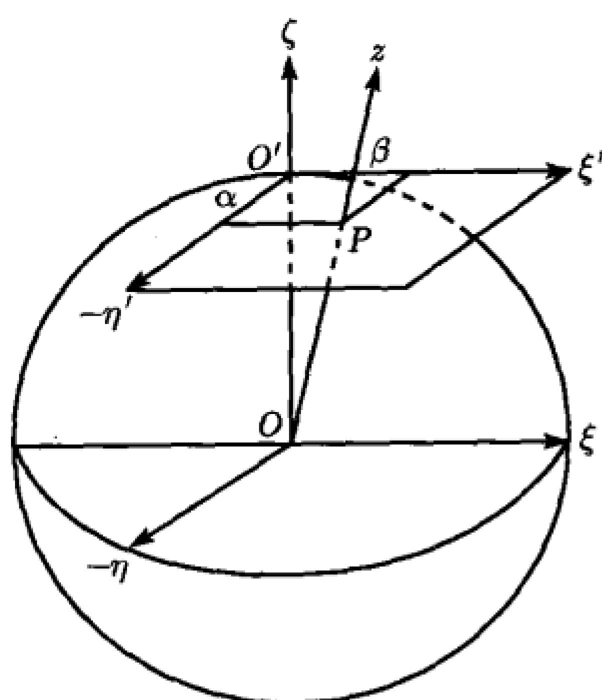


图 5.1　陀螺的平面极点轨迹

如陀螺进动方程 (3.2.25) 中力矩 M_x,M_y 仅为角度坐标 α, β 的函数而不显含时间 t, 将二式相除消去时间微分, 化作

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\alpha} = -\frac{M_x(\alpha, \beta)}{M_y(\alpha, \beta)} \tag{5.1.4}$$

此一阶微分方程完全确定陀螺的极点轨迹曲线族. 进动方程 (3.2.25) 也可利用复变量 z 表示为复数形式. 令 (3.2.25b) 乘以 i, 与 (3.2.25a) 相加, 得到

$$\dot{z} = \frac{1}{H}(-M_y + \mathrm{i}M_x) \tag{5.1.5}$$

其中 M_x,M_y 为 z 及其共轭复数 $\bar{z}$ 的函数. 方程 (5.1.5) 存在常值特解 $z_s = \alpha_s + \mathrm{i}\beta_s$, 其中 α_s, β_s 为方程 (5.1.4) 的奇点, 满足

$$\begin{aligned} M_x(\alpha_s, \beta_s) = 0 \\ M_y(\alpha_s, \beta_s) = 0 \end{aligned} \tag{5.1.6}$$

表明 z_s 的物理意义为极轴的平衡位置. 利用附录三中表 A.3 或表 A.4 列出的判别式确定奇点的类型, 就能定性地判断出平衡位置附近极点轨迹的几何特征.

5.1.2　垂直陀螺的视运动

先讨论免除 M_x,M_y 力矩作用的自由陀螺. 令进动方程 (3.2.25) 的力矩项为零, 得到

$$\dot{\alpha} = \dot{\beta} = 0 \tag{5.1.7}$$

α, β 的常数解表明自由陀螺的极轴在惯性空间中保持方位不变, 即 2.2.4 节中叙述的陀螺定轴性. 利用此特性, 自由陀螺可被用来建立惯性坐标系. 在自然坐标系或

地理坐标系中, 由于坐标系在惯性空间中转动, 自由陀螺的极轴必相对坐标系产生相反方向的转动. 这种在动坐标系中观察到的相对运动称为自由陀螺的**视运动**.

对于极轴在地垂线附近的自由陀螺, 将自然坐标系 $(O-XYZ)$ 取作参考坐标系 $(O-\xi\eta\zeta)$, 令进动方程 (3.3.14) 中的 M_x,M_y 为零, 得到自然坐标系中自由陀螺的动力学方程

$$\dot{\alpha}-\Omega\beta=0 \tag{5.1.8a}$$

$$\dot{\beta}+\Omega\alpha=-\frac{V}{R} \tag{5.1.8b}$$

设初始时陀螺的极轴沿地垂线, 令方程 (5.1.8) 中 $\alpha(0)=\beta(0)=0$, 导出陀螺视运动的初始角速度

$$\dot{\alpha}(0)=0,\ \ \dot{\beta}(0)=-\frac{V}{R} \tag{5.1.9}$$

$\dot{\beta}(0)$ 的存在使极轴逐渐偏离地垂线位置.

如对陀螺施加按以下规律变化的力矩

$$M_x=\frac{HV}{R},\quad M_y=0 \tag{5.1.10}$$

将此项力矩代入方程 (5.1.8) 可消除非齐次项, 成为

$$\dot{\alpha}-\Omega\beta=0 \tag{5.1.11a}$$

$$\dot{\beta}+\Omega\alpha=0 \tag{5.1.11b}$$

利用式 (5.1.3) 定义的复变量 z, 将方程组 (5.1.11) 合并为复数方程

$$\dot{z}+\mathrm{i}\Omega z=0 \tag{5.1.12}$$

方程 (5.1.12) 有常值特解 $z_s=0$, 表明极轴的平衡位置与地垂线一致. 视运动被消除是因为力矩 (5.1.10) 迫使陀螺进动以跟踪自然坐标系的转动. 根据表 A.4 判断, 此平衡位置在 z 的复数平面内所对应的奇点 $\alpha_s=\beta_s=0$ 为中心, 平衡位置附近的极点轨迹为同心圆族. 极轴如偏离地垂线, 则围绕地垂线作周期超过 24 小时的圆锥运动.

长期以来, 人们力图创造出一种仪表, 能在摇摆的船舶或飞机中指示地垂线, 从而为导航系统或武器系统提供稳定的水平面. 复摆可算作是最简单的垂直仪, 但它对水平加速度过于敏感, 而理论上不受干扰的舒勒条件在复摆上无法实现. 陀螺仪出现以后, 由于它对冲击干扰的高度稳定性而自然成为实现垂直仪的理想工具. 虽然利用修正力矩 (5.1.10) 可以消除自由陀螺的视运动使极轴保持垂直, 但此垂直位置只能预先对准而不能自动寻找, 而且由于方程 (5.1.11) 的系数 Ω 极小, 在实现修

正力矩时的微小偏差或来自其他方面的微小干扰力矩会使极轴显著偏离地垂线，继而产生周期极长的视运动，因此它还不能成为有实际使用价值的垂直仪. 利用复摆对地垂线的趋向性和陀螺仪对冲击干扰的稳定性，将二者结合起来，方能创造出自动寻找并稳定地指示地垂线的仪表，即下面将讨论的陀螺垂直仪和陀螺摆.

5.1.3　陀螺垂直仪的运动方程

对于极轴在地垂线附近的自由陀螺，如能测出极轴偏离地垂线的角度坐标 α 和 β，并按以下规律对陀螺施加修正力矩

$$M_x = -C\beta, \quad M_y = C\alpha \tag{5.1.13}$$

此力矩矢量沿径向指向地垂线. 根据动量矩定理判断，与动量矩矢量方向一致的陀螺极轴必朝地垂线方向进动，C 为径向修正系数. 力矩 (5.1.13) 赋予陀螺以自动寻找地垂线的能力，从而将自由陀螺改造为垂直仪，称为**径向修正陀螺垂直仪**.

实现径向修正力矩的具体方案很多，最简单的技术方案是在陀螺仪的内环上悬挂重力摆式的小活门，遮掩住压缩空气的通道. 极轴处于垂直状态时活门将气隙完全遮掩. 当极轴带动内环偏离地垂线时，活门露出部分气隙，使从气隙喷出的压缩空气所产生的反冲力恰好构成对支点的径向修正力矩 (图 5.2). 更普遍的径向修正方案利用自动控制技术. 例如，在自由陀螺内环上悬挂小复摆 P_1 和 P_2 以量测 α 和 β，控制回路将量测信号放大后输入沿外环轴和内环轴安装的力矩器产生径向修正力矩 (5.1.13)(见图 5.3). 设复摆 P_1 和 P_2 有相同的质量 m' 和摆距 l'，其悬挂轴分别为 x 和 y 轴，α' 和 β' 分别为 P_1 偏离 (ξ,ζ) 平面和 P_2 偏离 (η,ζ) 平面的角度. 只保留 α',β' 的一次项时，作用在两只复摆上的重力与惯性力相对悬挂轴的力矩 M'_x 和 M'_y 与式 (4.1.55) 相同，只须将 α, β 改为 α',β', μ 的定义改为 $m'gl'$，设 $V \ll \sqrt{gR}$，略去 V^2/gR 项，得到

$$\begin{aligned} M'_x &= -\mu\left(\alpha' + \frac{V\Omega}{g}\right) \\ M'_y &= -\mu\left(\beta' - \frac{\dot{V}}{g}\right) \end{aligned} \tag{5.1.14}$$

M'_x, M'_y 分别作用于 P_1 和 P_2. 由于复摆的固有频率远高于变化缓慢的力矩 M'_x, M'_y，根据 4.1.3 节的分析，可以足够精确地认为重力矩与悬挂点加速度引起的惯性力矩互相平衡. 令 M'_x, M'_y 为零，导出

$$\alpha' = -\frac{V\Omega}{g} \quad , \quad \beta' = \frac{\dot{V}}{R} \tag{5.1.15}$$

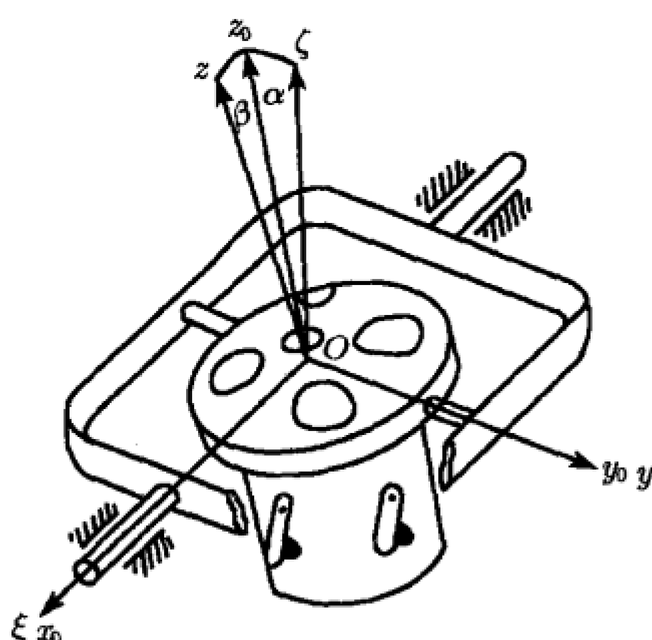


图 5.2 径向修正陀螺垂直仪

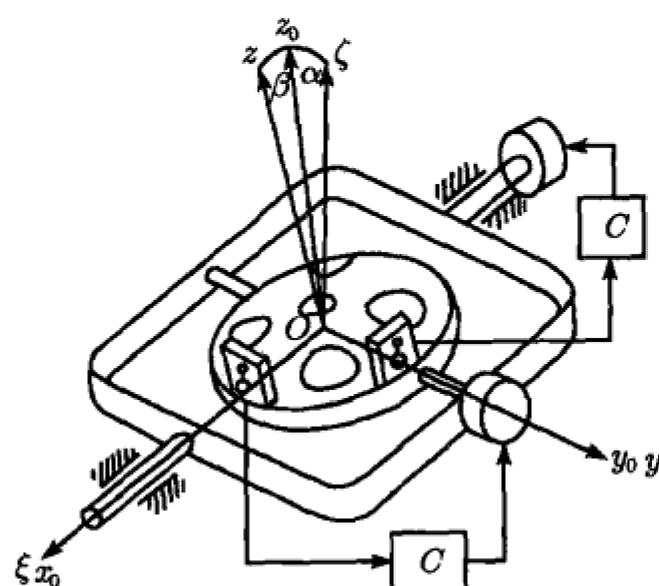


图 5.3 由控制回路实现的径向修正陀螺垂直仪

陀螺的修正力矩与复摆相对内环的转角成正比, 将式 (5.1.13) 中的 α, β 改作 $\alpha - \alpha', \beta - \beta'$, 并将式 (5.1.15) 代入后, 得到

$$M_x = -C\left(\beta - \frac{\dot{V}}{g}\right), \quad M_y = C\left(\alpha + \frac{V\Omega}{g}\right) \tag{5.1.16}$$

将式 (5.1.16) 代入进动方程 (3.3.14), 得到 O 点沿 $\mathscr{N}$ 球面任意运动时陀螺垂直仪相对自然坐标系的进动方程

$$\dot{\alpha} - \Omega\beta + c\alpha = -\frac{cV\Omega}{g} \tag{5.1.17a}$$

$$\dot{\beta} + \Omega\alpha + c\beta = \frac{c\dot{V}}{g} - \frac{V}{R} \tag{5.1.17b}$$

参数 c 定义为

$$c = \frac{C}{H} \tag{5.1.18}$$

利用式 (5.1.3) 定义的复变量 z, 将方程组 (5.1.17) 合并为复数方程

$$\dot{z} + (c + \mathrm{i}\Omega)\,z = \frac{c}{g}\left[-V\Omega + \mathrm{i}\left(\dot{V} - \frac{gV}{cR}\right)\right] \tag{5.1.19}$$

5.1.4 静止基座上的运动规律

设载体在惯性空间中静止, 令方程 (5.1.19) 中 $V = \Omega = 0$, 得到齐次方程

$$\dot{z} + cz = 0 \tag{5.1.20}$$

存在常值特解 $z_s = 0$, $c > 0$ 时对应的奇点 $\alpha_s = \beta_s = 0$ 为稳定结点. 陀螺极轴的平衡位置沿地垂线方向, 附近的极点轨迹是向地垂线趋近的径向直线族 (见图 5.4). 设 z_0 为 z 的初始值, 也可利用式 (4.1.48) 直接写出方程 (5.1.20) 的解

$$z = z_0 \mathrm{e}^{-ct} \tag{5.1.21}$$

极轴按指数规律向地垂线趋近, 时间常数等于 c 的倒数. 如 $c < 0$, 奇点转变为不稳定结点, 极轴沿径向直线远离地垂线位置. $c = 0$ 为无修正的平衡状态. 因此 $c > 0$ 是陀螺平衡状态渐近稳定的充分必要条件.

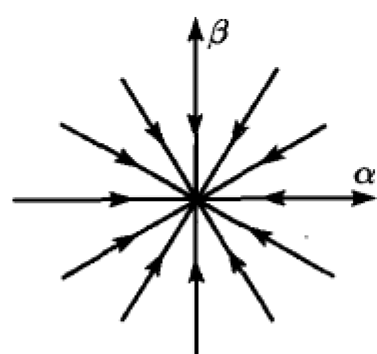


图 5.4　径向修正陀螺垂直仪的极点轨迹

5.1.5　基座运动的影响

高频周期变化的干扰作用对陀螺进动的影响极小, 以后的分析仅限于基座的平缓运动. 分别讨论以下几种情况:

1) O 点沿 $\mathscr{N}$ 球面上的大圆弧做匀速运动

令方程 (5.1.19) 中 $\Omega = \dot{V} = 0$, 得到

$$\dot{z} + cz = -\frac{\mathrm{i}V}{R} \tag{5.1.22}$$

常值特解 z_s 与载体速度 V 成比例

$$z_s = -\frac{\mathrm{i}V}{cR} \tag{5.1.23}$$

对应的奇点为

$$\alpha_s = 0, \quad \beta_s = -\frac{V}{cR} \tag{5.1.24}$$

β_s 表示极轴的平衡位置偏离地垂线的角度, 称为陀螺垂直仪的**速度误差**. 此偏差角的存在使力矩器中产生与 β_s 成比例的修正力矩, 它迫使陀螺进动以跟踪自然坐标系的转动, 极轴才能相对基座保持静止. 方程 (5.1.22) 的奇点类型不受非齐次项影响, 仍为稳定结点. 平衡位置附近的极点轨迹仍为向奇点趋近的径向直线族. 如对陀螺另外施加按式 (5.1.10) 规律变化的修正力矩以保证极轴跟踪自然坐标系, 则偏差角 β_s 的作用即被代替. 增加此力矩后运动方程成为齐次方程, 奇点与坐标原点重合, 速度误差遂不存在.

2) O 点沿 $\mathscr{N}$ 球面上的小圆弧做匀速运动

设 O 点以 O_1 为中心, 沿小圆弧做匀速运动, 测地半径 ρ 远小于地球半径 R. 此运动称为**盘旋**(见图 5.5), 逆时针运动 ($\Omega > 0$) 为左盘旋, 顺时针运动 ($\Omega < 0$) 为右盘旋. 令方程 (5.1.19) 中 $V = \Omega\rho, \dot{V} = 0$, 略去 ρ/R 项, 得到

$$\dot{z} + (c + \mathrm{i}\Omega)\, z = -\frac{c\Omega^2\rho}{g} \tag{5.1.25}$$

利用式 (4.1.48) 写出其一般解

$$z = z_c + (z_0 - z_c)\, \mathrm{e}^{-(c+\mathrm{i}\Omega)t} \tag{5.1.26}$$

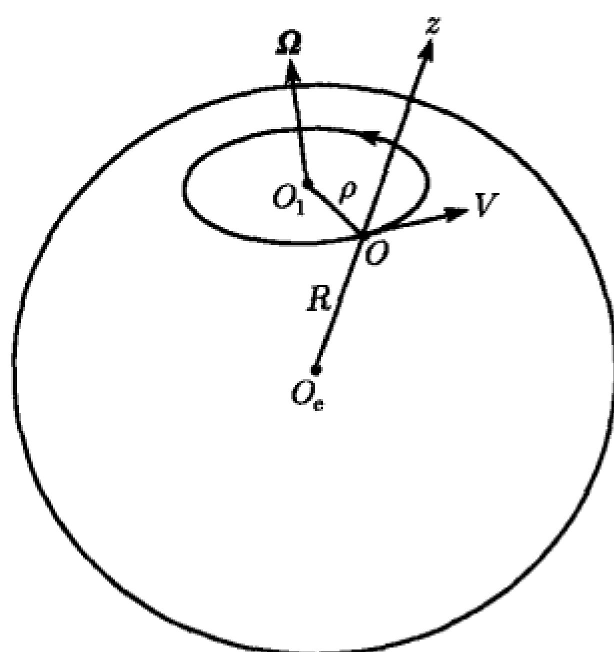


图 5.5　载体的盘旋运动

z_c 为常值特解, 称为陀螺垂直仪的盘旋误差

$$z_c = \frac{c\Omega^2\rho}{g\left(\Omega^2+c^2\right)}(-c+\mathrm{i}\Omega) \tag{5.1.27}$$

或

$$\alpha_c = -\frac{c^2\Omega^2\rho}{g\left(\Omega^2+c^2\right)},\quad \beta_c = \frac{c\Omega^3\rho}{g\left(\Omega^2+c^2\right)} \tag{5.1.28}$$

此误差的产生原因是盘旋引起的离心惯性力使小复摆偏转而出现错误信息, 如将控制回路切断即可避免盘旋误差发生. 根据附录三的表 A.4 判断, 奇点 z_c 为稳定焦点, 平衡位置附近的极点轨迹为螺线族. 图 5.6 表示载体从沿大圆弧的匀速运动转入盘旋时的极点轨迹.

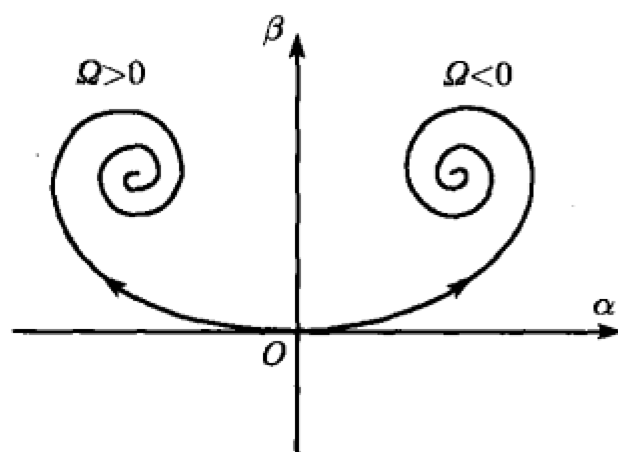


图 5.6　盘旋状态下陀螺垂直仪的极点轨迹

3) O 点沿 $\mathscr{N}$ 球面上的大圆弧做变速运动

令方程 (5.1.19) 中 $\Omega=0$, V 为时间 t 的任意函数, 得到

$$\dot{z}+cz = \mathrm{i}\left[\frac{c\dot{V}(t)}{g}-\frac{V(t)}{R}\right] \tag{5.1.29}$$

仍利用式 (4.1.48) 写出其一般解

$$z(t)=\left\{z(0)+\mathrm{i}\int_0^t\left[\frac{c\dot V(\tau)}{g}-\frac{V(\tau)}{R}\right]\mathrm{e}^{c\tau}\mathrm{d}\tau\right\}\mathrm{e}^{-ct} \tag{5.1.30}$$

使用分部积分法导出以下等式

$$\int_0^t V(\tau)\,\mathrm{e}^{c\tau}\mathrm{d}\tau=\frac{1}{c}\left[V(t)\,\mathrm{e}^{ct}-V(0)-\int_0^t\dot V(\tau)\,\mathrm{e}^{c\tau}\mathrm{d}\tau\right] \tag{5.1.31}$$

利用此等式将式 (5.1.30) 化作

$$z=z_{\mathrm{s}}+(z_0-z_{s0})\,\mathrm{e}^{-ct}+z_a \tag{5.1.32}$$

式中 $z_0=z(0)$, $z_{\mathrm{s}}=-\mathrm{i}V/cR$ 为式 (5.1.23) 定义的速度误差, 但其数值随 V 变化而不是常值, $z_{\mathrm{s}0}$ 为 z_{s} 的初始值; z_{a} 是由载体加速度引起的误差, 称为**加速度误差**

$$z_{\mathrm{a}}=\frac{\mathrm{i}c}{g}\left(1+\frac{g}{c^2R}\right)\mathrm{e}^{-ct}\int_0^t\dot V(\tau)\,\mathrm{e}^{c\tau}\mathrm{d}\tau \tag{5.1.33}$$

载体做匀加速运动时, 令 $\dot V=a$, 加速度误差简化为

$$z_{\mathrm{a}}=z_{\mathrm{a}}^*\left(1-\mathrm{e}^{-ct}\right) \tag{5.1.34}$$

常数 z_{a}^* 为时间 t 无限增大时加速度误差的极限值

$$z_{\mathrm{a}}^*=\frac{\mathrm{i}a}{g}\left(1+\frac{g}{c^2R}\right) \tag{5.1.35}$$

将式 (5.1.34) 代入式 (5.1.32), 得到载体作匀加速运动时的陀螺运动规律

$$z=z_{\mathrm{s}}+z_{\mathrm{a}}^*+(z_0-z_{\mathrm{s}0}-z_{\mathrm{a}}^*)\,\mathrm{e}^{-ct} \tag{5.1.36}$$

载体匀速运动是 $a=0$ 的特殊情形

$$z=z_{\mathrm{s}}+(z_0-z_{\mathrm{s}})\,\mathrm{e}^{-ct} \tag{5.1.37}$$

极轴按与式 (5.1.21) 类似的指数规律向平衡位置 z_{s} 趋近. 载体静止时, 此平衡位置与地垂线一致. 载体匀速运动时, 平衡位置偏离地垂线产生速度误差. 载体变速时再增加加速度误差.

5.2 陀 螺 摆

5.2.1 陀螺摆的运动方程

对自由陀螺施加按以下规律变化的修正力矩

$$M_x=-\mu\alpha,\quad M_y=-\mu\beta \tag{5.2.1}$$

则陀螺极轴如偏离地垂线, 此力矩将迫使极轴沿以地垂线为中心轴的圆锥面进动, 从而避免使偏角扩大. 陀螺的运动规律与 5.1.2 节中叙述的垂直陀螺视运动十分类似, 但 μ 足够大时可显著增强抗干扰力矩的能力, 并缩短圆锥运动的周期. 采用这种原理的陀螺垂直仪称为**陀螺摆**.

力矩 (5.2.1) 可利用带小复摆和力矩器的控制回路实现, 也可将内环组合体的重心沿极轴偏离支点, 直接利用重力矩实现. 与复摆类似, 根据重心在支点的下方或上方区分为带下摆或上摆的陀螺摆 (见图 5.7). 设 m, l 为内环组合体的质量和质心相对支点的偏心距, $\mu = mgl$ 为摆性系数, 则重力和惯性力相对 O 点的力矩与式 (4.1.55) 相同. 如 $V \ll \sqrt{gR}$, 略去 V^2/gR 项, 得到

$$M_x = -\mu\left(\alpha + \frac{V\Omega}{g}\right), \quad M_y = -\mu\left(\beta - \frac{\dot{V}}{g}\right) \tag{5.2.2}$$

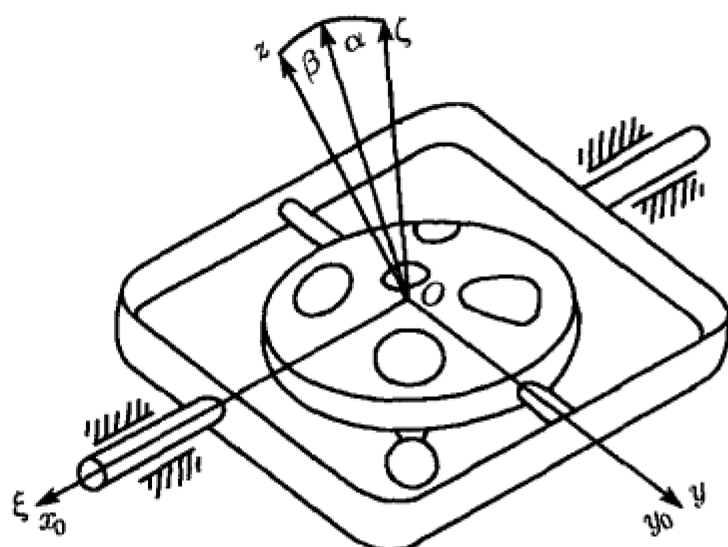


图 5.7　陀螺摆

将式 (5.2.2) 代入方程 (3.3.14), 得到陀螺摆相对自然坐标系的进动方程

$$\dot{\alpha} - (k + \Omega)\,\beta = -\frac{k\dot{V}}{g} \tag{5.2.3a}$$

$$\dot{\beta} + (k + \Omega)\,\alpha = -\left(\frac{V}{R} + \frac{kV\Omega}{g}\right) \tag{5.2.3b}$$

参数 k 定义为

$$k = \frac{\mu}{H} \tag{5.2.4}$$

使用复数坐标 $z = \alpha + \mathrm{i}\beta$, 将式 (5.2.3) 合并为复数方程

$$\dot{z} + \mathrm{i}\,(k + \Omega)\,z = -\frac{k}{g}\left[\dot{V} + \mathrm{i}\left(\frac{g}{kR} + \Omega\right)V\right] \tag{5.2.5}$$

5.2.2　静止基座上的运动规律

设载体在惯性空间中静止, 令方程 (5.2.5) 中 $V=\Omega=0$, 得到与式 (5.1.12) 类似的齐次方程

$$\dot{z}+\mathrm{i}kz=0 \tag{5.2.6}$$

常值特解 $z_s=0$ 对应的奇点 $\alpha_s=\beta_s=0$ 为中心. 陀螺极轴的平衡位置沿地垂线方向, 附近的极点轨迹是围绕地垂线的同心圆族 (见图 5.8). 利用式 (4.1.48) 写出方程 (5.2.6) 的解

$$z=z_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt} \tag{5.2.7}$$

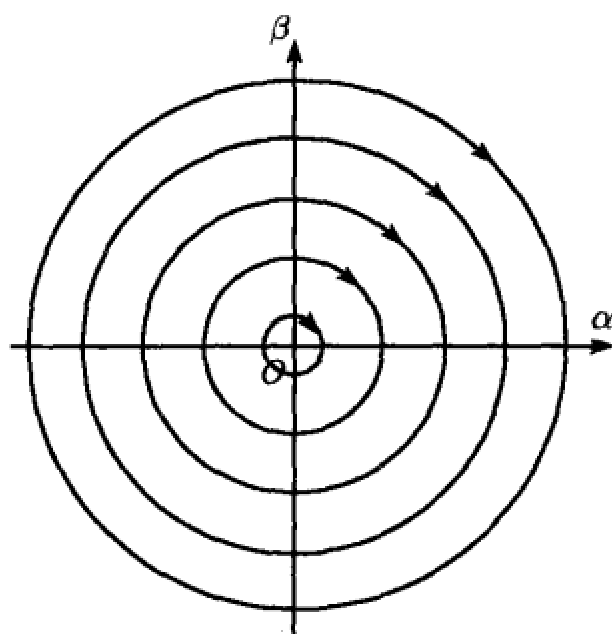


图 5.8　陀螺摆的极点轨迹

极点以 k 为角速度沿圆轨迹顺时针进动, 也就是 2.4.4 节中叙述的拉格朗日情形刚体的受迫规则进动, 参数 k 等于式 (2.4.28) 中的慢规则进动速度 Ω_1, 即陀螺摆的固有角频率.

5.2.3　基座运动的影响

1) O 点沿 $\mathscr{N}$ 球面上大圆弧匀速运动

令方程 (5.2.5) 中 $\Omega=\dot{V}=0$, 得到

$$\dot{z}+\mathrm{i}kz=-\frac{\mathrm{i}V}{R} \tag{5.2.8}$$

常值特解为

$$z_s=-\frac{V}{kR} \tag{5.2.9}$$

或

$$\alpha_s=-\frac{V}{kR},\quad \beta_s=0 \tag{5.2.10}$$

极轴的平衡位置偏离地垂线的角度 α_s 即陀螺摆的速度误差. α_s 的存在引起与之成比例的重力矩, 它迫使陀螺进动以跟踪自然坐标系的转动. 方程 (5.2.8) 对应的奇点类型仍为中心, 极点轨迹为围绕奇点的同心圆族.

如果对陀螺施加按 (5.1.10) 规律变化的修正力矩, 则动力学方程变为齐次, 奇点与坐标原点重合使速度误差消失.

2) O 点做盘旋运动

令方程 (5.2.5) 中 $V = \Omega\rho$, $\dot{V} = 0$, 略去 ρ/R 项, 得到

$$\dot{z} + \mathrm{i}(k + \Omega)z = -\frac{\mathrm{i}k\Omega^2\rho}{g} \tag{5.2.11}$$

利用式 (4.1.48) 写出其一般解

$$z = z_c + (z_0 - z_c)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k+\Omega)t} \tag{5.2.12}$$

陀螺摆的盘旋误差 z_c 定义为

$$z_c = -\frac{k\Omega^2\rho}{g(k + \Omega)} \tag{5.2.13}$$

或

$$\alpha_c = -\frac{k\Omega^2\rho}{g(k + \Omega)}, \quad \beta_c = 0 \tag{5.2.14}$$

此误差由盘旋产生的离心惯性力引起. 奇点 z_c 也是中心, 附近的极点轨迹仍为同心圆族. 进动周期 $T = 2\pi/(k + \Omega)$ 受盘旋运动影响而缩短 ($\Omega > 0$) 或延长 ($\Omega < 0$). 图 5.9 表示载体从沿大圆弧的匀速运动转入盘旋时的极点轨迹.

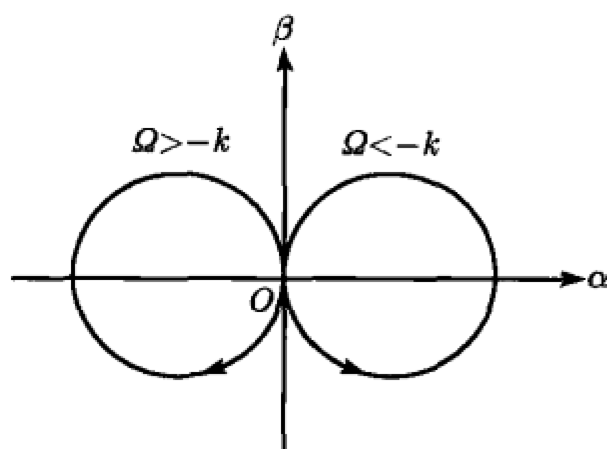


图 5.9　盘旋状态下陀螺摆的极点轨迹

3) O 点沿 $\mathscr{N}$ 球面上的大圆弧做变速运动

令方程 (5.2.5) 中 $\Omega = 0$, V 随时间 t 任意变化, 得到

$$\dot{z} + \mathrm{i}kz = -\left[\frac{k\dot{V}(t)}{g} + \frac{\mathrm{i}V(t)}{R}\right] \tag{5.2.15}$$

利用式 (4.1.48) 写出其一般解, 利用分部积分公式 (5.1.31) 化作

$$z = z_{\mathrm{s}} + (z_0 - z_{\mathrm{s}0})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt} + z_{\mathrm{a}} \tag{5.2.16}$$

式中 z_{a} 为加速度误差

$$z_{\mathrm{a}} = \frac{k}{g}\left(\frac{k_{\mathrm{s}}^2}{k^2} - 1\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\int_0^t \dot{V}(\tau)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\tau}\mathrm{d}\tau \tag{5.2.17}$$

其中 $k_{\mathrm{s}} = \sqrt{g/R}$ 为 4.1.5 节中定义的舒勒频率. 载体作匀加速运动时, 令 $\dot{V} = a$, z_{a} 简化为

$$z_{\mathrm{a}} = z_{\mathrm{a}}^* \left(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\right) \tag{5.2.18}$$

常数 z_{a}^* 定义为

$$z_{\mathrm{a}}^* = \frac{\mathrm{i}a}{g}\left(1 - \frac{k_s^2}{k^2}\right) \tag{5.2.19}$$

将式 (5.2.18) 代入式 (5.2.16), 得到载体做匀加速运动时的陀螺运动规律

$$z = z_{\mathrm{s}} + z_{\mathrm{a}}^* + (z_0 - z_{\mathrm{s}0} - z_{\mathrm{a}}^*)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt} \tag{5.2.20}$$

载体匀速运动为 $a = 0$ 的特殊情形

$$z = z_{\mathrm{s}} + (z_0 - z_{\mathrm{s}})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt} \tag{5.2.21}$$

此时极轴围绕平衡位置 z_{s} 以周期 $T_{\mathrm{p}} = 2\pi/k$ 作受迫规则进动. T_{p} 与陀螺摆的动量矩和摆性系数有关

$$T_{\mathrm{p}} = \frac{2\pi H}{\mu} \tag{5.2.22}$$

当载体静止时, 受迫规则进动的中心轴与地垂线一致. 载体匀速运动时, 此中心轴偏离地垂线产生速度误差. 载体变速时再增加加速度误差.

5.2.4　陀螺摆的舒勒条件

4.1.5 节中叙述的不受加速度干扰的舒勒周期在复摆上难以实现, 但有可能在陀螺摆上实现. 令陀螺摆的固有频率等于舒勒频率, 即

$$k = k_{\mathrm{s}} \tag{5.2.23}$$

则式 (5.2.17) 表示的加速度误差 z_{a} 消除为零. 不论载体如何变速, 陀螺摆除速度误差以外不增加其他误差. 式 (5.2.23) 为陀螺摆的舒勒条件, 满足此条件时陀螺摆的受迫规则进动周期为舒勒周期, 即 84.4 分钟.

将条件 (5.2.23) 代入进动方程 (5.2.15), 化作

$$\dot{z}+\mathrm{i}kz=-\frac{1}{k_{\mathrm{s}}R}\left(\dot{V}+\mathrm{i}k_{\mathrm{s}}V\right) \tag{5.2.24}$$

对于 $V(t)$ 的任意变化规律, 此方程都存在特解

$$z(t)=-\frac{V(t)}{k_{\mathrm{s}}R} \tag{5.2.25}$$

于是从另一角度证明, 只要满足舒勒条件, 且陀螺摆的起始偏角等于速度误差, 则不论载体沿大圆弧如何变速, 陀螺摆除速度误差以外不附加任何其他误差. 这时支点加速度所引起的惯性力矩恰好使陀螺摆进动到与新的速度误差相适应的平衡位置. 因此根据式 (5.2.25) 还可利用舒勒周期陀螺摆量测载体的绝对速度.

上述舒勒条件可以扩大到 O 点沿 $\mathscr{N}$ 球面作任意变速运动情形. 将条件 (5.2.23) 代入一般形式的动力学方程 (5.2.5), 化作

$$\dot{z}+\mathrm{i}(k_{\mathrm{s}}+\Omega)z=-\frac{1}{k_{\mathrm{s}}R}\left[\dot{V}+\mathrm{i}(k_{\mathrm{s}}+\Omega)V\right] \tag{5.2.26}$$

可看出, 式 (5.2.25) 也是方程 (5.2.26) 的特解. 只要初始条件与此特解一致, 不论 $V(t)$ 和 $\Omega(t)$ 如何变化均不存在加速度误差. 但 $\Omega\neq 0$ 时舒勒条件虽仍适用, 陀螺摆的进动周期却并不等于舒勒周期而与角速度 Ω 有关.

5.2.5 稳定性问题

对于带上摆的陀螺摆, 由于重心位置的改变, 重力矩 M_x 和 M_y 应同时改变方向, 进动方程 (5.2.6) 变为

$$\dot{z}-\mathrm{i}kz=0 \tag{5.2.27}$$

根据附录三的表 A.4, 奇点 $z_{\mathrm{s}}=0$ 仍为中心, 只是极轴的进动方向变为逆时针, 与带下摆的陀螺摆相反. 因此根据进动理论的分析, 无论陀螺摆的重心位置在支点的下方或上方, 其运动均为稳定. 但此结论带有近似性, 在陀螺的章动理论中将证明, 与下摆情形不同, 带上摆的陀螺摆稳定性附加有限制条件.

如陀螺摆的内环轴和外环轴不相交, 且内环组合体的重心 O_{c} 夹在内环轴与外环轴之间 (见图 5.10). 则内环组合体相对外环轴和内环轴的重力矩 M_x 和 M_y 中只有一个需改变方向. 如 O_{c} 与内环轴和外环轴的距离都等于 l, 陀螺的进动方程变为

$$\dot{z}\pm\mathrm{i}k\bar{z}=0 \tag{5.2.28}$$

其中 $\bar{z}$ 为 z 的共轭复数. 根据表 A.4 判断, 此方程的奇点 $z_{\mathrm{s}}=0$ 为鞍点, 极轴的平衡位置不稳定. 极点轨迹如图 5.11 所示.

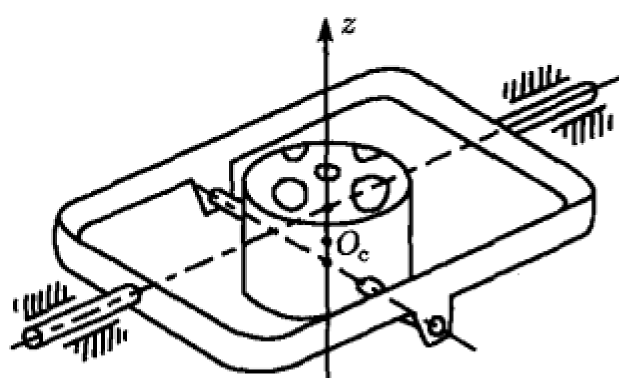


图 5.10　内外环轴不相交的陀螺摆

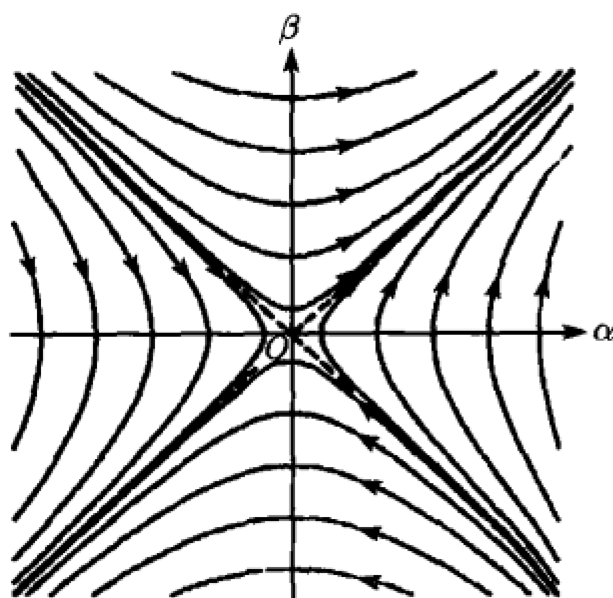


图 5.11　内外环轴不相交陀螺摆的极点轨迹

即使是稳定的陀螺摆, 极轴也只能围绕地垂线作受迫规则进动而不能直接指示地垂线. 因此还必须采取阻尼措施使稳定的平衡位置变为渐近稳定, 奇点类型由中心转变为稳定焦点或稳定结点, 极轴才可能趋近地垂线位置. 有以下几种阻尼方法:

1) 利用轴承黏性摩擦

设万向支架轴承内存在黏性摩擦, 摩擦力矩与支架的相对转动角速度成正比, D 为比例系数

$$M_x = -D\dot{\alpha}, \quad M_y = -D\dot{\beta} \tag{5.2.29}$$

增加此摩擦力矩的陀螺摆进动方程为

$$\dot{\alpha} - d\dot{\beta} - k\beta = 0 \tag{5.2.30a}$$

$$\dot{\beta} + d\dot{\alpha} + k\alpha = 0 \tag{5.2.30b}$$

其中 $d = D/H$. 将方程组 (5.2.30) 合并为复数方程

$$\dot{z} + \left(\frac{k}{1+d^2}\right)(d+\mathrm{i})\,z = 0 \tag{5.2.31}$$

此方程的奇点 $z_s=0$ 也是稳定焦点. 但这种阻尼方案实际上并不可行, 因为轴承摩擦的存在会使载体运动对陀螺产生干扰.

2) 利用径向修正力矩

增加径向修正力矩是有实际意义的阻尼方案. 在静止基座上的陀螺摆进动方程中增加式 (5.1.13) 表示的径向修正力矩后, 变为

$$\dot{z}+(c+\mathrm{i}k)\,z=0 \tag{5.2.32}$$

根据表 A.4 判断, 此方程的奇点 $z_s=0$ 为稳定焦点. 根据动量矩定理, 力矩矢量的方向表示极轴极点在 (α,β) 平面上的运动趋势. 仅须在陀螺摆上增加指向极点轨迹内部的力矩, 均能使极点向内转移至半径愈来愈小的圆轨迹而逐渐趋近奇点. 可见在式 (5.1.13) 的两个力矩分量中任选一个单独作用都能起到阻尼效果 (见图 5.12(a), (b)).

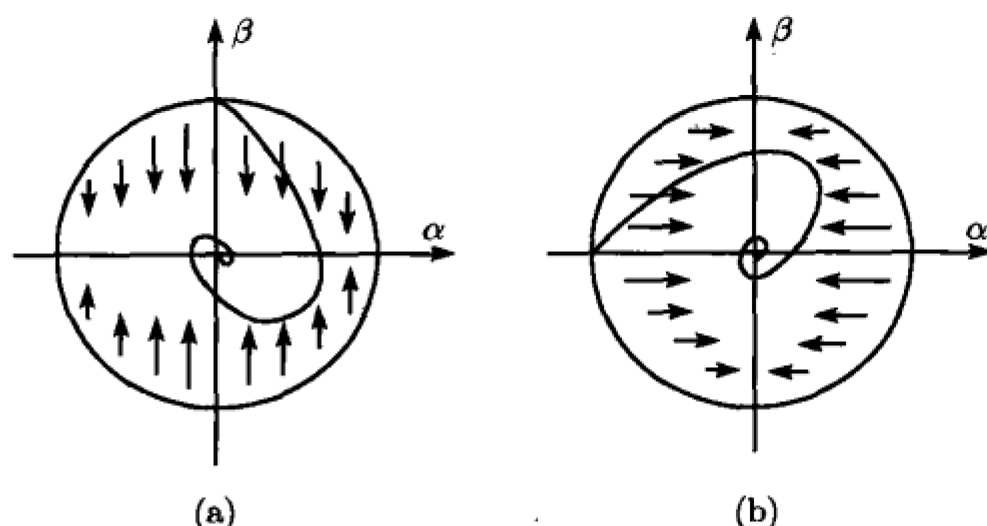


图 5.12　带阻尼陀螺摆的极点轨迹

3) 利用液体连通器

将图 4.9 所示的液体连通器固定在陀螺摆的壳体上. 按 4.1.4 节的分析, 连通器内的液体对器壁产生与液面倾角 ϑ 成正比的倾覆力矩

$$M_y=\mu'\vartheta \tag{5.2.33}$$

比例系数 μ' 相当于上摆性复摆的摆性系数. 令 $k'=\mu'/H$, 增加此倾覆力矩后的陀螺摆进动方程为

$$\dot{\alpha}-k\beta+k'\vartheta=0 \tag{5.2.34a}$$

$$\dot{\beta}+k\alpha=0 \tag{5.2.34b}$$

ϑ 的变化规律由方程 (4.1.53) 确定, 即

$$T\dot{\vartheta}+\vartheta-\beta=0 \tag{5.2.34c}$$

导出方程组 (5.2.34) 的特征方程

$$Ts^3 + s^2 + k^2Ts + k(k - k') = 0 \tag{5.2.35}$$

利用附录二中表 A.2 列出的劳斯 - 赫尔维茨判据, 系统 (5.2.34) 的渐近稳定性条件为 $k > k'$, 或

$$\mu > \mu' \tag{5.2.36}$$

即陀螺摆的恢复效应大于液体摆的倾覆效应时为渐近稳定, 极轴向地垂线趋近. 反之运动不稳定, 陀螺摆受扰即倾覆.

5.3　四陀螺垂直仪

5.3.1　四陀螺垂直仪的运动方程

讨论由四陀螺系统 $G_j\,(j = 1,2,3,4)$ 构成的**四陀螺垂直仪**, 其进动方程的一般形式已由式 (3.5.31) 给出. 设内环组合体的质心 O_c 向下沿 z 轴偏离支点 O, 绕外环轴和内环轴的重力和惯性力矩 M_x, M_y 与式 (5.2.2) 完全相同, 其中 m, l 定义为内环组合体的质量和摆距. 设陀螺 G_1, G_2 的支架与内环之间有弹簧相联系, 弹簧反力矩 M_γ 与偏角 γ 成比例; 陀螺 G_3, G_4 的支架也用弹簧与壳体联结, 弹簧反力矩 M_δ 与 δ 角成比例. M_γ 和 M_δ 都可传递至外环轴承转换成外力矩. 如弹簧有相同的刚度系数 K, 则有

$$M_\gamma = -K\gamma, \quad M_\delta = -K\delta \tag{5.3.1}$$

以自然坐标系为参考坐标系, 将方程 (5.3.1) 中的 $\varOmega_\xi, \varOmega_\eta, \varOmega_\zeta$ 以表 3.1 的第一行代入, M_x,M_y,M_γ,M_δ 以式 (5.2.2) 和 (5.3.1) 代入, 得到动基座上四陀螺垂直仪的进动方程

$$\dot{\gamma} + \varOmega\delta - k_1\alpha = \frac{k_1 V \varOmega}{g} \tag{5.3.2a}$$

$$\dot{\delta} - \varOmega\gamma + k_1\beta = \frac{k_1 \dot{V}}{g} \tag{5.3.2b}$$

$$\dot{\alpha} - \varOmega\beta + k_2\gamma = 0 \tag{5.3.2c}$$

$$\dot{\beta} + \varOmega\alpha - k_2\delta = -\frac{V}{R} \tag{5.3.2d}$$

参数 k_1, k_2 定义为

$$k_1 = \frac{\mu}{H}, \quad k_2 = \frac{K}{H} \tag{5.3.3}$$

定义复变量 z 和 w

$$z = \alpha + \mathrm{i}\beta, \quad w = \delta + \mathrm{i}\gamma \tag{5.3.4}$$

将方程组 (5.3.2) 综合成两个复数方程

$$\dot{z} + \mathrm{i}\Omega z - \mathrm{i}k_2 w = -\frac{\mathrm{i}V}{R} \tag{5.3.5a}$$

$$\dot{w} + \mathrm{i}\Omega w - \mathrm{i}k_1 z = \frac{k_1}{g}\left(\dot{V} + \mathrm{i}V\Omega\right) \tag{5.3.5b}$$

5.3.2　静止基座上的运动规律

设载体静止, 令方程 (5.3.5) 中 $V = \Omega = 0$, 得到齐次方程组

$$\dot{z} - \mathrm{i}k_2 w = 0 \tag{5.3.6a}$$

$$\dot{w} - \mathrm{i}k_1 z = 0 \tag{5.3.6b}$$

常值特解 $z_s = w_s = 0$ 表明内环平面的平衡位置为水平面, 各陀螺极轴的平衡位置为弹簧不变形的位置. 将方程组 (5.3.6) 消去 w, 化作 z 的二阶微分方程

$$\ddot{z} + k^2 z = 0 \tag{5.3.7}$$

固有频率 k 定义为

$$k = \sqrt{k_1 k_2} \tag{5.3.8}$$

复数方程 (5.3.7) 可分解为两个独立的实数方程

$$\ddot{\alpha} + k^2\alpha = 0 \tag{5.3.9a}$$

$$\ddot{\beta} + k^2\beta = 0 \tag{5.3.9b}$$

可见 α 和 β 以同一频率 k 作谐振动, 平衡位置 $z_s = w_s = 0$ 稳定. 内环的法线轴在地垂线附近的极点轨迹不仅取决于 α 和 β 的初值, 且与 γ 和 δ 的初值有关, 可形成各种封闭的李萨如图形. (α, β) 平面上不存在单值的矢量场和极点轨迹族, 是四陀螺垂直仪区别于陀螺摆的重要特点.

5.3.3　基座运动的影响

1) O 点沿 $\mathcal{N}$ 球面上大圆弧匀速运动

令方程 (5.3.5) 中 $\Omega = \dot{V} = 0$, 化作

$$\dot{z} - \mathrm{i}k_2 w = -\frac{\mathrm{i}V}{R} \tag{5.3.10a}$$

$$\dot{w} - \mathrm{i}k_1 z = 0 \tag{5.3.10b}$$

常值特解为

$$z_s = 0, \quad w_s = \frac{V}{k_2 R} \tag{5.3.11}$$

或

$$\alpha_s = \beta_s = \gamma_s = 0, \quad \delta_s = \frac{V}{k_2 R} \tag{5.3.12}$$

除陀螺 G_3, G_4 有常值偏角以外, 内环法线轴的平衡位置仍保持与地垂线一致. 因此不存在速度误差, 是四陀螺垂直仪区别于陀螺摆的另一特点.

2) O 点做盘旋运动

令方程 (5.3.5) 中 $V = \Omega\rho, \dot{V} = 0$, 略去 ρ/R 项, 得到

$$\dot{z} + \mathrm{i}\Omega z - \mathrm{i}k_2 w = 0 \tag{5.3.13a}$$

$$\dot{w} + \mathrm{i}\Omega w - \mathrm{i}k_1 z = \frac{\mathrm{i}k_1 \Omega^2 \rho}{g} \tag{5.3.13b}$$

其常值特解 z_c, w_c 为

$$z_c = \frac{k^2 \Omega^2 \rho}{g(\Omega^2 - k^2)}, \quad w_c = \frac{k_1 \Omega^3 \rho}{g(\Omega^2 - k^2)} \tag{5.3.14}$$

或

$$\alpha_c = \frac{k^2 \Omega^2 \rho}{g(\Omega^2 - k^2)}, \quad \beta_c = \gamma_c = 0, \quad \delta_c = \frac{k_1 \Omega^3 \rho}{g(\Omega^2 - k^2)} \tag{5.3.15}$$

其中 α_c 为四陀螺垂直仪的盘旋误差.

方程组 (5.3.13) 的特征方程为

$$s^2 + 2\mathrm{i}\Omega s + \left(k^2 - \Omega^2\right) = 0 \tag{5.3.16}$$

其特征根为纯虚根

$$s_{1,2} = -\mathrm{i}(\Omega \pm k) \tag{5.3.17}$$

表明内环法线轴和各陀螺极轴在平衡位置 z_c, w_c 附近作 $\Omega \pm k$ 频率的谐振动.

3) O 点沿 $\mathscr{N}$ 球面上的大圆弧做变速运动

令方程组 (5.3.5) 中 $\Omega = 0, V$ 随时间 t 任意变化, 得到

$$\dot{z} - \mathrm{i}k_2 w = -\frac{\mathrm{i}V(t)}{R} \tag{5.3.18a}$$

$$\dot{w} - \mathrm{i}k_1 z = \frac{k_2 \dot{V}(t)}{g} \tag{5.3.18b}$$

可化作 z 或 w 的二阶方程

$$\ddot{z} + k^2 z = -\frac{\mathrm{i}\dot{V}}{R}\left(\frac{k^2}{k_s^2} - 1\right) \tag{5.3.19a}$$

$$\ddot{w} + k^2 w = \frac{k_1}{g}\left(\ddot{V} + k_s^2 V\right) \tag{5.3.19b}$$

利用杜哈美 (Duhamel) 积分求出方程 (5.3.9a) 的特解, 即四陀螺垂直仪的加速度误差 z_a

$$z_{\mathrm{a}}=\frac{\mathrm{i}k}{g}\left(1-\frac{k_{\mathrm{s}}^2}{k^2}\right)\int_0^t \dot{V}(\tau)\sin k(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{5.3.20}$$

载体做匀加速运动时, $\dot{V}=a$, 上式简化为与式 (5.2.18) 相似的形式

$$z_{\mathrm{a}}=z_{\mathrm{a}}^*(1-\cos kt) \tag{5.3.21}$$

其中 z_{a}^* 的定义与式 (5.2.19) 相同.

5.3.4 四陀螺垂直仪的舒勒条件

设四陀螺垂直仪的固有频率 k 等于舒勒频率 k_{s}, 则不论速度 V 如何变化, 式 (5.3.20) 表示的 z_{a} 必消除为零. 方程 (5.3.19a) 成为齐次, 运动方程化作

$$\ddot{z}+k_{\mathrm{s}}^2 z=0 \tag{5.3.22a}$$

$$\ddot{w}+k_{\mathrm{s}}^2 w=\frac{1}{k_2 R}\left(\ddot{V}+k_{\mathrm{s}}^2 V\right) \tag{5.3.22b}$$

存在以下特解

$$z=0,\ \ w=\frac{V(t)}{k_2 R} \tag{5.3.23}$$

式 (5.3.23) 与式 (5.3.11) 完全相同, 仅 $V(t)$ 随时间改变. 因此不论载体沿大圆弧如何变速, 四陀螺垂直仪不附加任何与加速度有关的误差.

如 O 点沿 $\mathscr{N}$ 球面做任意变速运动, 从方程组 (5.3.5) 中消去 w, 化作 z 的二阶微分方程

$$\ddot{z}+2\mathrm{i}\Omega\dot{z}+\left(k^2-\Omega^2+\mathrm{i}\dot{\Omega}\right)z=-\frac{\mathrm{i}}{R}\left(\frac{k^2}{k_{\mathrm{s}}^2}-1\right)\left(\dot{V}+\mathrm{i}V\Omega\right) \tag{5.3.24}$$

$k=k_{\mathrm{s}}$ 时 (5.3.24) 亦变为齐次方程, 无论 $V(t)$ 和 $\Omega(t)$ 如何变化均不存在加速度误差. 因此舒勒条件的适用范围可扩大到载体沿 $\mathscr{N}$ 球面作任意变速运动情形.

5.3.5 稳定性问题

为了消除四陀螺垂直仪在平衡位置附近的等幅摆动, 必须采取阻尼措施使稳定的平衡位置变为渐近稳定. 在外环轴和内环轴上安装力矩器, 分别产生与 δ 或 γ 成比例的修正力矩

$$M_x=C\delta,\ \ M_y=-C\gamma \tag{5.3.25}$$

在陀螺 $\mathrm{G}_1,\mathrm{G}_2$ 以及 $\mathrm{G}_3,\mathrm{G}_4$ 的支架转轴上也安装力矩器, 分别产生与 α 或 β 成比例的修正力矩

$$M_\gamma=-C\alpha,\ \ M_\delta=C\beta \tag{5.3.26}$$

在方程组 (5.3.13) 中增加 (5.3.25),(5.3.26) 各力矩项, 令 $c=C/H$, 略去与奇点稳定性无关的非齐次项, 得到盘旋运动的进动方程为

$$\dot{z}+cz+\mathrm{i}\Omega z-\mathrm{i}k_2 w=0 \tag{5.3.27a}$$

$$\dot{w}+cw+\mathrm{i}\Omega w-\mathrm{i}k_1 z=0 \tag{5.3.27b}$$

此方程组的特征方程为

$$s^2+2\left(c+\mathrm{i}\Omega\right)s+\left(c+\mathrm{i}\Omega\right)^2+k^2=0 \tag{5.3.28}$$

特征根为

$$s_{1,2}=-c+\mathrm{i}\left(\Omega\pm k\right) \tag{5.3.29}$$

特征根内负实部的出现使自由振动衰减, 平衡位置转为渐近稳定.

5.4 非线性问题

5.4.1 开关特性

如作用于陀螺的力矩 M_x, M_y 为 α,β 的任意非线性函数, 仍可利用方程 (5.1.4) 确定极点轨迹的几何特征. 图 5.13 表示可能出现的几种非线性力矩特性.

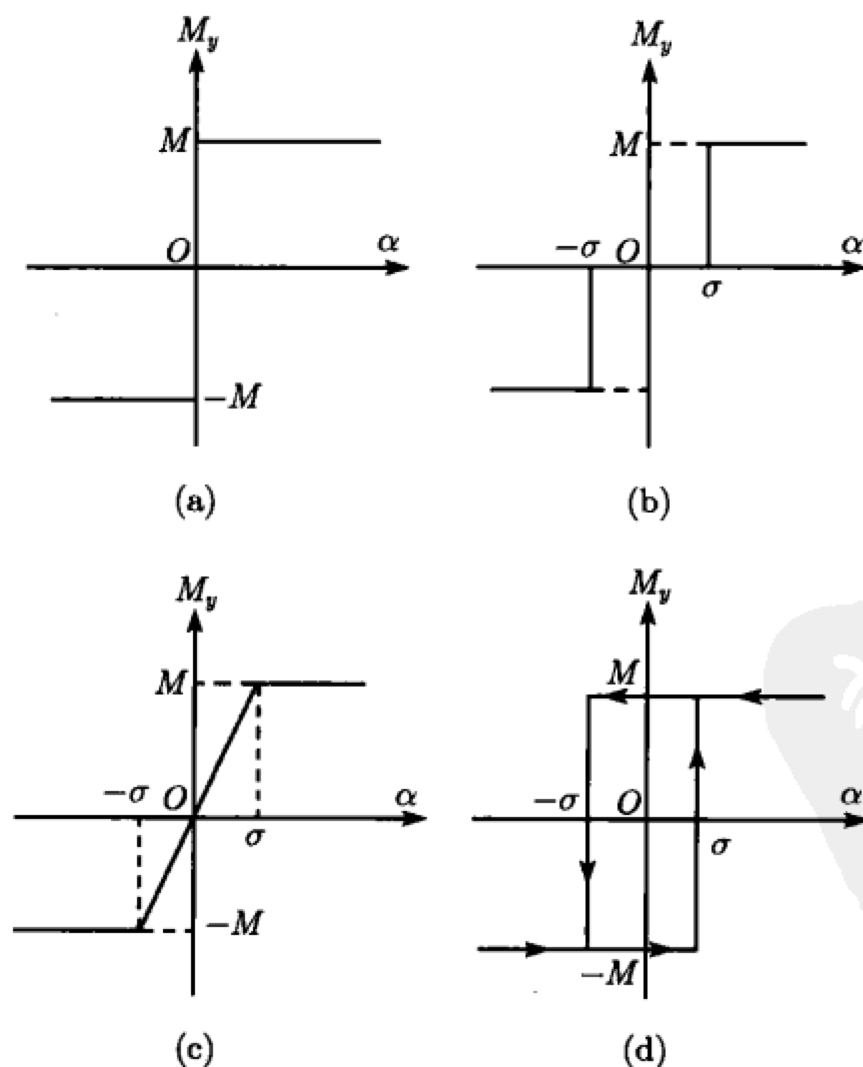


图 5.13　修正力矩的非线性特性

先讨论具有开关特性的径向修正陀螺垂直仪 (见图 5.13(a)), 其修正力矩为

$$M_x = -M\mathrm{sign}\beta,\ \ M_y = M\mathrm{sign}\alpha \tag{5.4.1}$$

代入方程 (5.1.4), 得到

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{\mathrm{sign}\beta}{\mathrm{sign}\alpha} \tag{5.4.2}$$

在 (α,β) 平面的第一、三象限内, 极点轨迹是斜率等于 1 的平行线族, 在第二、四象限内是斜率等于 -1 的平行线族, 与坐标轴相遇后沿坐标轴向原点趋近 (见图 5.14).

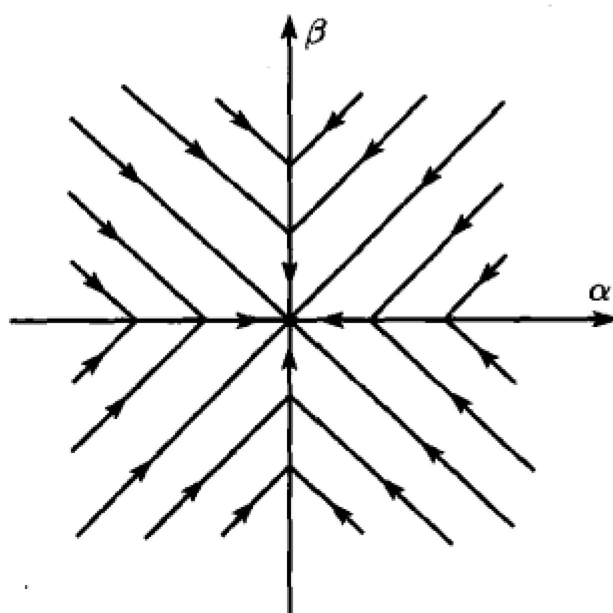


图 5.14　具有开关特性的陀螺垂直仪极点轨迹

5.4.2　不灵敏特性

如陀螺垂直仪的复摆元件存在范围为 $\pm\sigma$ 的不灵敏区, 复摆偏角在此范围内时输出信息为零, 修正力矩的变化规律为 (见图 5.13(b))

$$\left.\begin{aligned} M_x &= \begin{cases} -M\mathrm{sign}\beta & (|\beta| > \sigma) \\ 0 & (|\beta| > \sigma) \end{cases} \\ M_y &= \begin{cases} M\mathrm{sign}\alpha & (|\alpha| > \sigma) \\ 0 & (|\alpha| > \sigma) \end{cases} \end{aligned}\right. \tag{5.4.3}$$

在 (α,β) 平面内用 $\alpha = \pm\sigma$, $\beta = \pm\sigma$ 4 条直线分隔成 9 个区域 (见图 5.15). 分别几种情况讨论:

1) α, β 都在不灵敏区外, 极点轨迹与开关特性相同.

2) α 在不灵敏区内, β 在不灵敏区外, 极点轨迹为平行于 β 轴的直线族.

3) β 在不灵敏区内, α 在不灵敏区外, 极点轨迹为平行于 α 轴的直线族.

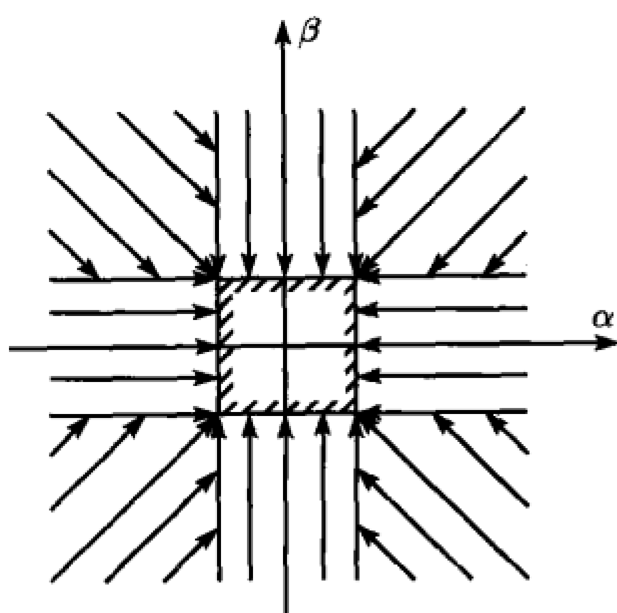


图 5.15　具有不灵敏特性力的陀螺垂直仪极点轨迹

4) α,β 都在不灵敏区内, 在此区域内的任意位置陀螺都处于无力矩状态, 极轴随遇平衡. 因此陀螺垂直仪在不灵敏区范围内存在静态误差, 其最大值等于 σ

$$|\alpha_{\rm s}|_{\max} = |\beta_{\rm s}|_{\max} = \sigma \tag{5.4.4}$$

5.4.3　饱和特性

如陀螺垂直仪的修正力矩与复摆偏角之间的线性关系 (5.1.13) 存在 $\pm\sigma$ 的有限范围, 越出此范围时修正力矩保持常值而具有饱和特性. 力矩变化规律为 (见图 5.13(c))

$$\begin{aligned} M_x &= \begin{cases} -M\text{sign}\beta & (|\beta| > \sigma) \\ -c\beta & (|\beta| > \sigma) \end{cases} \\ M_y &= \begin{cases} M\text{sign}\alpha & (|\alpha| > \sigma) \\ c\alpha & (|\alpha| > \sigma) \end{cases} \end{aligned} \tag{5.4.5}$$

仍以 $\alpha = \pm\sigma$, $\beta = \pm\sigma$4 条直线分隔成 9 个区域 (见图 5.16). 极点轨迹有以下特点:

1) α,β 都在饱和区内, 极点轨迹与开关特性相同.

2) α 在线性区内, β 在饱和区内, 极点轨迹是以 β 轴为渐近线的指数曲线族.

3) β 在线性区内, α 在饱和区内, 极点轨迹是以 α 轴为渐近线的指数曲线族.

4) α,β 都在线性区内, 极点轨迹为 5.1 节所叙述的向原点趋近的径向直线族.

5.4.4　滞环特性

如陀螺垂直仪的修正力矩具有开关特性, 且存在范围为 $\pm\sigma$ 的滞环. 在滞环范围内修正力矩的值取决于 α 或 β 的变化趋势, 其规律为 (见图 5.13(d))

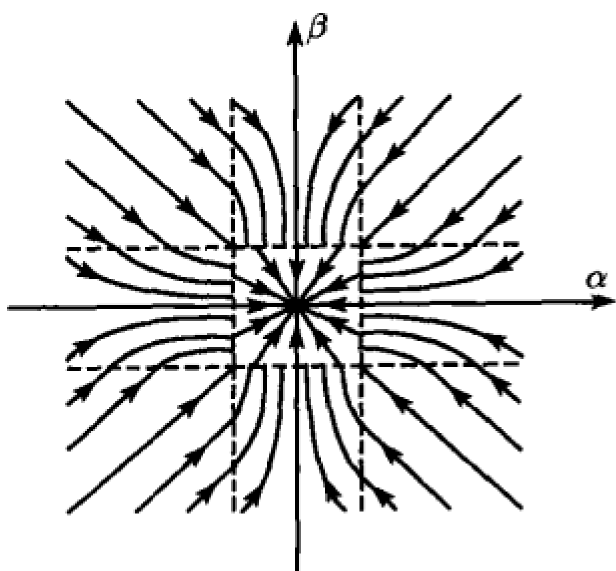


图 5.16　具有饱和特性的陀螺垂直仪极点轨迹

$$
\begin{aligned}
M_x &= \begin{cases} -M\text{sign}\beta & (|\beta| > \sigma) \\ M\text{sign}\dot{\beta} & (|\beta| > \sigma) \end{cases} \\
M_y &= \begin{cases} M\text{sign}\alpha & (|\alpha| > \sigma) \\ -M\text{sign}\dot{\alpha} & (|\alpha| > \sigma) \end{cases}
\end{aligned}
\tag{5.4.6}
$$

滞环的存在使图 5.14 中各个象限内不同类型极点轨迹的有效范围扩大, 如表 5.1 和图 5.17 所示, 图中 S_i 表示第 i 象限扩大后的原点位置.

表 5.1

象限	$\dot{\alpha}$	$\dot{\beta}$	扩大后的边界线
1	−	−	$\alpha=-\sigma,\ \beta=-\sigma$
2	+	−	$\alpha=\sigma,\ \beta=-\sigma$
3	+	+	$\alpha=\sigma,\ \beta=\sigma$
4	−	+	$\alpha=-\sigma,\ \beta=\sigma$

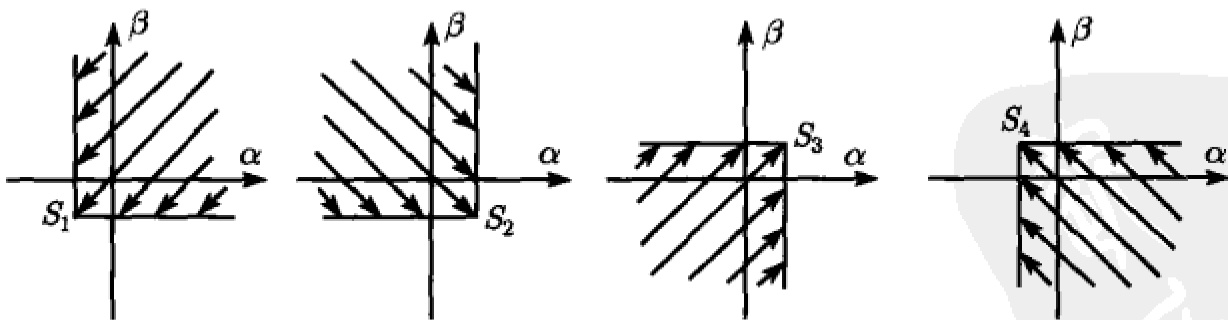


图 5.17　滞环引起不同象限有效范围的扩大

将四类区域的极点轨迹画在一起, 在滞环范围内极点轨迹互相重叠, 矢量场并非单值. 此区域内的实际极点轨迹必须根据运动的历史由当时 $\dot{\alpha}$ 和 $\dot{\beta}$ 的符号确定. 以图 5.18 为例, 陀螺极点从 A 点开始沿第一象限的轨迹运动, 到达 B 点后 M_x 变

号, $\dot{\beta}$ 亦随之变号, 极点改沿第四象限的轨迹运动. 到达 C 点后 $\dot{\beta}$ 再次变号, 恢复第一象限轨迹. 到达 D 点后 M_y 变号使 $\dot{\alpha}$ 变号, 又改沿第二象限轨迹运动, 如此继续不已. 可以看出, 陀螺极点的运动趋势仍朝向原点, 但进入滞环区域后即在此区域内做永不停息的自激振动.

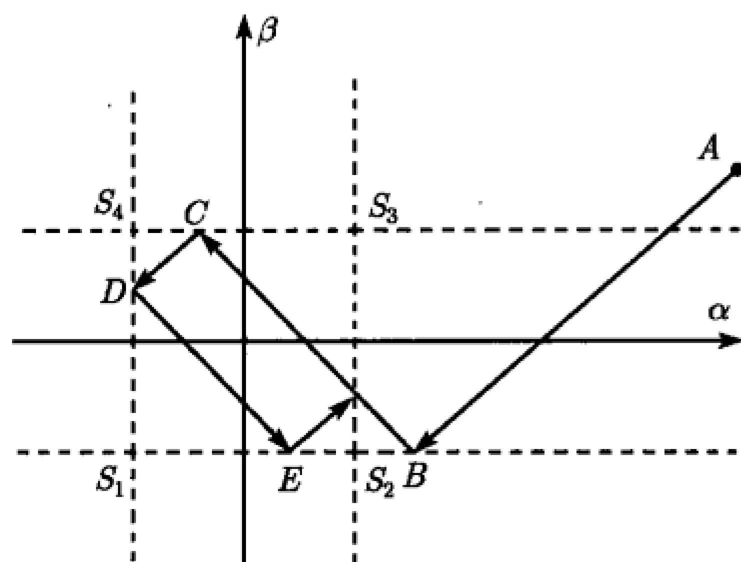


图 5.18　具有滞环特性的陀螺垂直仪极点轨迹

5.4.5　库仑摩擦特性

设陀螺垂直仪的万向支架轴承中存在库仑摩擦力矩 M_{ix} 和 $M_{iy}\,(i=1,2)$, 其动摩擦力矩的模等于最大静摩擦力矩 M_{f}, 方向取决于 $\dot{\alpha}$ 或 $\dot{\beta}$ 的符号 (见图 5.19).

$$\begin{aligned} M_{ix} &= -M_{\mathrm{f}}\mathrm{sign}\dot{\alpha} \quad (\dot{\alpha}=0\text{ 时 }|M_{ix}|<M_{\mathrm{f}}) \\ M_{iy} &= -M_{\mathrm{f}}\mathrm{sign}\dot{\beta} \quad \left(\dot{\beta}=0\text{ 时 }|M_{iy}|<M_{\mathrm{f}}\right) \end{aligned} \tag{5.4.7}$$

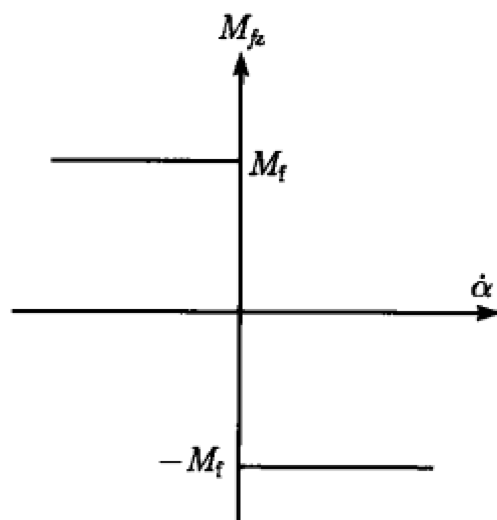


图 5.19　库仑摩擦力矩特性

设修正力矩遵循线性规律 (5.1.13), 在方程 (5.1.4) 中增加库仑摩擦力矩 (5.4.7) 后, 化作

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\alpha}=\frac{\beta+\sigma\mathrm{sign}\dot{\alpha}}{\alpha-\sigma\mathrm{sign}\dot{\beta}} \tag{5.4.8}$$

式中 $\sigma = M_f/C$. 方程 (5.4.8) 的奇点仍为稳定结点, 其位置取决于 $\dot{\alpha}$ 和 $\dot{\beta}$ 的符号, 如表 5.2 所示.

表 5.2

象限	$\dot{\alpha}$	$\dot{\beta}$	奇点位置
1	−	−	$S_1: \quad \alpha_s = -\sigma, \ \ \beta_s = \sigma$
2	+	−	$S_2: \quad \alpha_s = -\sigma, \ \ \beta_s = -\sigma$
3	+	+	$S_3: \quad \alpha_s = \sigma, \ \ \beta_s = -\sigma$
4	−	+	$S_4: \quad \alpha_s = \sigma, \ \ \beta_s = \sigma$

将图 5.3 按象限分解为 4 个部分, 各部分的原点移至表 5.2 规定的奇点位置 S_i $(i = 1, \cdots, 4)$, 即组成有库仑摩擦情形的极点轨迹 (见图 5.20). 在 $|\alpha| < \sigma$, $|\beta| < \sigma$ 区域内, 因修正力矩小于最大静摩擦力矩, 陀螺处于随遇平衡状态, 此区域可看作是库仑摩擦引起的不灵敏区. 陀螺在不灵敏区内存在静态误差, 其最大值为

$$|\alpha_s|_{\max} = |\beta_s|_{\max} = \frac{M_f}{C} \tag{5.4.9}$$

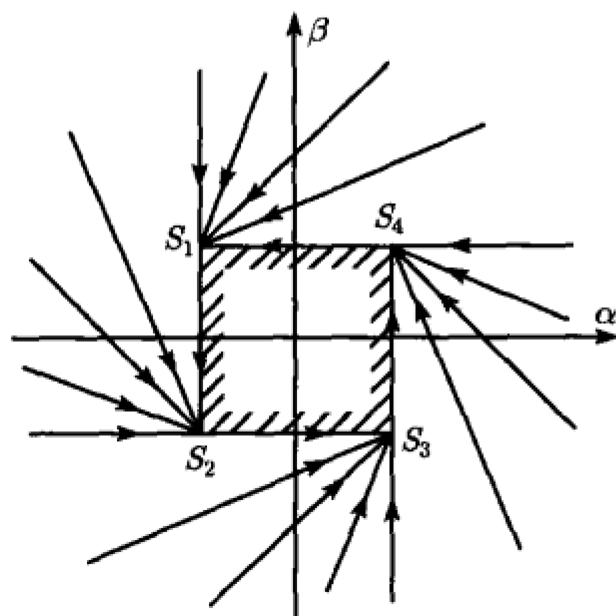


图 5.20　存在库仑摩擦的陀螺垂直仪极点轨迹

在陀螺摆中增加轴承的库仑摩擦力矩, 其极点轨迹方程为

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\alpha} = -\frac{\alpha + \sigma \mathrm{sign}\dot{\alpha}}{\beta + \sigma \mathrm{sign}\dot{\beta}} \tag{5.4.10}$$

其中 $\sigma = M_f/\mu$. 此方程的奇点仍为中心, 位置取决于 $\dot{\alpha}$ 和 $\dot{\beta}$ 的符号, 如表 5.3 所示,

将图 5.8 按象限分解为 4 个部分, 将各象限的原点移至表 5.3 规定的奇点位置 S_i, 即组成带库仑摩擦陀螺摆的极点轨迹 (图 5.21). 它是由半径逐渐缩小的圆弧组成的螺线, 进入库仑摩擦不灵敏区后转为随遇平衡. 陀螺在不灵敏区内的最大静态误差为

表 5.3

象限	$\dot{\alpha}$	$\dot{\beta}$	奇点位置
1	+	−	S_1： $\alpha_s=-\sigma,\ \beta_s=\sigma$
2	+	+	S_2： $\alpha_s=-\sigma,\ \beta_s=-\sigma$
3	−	+	S_3： $\alpha_s=\sigma,\ \beta_s=-\sigma$
4	−	−	S_4： $\alpha_s=\sigma,\ \beta_s=\sigma$

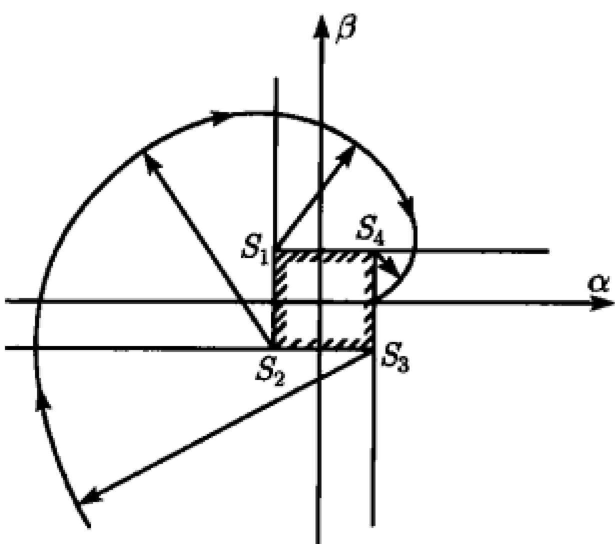


图 5.21　存在库仑摩擦的陀螺摆极点轨迹

$$|\alpha_s|_{\max}=|\beta_s|_{\max}=\frac{M_f}{\mu} \tag{5.4.11}$$

由于此静态误差的存在, 陀螺摆不能利用轴承库仑摩擦作为其阻尼方案.



第 6 章　陀螺罗经的进动理论

1852 年傅科展示的第一台陀螺仪的重要启示在于：利用陀螺仪的特殊力学现象可以指示地球的自转轴，以代替指示地球磁轴的磁罗经用于船舶导航. 由于地球自转角速度极小，傅科陀螺仪的定向作用极其微弱且不能克服船舶摇摆的影响，未能实际应用. 利用重力摆代替地球自转的惯性力矩修正陀螺极轴的方位是现实可行的方案. 1908 年安休茨根据此原理设计造成了第一台自动指北的陀螺罗经. 1909 年斯佩里造出了原理相同的陀螺仪. 两种仪器的力学原理相同，但采用了不同的技术方案克服船舶摇摆的影响，形成陀螺罗经不同的两种系列. 本章基于陀螺进动理论叙述陀螺罗经的指北原理和阻尼方案，讨论船舶的加速度和摇摆引起的指示误差和消除方法以及舒勒周期对陀螺罗经的重要意义. 利用角度坐标的复数表达和非线性振动摄动方法以简化繁琐的数学推导. 现代的陀螺罗经采用控制回路的电磁力矩实现修正作用，发展为电控陀螺罗经. 1928 年安休茨曾设想将罗经与地平仪合为一体，称为空间罗经. 1935 年盖克勒 (J. W. Gecker) 提出的空间罗经原理方案可使指示子午面和水平面的运动同时实现舒勒周期.

6.1　陀 螺 罗 经

6.1.1　水平陀螺的视运动

由于地球自转，对于地球上的观测者，在惯性空间中保持定轴性的自由陀螺表现出相对地球的视运动. 设陀螺的外环轴沿地垂线固定于地球，令 $(O-\xi\eta\zeta)$ 各轴依次与地理坐标系的 Z, E, N 轴重合，进动方程 (3.3.21) 中的 M_x,M_y 为零，得到

$$\dot{\alpha}-\left(\frac{V_E}{R}\right)\beta=-\frac{V_E}{R}\tan\phi \tag{6.1.1a}$$

$$\dot{\beta}+\left(\frac{V_E}{R}\right)\alpha=\frac{V_N}{R} \tag{6.1.1b}$$

设初始时陀螺的极轴沿子午线，即 $\alpha(0)=\beta(0)=0$，从方程 (6.1.1) 导出陀螺视运动的初始角速度

$$\dot{\alpha}(0)=-\frac{V_E}{R}\tan\phi,\quad \dot{\beta}(0)=\frac{V_N}{R} \tag{6.1.2}$$

$\dot{\alpha}(0)$ 和 $\dot{\beta}(0)$ 的存在使极轴逐渐偏离子午线位置. 图 6.1 表示 P 点处的陀螺极轴随地球转至 P' 点处时相对子午线的偏移.

对陀螺施加按以下规律变化的力矩

$$M_x = -\frac{HV_N}{R}, \quad M_y = -\frac{HV_E}{R}\tan\phi \tag{6.1.3}$$

代入方程 (3.3.21) 后可使非齐次项消除为零, 成为

$$\dot{\alpha} - \left(\frac{V_E}{R}\right)\beta = 0 \tag{6.1.4a}$$

$$\dot{\beta} + \left(\frac{V_E}{R}\right)\alpha = 0 \tag{6.1.4b}$$

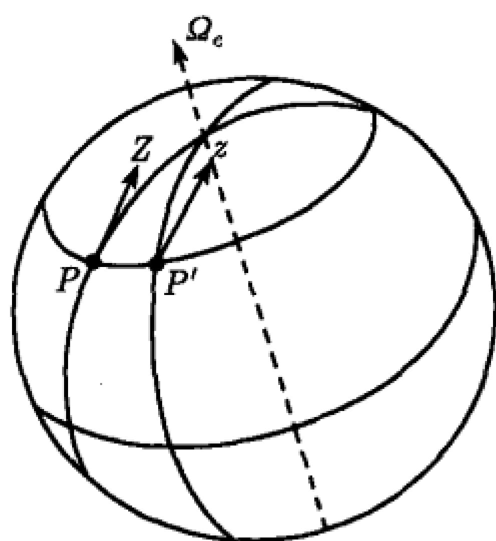


图 6.1　陀螺极轴的视运动

此方程与极轴在地垂线附近的方程 (5.1.11) 形式相同, 只须将系数 Ω 换为 V_E/R. 极轴的平衡位置为子午线, 对应的奇点为中心. 如初始时极轴准确地与子午线一致, 则可保持在此位置上. 极轴稍偏离子午线时, 由于地球自转的反馈作用, 它将围绕子午线做周期超过 24 小时的圆锥运动.

船舶或飞机的导航系统不仅需要稳定的水平基准, 而且需要稳定的方位基准. 1852 年的佛科陀螺是利用陀螺仪指示子午线的最初方案, 但它不能用于摇摆的载体. 利用上述修正力矩 (6.1.3) 消除自由陀螺的视运动可使极轴保持子午线位置, 成为利用陀螺仪指示方位的另一种方案. 其缺点是极轴的子午线位置必须预先对准而不能自动寻找, 而且由于方程 (6.1.4) 的系数 V_E/R 极小, 任何微小的干扰力矩都能导致极轴显著偏离子午线, 继而产生长周期的视运动. 因此它只能在短暂的时间范围内指示方位, 在航空导航系统中称为**陀螺方位仪**或**陀螺半罗盘**. 另一种更完善的方案称为**陀螺罗经**, 为本章的主要叙述对象.

6.1.2　陀螺罗经的动力学方程

在陀螺的内环组合体上施加绕内环轴的修正力矩, 与偏角 β 成正比

$$M_y = -\mu\beta \tag{6.1.5}$$

在方程 (3.3.21a) 中增加此力矩, 设 $\phi = 0$, 化作

$$\dot{\alpha} - \left(\frac{\mu}{H} + \frac{V_E}{R}\right)\beta = 0 \tag{6.1.6}$$

将式 (6.1.6) 与 (6.1.4a) 对比, 只要选择足够大的参数 μ, 就能使原来十分微弱的地球自转反馈作用明显增强, 且能提高抗干扰力矩能力. 极轴偏东上升时力矩 (6.1.5) 使其向西进动, 极轴偏西下降时则使其向东进动, 陀螺的极轴就能自动寻找并趋近子午面. 此即陀螺罗经的工作原理.

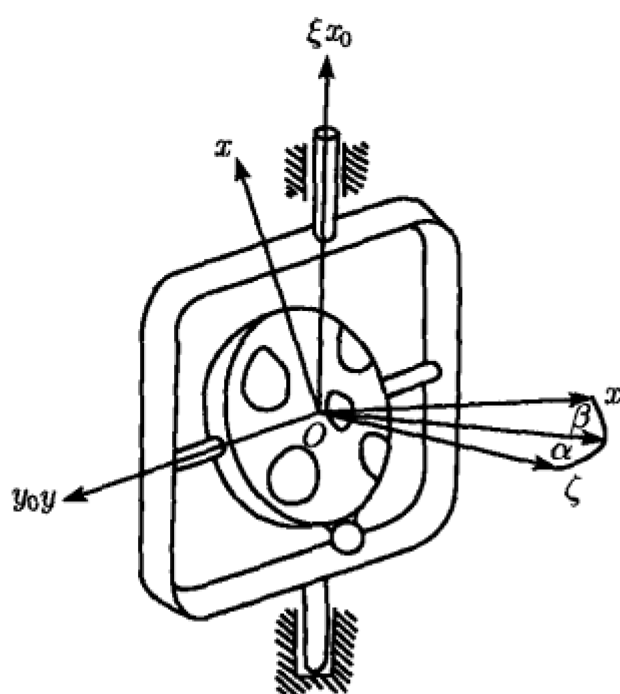


图 6.2　摆式罗经

为具体实现修正力矩 (6.1.5), 可将内环组合体的质心沿垂直方向偏离支点以产生对支点的重力矩. 采用这种方案的陀螺罗经称为**摆式罗经**(见图 6.2). 也可将图 4.9 所示的液体摆固定在陀螺内环上以产生倾覆重力矩, 称为**液体摆式罗经**. 本章以阐述摆式罗经的基本运动规律为主, 所得到的大部分结论原则上也适用于液体摆式罗经.

设陀螺内环组合体的质心 O_c 沿 z 轴的负方向向下偏离支点 O 的距离为 l, 内环组合体的质量为 m, $\mu = mgl$ 为摆性系数. O_c 点上作用的重力和惯性力对 O 点的矩为

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{l} \times m\boldsymbol{f} \tag{6.1.7}$$

利用 $\boldsymbol{l} = -l\boldsymbol{i}$ 和表 3.4 第二行提供的 $\boldsymbol{f}$ 计算 $\boldsymbol{M}$ 相对 x 和 y 轴的投影, 得到

$$\begin{aligned} M_x &= 0 \\ M_y &= -\mu\beta - \frac{\mu}{g}\left[\dot{V}_N + \frac{V_E^2}{R}\tan\phi\dot{V}_E + \left(\frac{V_E V_N}{R}\tan\phi - \dot{V}_E\right)\alpha\right] \end{aligned} \tag{6.1.8}$$

基座静止时此力矩恰好符合式 (6.1.5) 的要求. 将式 (6.1.8) 代入进动方程 (3.3.21), 定义参数 k_1 为

$$k_1 = \frac{\mu}{H} \tag{6.1.9}$$

设 $k_1 \gg V/R$, $g \gg \dot{V} \gg V^2/R$, 将 V/Rk_1, $\dot{V}/g$, $V^2/R\dot{V}$ 视为一阶微量, 只保留其一次项, 得到摆式罗经的进动方程

$$\dot{\alpha} - k_1\beta = -\frac{V_E}{R}\tan\phi + \frac{k_1\dot{V}_N}{g} \tag{6.1.10a}$$

$$\dot{\beta} + \left(\frac{V_E}{R}\right)\alpha = \frac{V_N}{R} \tag{6.1.10b}$$

也可利用式 (3.3.17) 将载体的绝对速度改为以相对速度 v_E, v_N 表示, 得到

$$\dot{\alpha} - k_1\beta = -\Omega_2 - \frac{v_E}{R}\tan\phi + \frac{k_1\dot{v}_N}{g} \tag{6.1.11a}$$

$$\dot{\beta} + \left(\Omega_1 + \frac{v_E}{R}\right)\alpha = \frac{v_N}{R} \tag{6.1.11b}$$

式中 Ω_1,Ω_2 为地球自转角速度 $\boldsymbol{\Omega}_e$ 沿 N 和 Z 轴的投影, 均为地理纬度 ϕ 的函数

$$\Omega_1 = \Omega_e \cos\phi, \quad \Omega_2 = \Omega_e \sin\phi \tag{6.1.12}$$

6.1.3 地球基座上的运动规律

陀螺罗经仅当基座转动时才能进行工作, 讨论静止基座上的运动无实际意义. 最简单的情况是基座与地球固定, 令方程 (6.1.11) 中 $v_E = v_N = 0$, 简化为

$$\dot{\alpha} - k_1\beta = -\Omega_2 \tag{6.1.13a}$$

$$\dot{\beta} + \Omega_1\alpha = 0 \tag{6.1.13b}$$

将变量 β 置换为新的变量 β_1

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{k_1}{\Omega_1}}\,\beta \tag{6.1.14}$$

则动力学方程 (6.1.13) 变为较对称形式

$$\dot{\alpha} - k\beta_1 = -\Omega_2 \tag{6.1.15a}$$

$$\dot{\beta}_1 + k\alpha = 0 \tag{6.1.15b}$$

其中参数 k 为线性系统 (6.1.15) 的固有角频率

$$k = \sqrt{k_1\Omega_1} \tag{6.1.16}$$

令 (6.1.15b) 乘以 i 与 (6.1.15a) 相加, 得到与陀螺摆动力学方程 (5.2.8) 相似的复数方程

$$\dot{z} + \mathrm{i}kz = -\Omega_2 \tag{6.1.17}$$

复数坐标 z 定义为

$$z = \alpha + \mathrm{i}\beta_1 \tag{6.1.18}$$

方程 (6.1.17) 的常值特解为

$$z_s = \frac{\mathrm{i}\Omega_2}{k} \tag{6.1.19}$$

对应于 (α,β) 平面上的奇点

$$\alpha_s = 0, \quad \beta_s = \frac{\Omega_2}{k_1} \tag{6.1.20}$$

式 (6.1.20) 表明极轴的平衡位置在子午面内, 但相对水平面倾斜 β_s 角. 如同时施加按 (6.1.3) 规律变化的力矩, 可使进动方程变为齐次

$$\dot{z} + \mathrm{i}kz = 0 \tag{6.1.21}$$

其特解 $z_s = 0$ 表明极轴的平衡位置与子午线完全一致. 实际上只要将变量置换公式 (6.1.14) 改为

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{k_1}{\Omega_1}}\beta - \frac{\Omega_2}{k} \tag{6.1.22}$$

则坐标原点移至奇点, 即使无 (6.1.3) 修正力矩, 方程 (6.1.13) 也能化成与 (6.1.21) 相同的齐次方程.

利用表 A.4 判断, 奇点 z_s 为中心, 陀螺在 (α, β_1) 平面内的极点轨迹是以奇点为中心的同心圆族. 变换至实际的极点轨迹平面 (α, β) 后成为同心椭圆族 (见图 6.3). 长短半径比 $\sqrt{k_1/\Omega_1}$ 随纬度 ϕ 改变, 由于 $k_1 \gg \Omega_1$, 此椭圆轨迹极扁. 考虑 (6.1.17) 的非齐次项时, 椭圆中心沿 β 轴有微小偏移 β_s, 此偏角也随纬度 ϕ 改变. 方程 (6.1.21) 的解与 (5.2.7) 完全相同, 极轴以 k 为角速度沿平面 (α, β_1) 的圆轨迹围绕奇点顺时针匀速进动. 如内环组合体的质心在支点上方而具有上摆性, 则奇点仍为中心, 极点轨迹相同, 只是极轴进动方向变为逆时针.

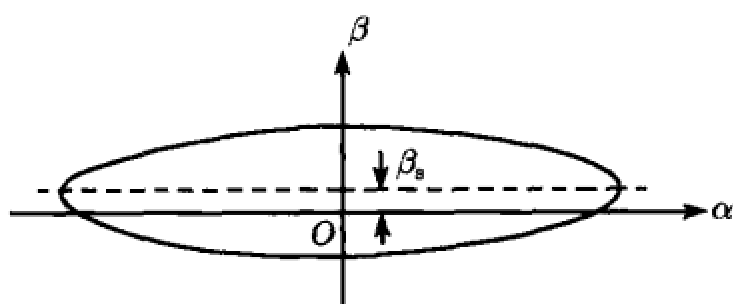


图 6.3　罗经的极点轨迹

6.1.4　基座运动的影响

关于载体沿地球表面 $\mathscr{E}$ 的相对运动对罗经运动的影响, 讨论以下几种情况:

1) O 点沿 $\mathscr{E}$ 球面匀速运动且保持方位角不变[①]

令方程组 (6.1.11) 中 v_E, v_N 为常值, 设 $v_E/R, v_N/R$ 与 Ω_e 同数量级, 略去 $\Omega_e/k_1, \Omega_e^2 R/g$ 的同阶微量, 得到

$$\dot{\alpha} - k_1\beta = -\Omega_2 - \frac{v_E}{R}\tan\phi \tag{6.1.23a}$$

$$\dot{\beta} + \left(\Omega_1 + \frac{v_E}{R}\right)\alpha = \frac{v_N}{R} \tag{6.1.23b}$$

有常值特解

$$\alpha_s = \frac{v_N}{R\Omega_1 + v_E}, \quad \beta_s = \frac{\Omega_2}{k_1} + \frac{v_E}{k_1 R}\tan\phi \tag{6.1.24}$$

---

① 方位角指速度矢量与子午线的夹角, 方位角保持不变时 O 点在地球表面的运动轨迹是以北极或南极为中心的球面对数螺线.

α_s 为罗经的**速度误差**, 它等于 O 点的绝对速度矢量 V 偏离地理纬线的角度, 是一种运动学误差 (见图 6.4). α_s 和 β_s 均随纬度 ϕ 的增高而变大, 纬度接近地球两极时 α_s 或 β_s 甚至无限增大, 因此陀螺罗经不能用于高纬度地区.

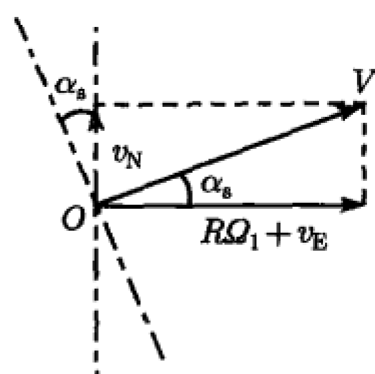


图 6.4　载体绝对速度的分解

2) O 点沿 $\mathscr{E}$ 球面的子午线做变速运动

令方程组 (6.1.11) 中 v_E 为零, $v_N = V_N$ 随时间任意变化, 并利用式 (6.1.14) 将 β 置换为 β_1, 得到

$$\dot{\alpha} - k\beta_1 = \frac{k_1 \dot{V}_N}{g} \tag{6.1.25a}$$

$$\dot{\beta}_1 + k\alpha = \frac{kV_N}{R\Omega_1} \tag{6.1.25b}$$

化作复数形式

$$\dot{z} + \mathrm{i}kz = \frac{k_1}{g}\left(\dot{V}_N + \frac{\mathrm{i}g}{kR}V_N\right) \tag{6.1.26}$$

此方程的一般解可根据式 (4.1.48) 写出, 得到

$$z(t) = \left[z(0) + \frac{k_1}{g}\int_0^t \left[\dot{V}_N(\tau) + \frac{\mathrm{i}g}{kR}V_N(\tau)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt} \tag{6.1.27}$$

利用公式 (5.1.31) 化作

$$z = z_s + (z_0 - z_{s0})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt} + z_a \tag{6.1.28}$$

其中

$$z_s = \frac{V_N}{R\Omega_1} \tag{6.1.29}$$

$$z_a = \frac{1}{R\Omega_1}\left(\frac{k^2}{k_s^2} - 1\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\int_0^t \dot{V}_N(\tau)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\tau}\mathrm{d}\tau \tag{6.1.30}$$

z_s 即陀螺罗经的速度误差 α_s, 其数值随载体速度 V_N 而改变. z_a 的实部为罗经的**加速度误差**, 载体做匀加速运动时, 令 $\dot{V}_N = a$, 式 (6.1.30) 简化为

$$z_a = z_a^*\left(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\right) \tag{6.1.31}$$

常数 z_a^* 定义为

$$z_a^* = \frac{\mathrm{i}a}{kR\Omega_1}\left(1 - \frac{k^2}{k_s^2}\right) \tag{6.1.32}$$

因此载体匀加速运动时的罗经运动规律为

$$z = z_s + z_a^* + (z_0 - z_{s0} - z_a^*)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt} \tag{6.1.33}$$

载体做匀速运动是 $a=0$ 的特殊情形

$$z = z_{\mathrm{s}} + (z_0 - z_{\mathrm{s}0})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt} \tag{6.1.34}$$

此时极轴围绕平衡位置 z_{s} 以周期 $T_{\mathrm{p}} = 2\pi/k$ 做受迫规则进动. 但与陀螺摆不同, 陀螺罗经的进动周期随地理纬度 ϕ 改变而不是常数

$$T_{\mathrm{p}} = 2\pi\sqrt{\frac{H}{\mu\Omega_{\mathrm{e}}\cos\phi}} \tag{6.1.35}$$

纬度接近地球两极时周期无限延长.

3) O 点做盘旋运动

设载体以 O_1 为中心做盘旋运动, 盘旋角速度和盘旋半径为 Ω 和 ρ, 初始时载体沿子午线向北运动 (见图 6.5). 盘旋速度 $\boldsymbol{v}$ 与子午线夹角为 Ωt, 沿 E 和 N 轴的投影为

$$\begin{aligned} v_E &= -\Omega\rho\sin\Omega t \\ v_N &= \Omega\rho\cos\Omega t \end{aligned} \tag{6.1.36}$$

代入式 (6.1.29), 速度误差随盘旋运动周期变化

$$z_{\mathrm{s}} = \frac{\Omega\rho}{R\Omega_1}\cos\Omega t \tag{6.1.37}$$

代入方程 (6.1.11), 略去 ρ/R 项, 得到

$$\dot{\alpha} - k_1\beta = -\Omega_2 - \frac{k_1\Omega^2\rho}{g}\sin\Omega t \tag{6.1.38a}$$

$$\dot{\beta} + \Omega_1\alpha = 0 \tag{6.1.38b}$$

利用式 (6.1.22) 和复数坐标 z 作变量置换, 化作

$$\dot{z} + \mathrm{i}kz = \frac{\mathrm{i}k_1\Omega^2\rho}{2g}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t}\right) \tag{6.1.39}$$

根据式 (4.1.48) 写出此方程的一般解

$$z(t) = \left[z(0) + \frac{\mathrm{i}k_1\Omega^2\rho}{2g}\int_0^t\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+\Omega)\tau} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-\Omega)\tau}\right)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt} \tag{6.1.40}$$

展开后导出周期变化的加速度误差

$$z_{\mathrm{a}} = \frac{k_1\Omega^2\rho}{g(\Omega^2 - k^2)}\left[\Omega(\cos kt + \cos\Omega t) - \mathrm{i}(\Omega + k)(\sin kt + \sin\Omega t)\right] \tag{6.1.41}$$

可见载体的盘旋角速度 Ω 必须避免与罗经的进动角速度接近, 否则加速度误差将无限增大出现谐振现象.

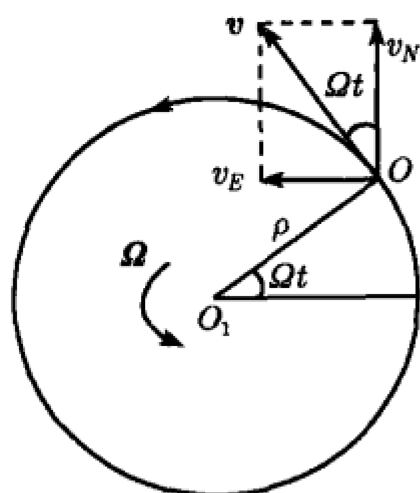


图 6.5　载体做盘旋运动时的速度分解

6.1.5　陀螺罗经的舒勒条件和加速度误差

如罗经的固有频率 k 等于舒勒频率 $k_{\rm s}$, 参数之间满足以下条件

$$k_1 \Omega_1 = \frac{g}{R} \tag{6.1.42}$$

此时式 (6.1.30) 表示的加速度误差消除为零. 满足此条件时方程 (6.1.26) 化作

$$\dot{z} + {\rm i}k_{\rm s}z = \frac{1}{R\Omega_1}\left(\dot{V}_N + {\rm i}k_{\rm s}V_N\right) \tag{6.1.43}$$

对于 $V_N(t)$ 的任意变化规律, 此方程都存在特解

$$z(t) = \frac{V_N(t)}{R\Omega_1} \tag{6.1.44}$$

从而证明, 只要满足舒勒条件 (6.1.42), 且罗经的初始偏角与特解一致, 则不论载体沿子午线如何变速, 罗经除速度误差以外不附加任何其他误差. 这时支点加速度所引起的惯性力矩恰好使罗经进动到与新的速度误差相适应的平衡位置.

式 (6.1.16) 表示的罗经固有频率 k 为地理纬度 ϕ 的函数. 如罗经在设计纬度 ϕ_0 处满足舒勒条件, 参数之间满足

$$k_{\rm s} = \sqrt{\frac{\mu\Omega_{\rm e}\cos\phi_0}{H}} \tag{6.1.45}$$

则罗经在任意纬度 ϕ 处的固有频率 k 可写作

$$k = k_{\rm s}\sqrt{\frac{\cos\phi}{\cos\phi_0}} \tag{6.1.46}$$

代入式 (6.1.31) 计算载体匀加速运动时的加速度误差, 得到

$$z_{\rm a} = \frac{{\rm i}a}{kR\Omega_1}\left(1 - \frac{\cos\phi}{\cos\phi_0}\right)\left(1 - {\rm e}^{-{\rm i}kt}\right) \tag{6.1.47}$$

如加速时间 t_1 极其短促, kt_1 为微量, 将上式中的 t 代以 t_1, 并将指数函数展成 ${\rm i}kt_1$ 的幂级数, 只保留一次项, 计算结果以 $z_{\rm a}^{**}$ 表示, 其实部和虚部分别为

$$\alpha_{\rm a}^{**} = \frac{\Delta V}{R\Omega_1}\left(\frac{\cos\phi}{\cos\phi_0} - 1\right), \quad \beta_{\rm a}^{**} = 0 \tag{6.1.48}$$

其中 $\alpha_{\rm a}^{**}$ 为陀螺罗经在加速结束时刻的加速度误差, 它与载体在加速过程中的速度增量 $\Delta V = at_1$ 成正比, 且与所在纬度 ϕ 有关. 根据式 (6.1.48) 可以估计加速终止时极轴到达的实际位置与新平衡位置之间的关系

$$\begin{aligned}
&\phi < \phi_0: \quad \alpha_{\rm a}^{**} > 0, \quad \text{极轴超过平衡位置.}\\
&\phi = \phi_0: \quad \alpha_{\rm a}^{**} = 0, \quad \text{极轴在平衡位置上.}\\
&\phi > \phi_0: \quad \alpha_{\rm a}^{**} < 0, \quad \text{极轴落后于平衡位置.}
\end{aligned}$$

将加速终止时刻 t_1 作为下一阶段载体匀速运动的初始时刻, 此时的 α 值为 $\alpha_{\rm a}^{**}$, $\dot{\alpha}$ 的值可令方程 (6.1.25a) 中 $\dot{V}_N = 0$, $\beta = \beta_{\rm a}^{**} = 0$ 导出. 得到

$$\alpha(t_1) = \alpha_{\rm a}^{**}, \quad \dot{\alpha}(t_1) = 0 \tag{6.1.49}$$

加速结束后 α 以式 (6.1.49) 为初始条件做等幅振动. 如罗经存在阻尼, 则 α 做衰减振动, 最大偏差必发生在加速终止时刻 ($t = t_1$). 图 6.6 表示不同纬度处 α 随时间的变化曲线, 图下方为陀螺的极点轨迹.

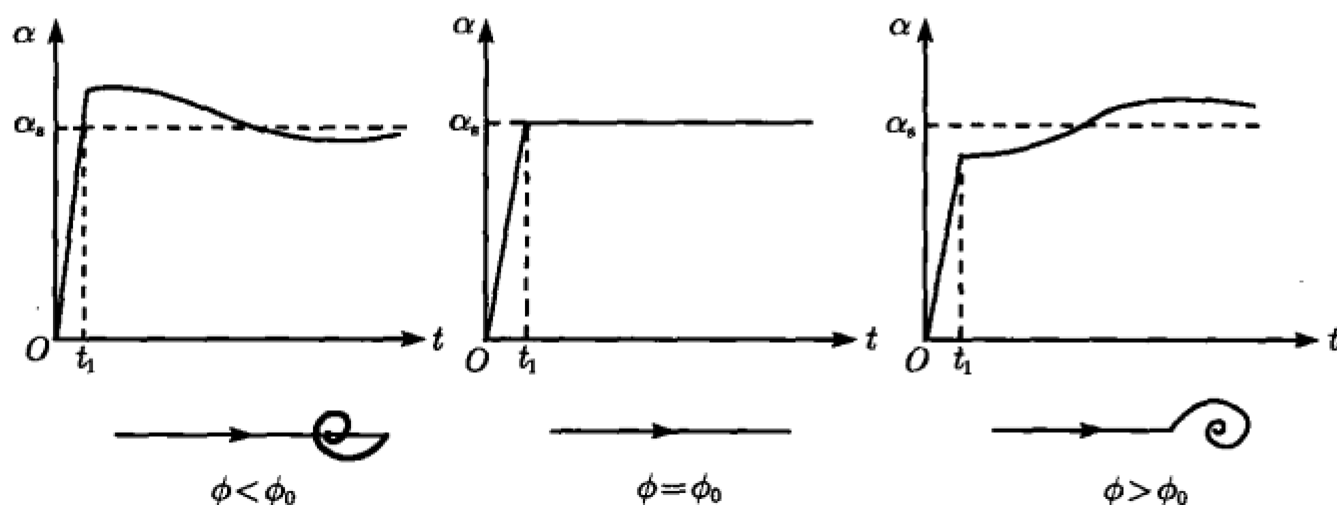


图 6.6　罗经偏角 α 随时间的变化曲线

6.1.6　摇摆误差

作为陀螺罗经主要载体的船舶不可避免地存在摇摆运动. 载体的摇摆不仅能引起第 1 章中讨论过的运动学误差, 而且会在内环组合体上产生惯性力矩而引起动力学误差. 设船的质心 $O_{\rm s}$ 以不变的方位角 ψ 做匀速运动, 同时船绕过 $O_{\rm s}$ 的纵轴 $y_{\rm s}$ 做振幅为 $\varPhi$, 频率为 $\omega_{\rm R}$ 的正弦规律的横倾摆动. 罗经的支点 O 在质心 $O_{\rm s}$ 上高度 h 处随船的摇摆而绕 $O_{\rm s}$ 往复振动, 振幅不大时可近似认为 O 点做水平线振动, 加速度 $\boldsymbol{a}$ 随时间周期变化 (见图 6.7),

$$\boldsymbol{a} = a_E\boldsymbol{E}^0 + a_N\boldsymbol{N}^0 \tag{6.1.50}$$

$$a_E = -a\cos\psi\sin\omega_{\rm R}t, \quad a_N = a\sin\psi\sin\omega_{\rm R}t, \quad a = \varPhi h\omega_{\rm R}^2 \tag{6.1.51}$$

先讨论外环轴的垂直位置不受摇摆影响的理想情形. 设 $(O-\xi\eta\zeta)$ 坐标系仍与地理坐标系 Z,E,N 各轴重合. 计算船的摇摆在内环组合体上引起的惯性力时, 设 $a_E,a_N \ll g$, 忽略 a_E,a_N 与 α,β 的相乘项, 比力 $\boldsymbol{f}$ 对内环坐标系 $(O-xyz)$ 的投影式为

$$\boldsymbol{f}=-\left[g\boldsymbol{i}+a_E\boldsymbol{j}+(g\beta+a_N)\boldsymbol{k}\right] \quad (6.1.52)$$

将式 (6.1.52) 代入式 (6.1.7), 得到重力与惯性力对 O 点的合力矩

$$\boldsymbol{M}=-\mu\left[\left(\beta+\frac{a_N}{g}\right)\boldsymbol{j}-\frac{a_E}{g}\boldsymbol{k}\right] \quad (6.1.53)$$

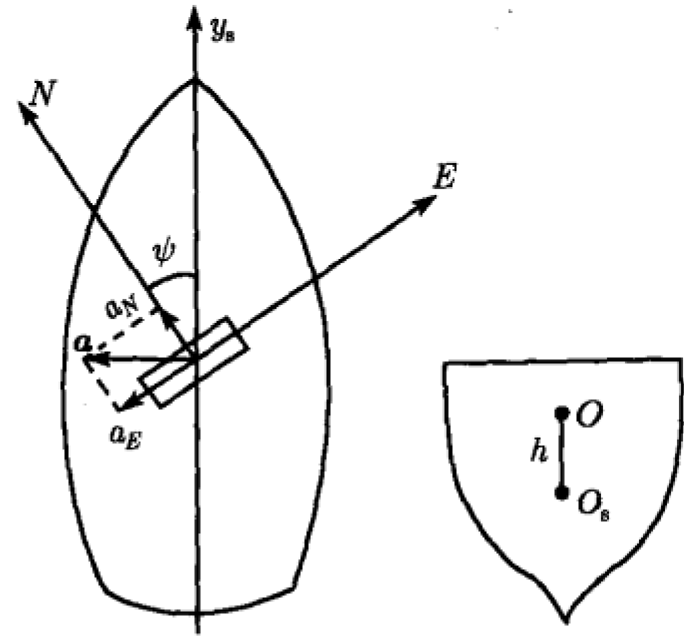


图 6.7　船舶的摇摆

船的摇摆周期 (约 8~10 秒) 远小于罗经的进动周期 (约 84.4 分钟), 上述力矩对罗经的作用效果可用每个摇摆周期 $T_{\mathrm{R}}=2\pi/\omega_{\mathrm{R}}$ 内的平均值代替, 得到

$$\langle\boldsymbol{M}\rangle=\frac{1}{T_{\mathrm{R}}}\int_0^{T_{\mathrm{R}}}\boldsymbol{M}\mathrm{d}t=-\mu\beta\boldsymbol{j} \quad (6.1.54)$$

由于与摇摆有关的惯性力矩的平均效果为零, 此平均值与基座静止时的重力矩无区别, 不存在摇摆误差. 但此理想情形仅当罗经安装在稳定平台上才可能实现.

实际的陀螺罗经采用三环结构, 即在外环和内环之间增加一中环如图 3.5 所示. 内环组合体能相对中环绕 z 轴自由摆动而成为复摆. 如外环轴承固定于船体, 则只有在罗经的支点 O 与船的质心 O_s 重合且轴承无摩擦的理想条件下, 内环组合体才能免除摇摆干扰. 但实际上 O 点与 O_s 点并不重合, 摇摆引起的惯性力使内环产生绕 z 轴的受迫振动而偏离原有位置.

采用 3.2.4 节中建立的三环陀螺运动方程. 基座 $(O-\xi\eta\zeta)$ 各轴依次与地理坐标系的 Z,E,N 轴重合时, ξ 轴已不能代表随船摇摆的外环轴, 后者改以 ξ' 表示. $(O-x_0y_0z_0)$ 和 $(O-xyz)$ 也不能代表陀螺的外环和中环, 而只能视为地理坐标系与内环坐标系之间的过渡坐标系. α,β,γ 定义为内环 $(O-x_1y_1z_1)$ 相对地理坐标系的角度坐标, 而不代表外环, 中环和内环的实际转角 (见图 6.8). 由于进动理论忽略了万向支架质量, 因此进动方程 (3.2.25) 依然有效. 增加中环后, 比力 $\boldsymbol{f}$ 相对 $(O-xyz)$ 轴系的投影式与 (6.1.52) 相同, 质心相对 O_s 点的矢径 $\boldsymbol{l}$ 变为

$$\boldsymbol{l}=-l\,(\boldsymbol{i}+\gamma\boldsymbol{j}) \quad (6.1.55)$$

将式 (6.1.52),(6.1.55) 代入式 (6.1.7) 计算重力与惯性力对 O 点的合力矩, 由于内环

绕极轴的摆动角 γ 远大于 α 或 β, 故计算中保留 a_E, a_N 与 α, β 的相乘项. 得到力矩 $\boldsymbol{M}$ 相对 $(O-xyz)$ 轴系的投影

$$M_x = \left(\frac{\mu a_N}{g}\right)\gamma, \quad M_y = -\mu\left(\beta + \frac{a_N}{g}\right), \quad M_z = \mu\left(\frac{a_E}{g} - \gamma\right) \tag{6.1.56}$$

将式 (6.1.56) 中的 M_z 代入内环绕极轴的摆动方程 (3.2.30), 忽略地理坐标系的缓慢转动对复摆运动的微弱影响. 得到

$$C_1\ddot{\gamma} + \mu\gamma = \frac{\mu a_E}{g} \tag{6.1.57}$$

对于恒速约束情形, 上式中的 C_1 须改为 $C_1 + C_{\mathrm{R}}$. 由于复摆的固有频率远高于船的摇摆频率, 因此方程 (6.1.57) 确定的受迫振动规律可近似表示为

$$\gamma = \frac{a_E}{g} \tag{6.1.58}$$

将式 (6.1.51) 代入式 (6.1.56), 计算 M_x 和 M_y 在每个摇摆周期内的平均值, 得到

$$\langle M_x \rangle = -\frac{\mu a^2 \sin 2\psi}{4g^2}, \quad \langle M_y \rangle = -\mu\beta \tag{6.1.59}$$

可见周期变化的惯性力矩沿 y 轴的水平分量被抵消为零, 但沿 x 轴的垂直分量不能抵消. 此结论也可从图 6.9 直接看出.

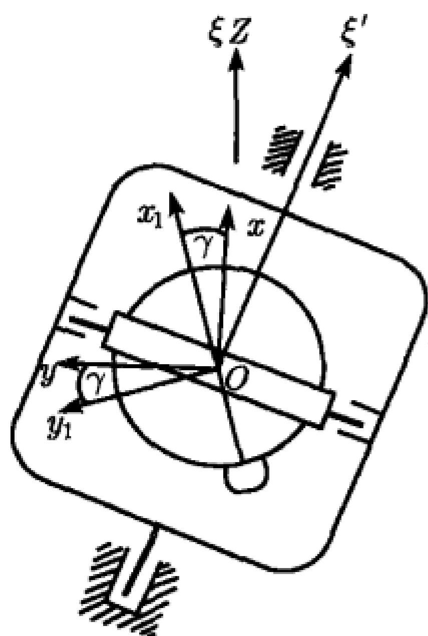


图 6.8　内环绕极轴的摆动

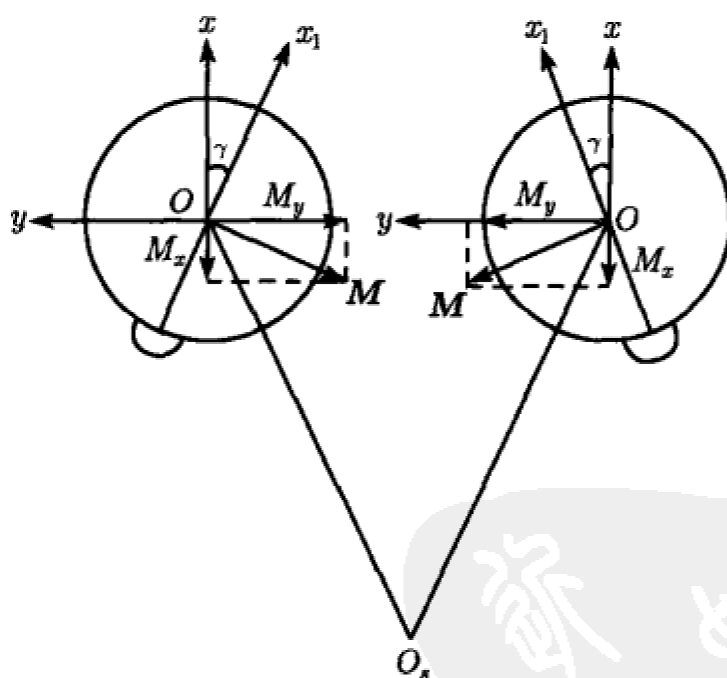


图 6.9　载体摇摆产生的惯性力矩

将式 (6.1.59) 代入进动方程 (3.3.21) 的力矩项, 忽略船速影响, 得到

$$\dot{\alpha} - k_1\beta = \Omega_2 \tag{6.1.60a}$$

$$\dot{\beta} + \Omega_1\alpha = -\frac{k_1 a^2 \sin 2\psi}{4g^2} \tag{6.1.60b}$$

α 的常值特解即罗经的**摇摆误差**, 以 α_{R} 表示

$$\alpha_{\mathrm{R}} = -\frac{k_1 \Phi^2 h^2 \omega_{\mathrm{R}}^4 \sin 2\psi}{4g^2 \Omega_{\mathrm{e}} \cos\phi} \tag{6.1.61}$$

此摇摆误差不仅取决于罗经的结构参数、安装位置和摇摆强度, 而且与纬度角 ϕ 和方位角 ψ 有关. 在 $\psi = 0°, 90°, 180°, 270°$ 等特殊位置摇摆误差为零, $\psi = 45°, 135°, 225°, 315°$ 时摇摆误差有最大值. 纬度愈高摇摆误差愈严重, 接近地球两极时摇摆误差无限增大. 设罗经为舒勒周期, $\Phi = 15°$, $h = 3\mathrm{m}$, $\phi = 60°$, $\psi = 45°$, $T_{\mathrm{R}} = 10\mathrm{s}$, 摇摆误差可高达 17°. 上述摇摆误差的存在是罗经发展初期的严重技术障碍. 为克服此障碍, 陀螺罗经沿两条不同的技术途径发展:

1) 调节惯性力矩与内环摆动角之间的相位差, 发展为带液体摆或带控制回路的陀螺罗经;

2) 加强陀螺内环绕极轴的稳定性, 发展为双转子陀螺罗经.

两条不同的技术途径使陀螺罗经发展为两种不同类型: 前者通常称为**斯伯利型陀螺罗经**, 后者称为**安修茨型陀螺罗经**.

6.2　带阻尼的陀螺罗经

6.2.1　陀螺罗经的阻尼

为了消除陀螺罗经在平衡位置附近持续的周期摆动, 使极轴直接指示子午面, 其平衡位置必须具有渐近稳定性, 即奇点必须由中心转变为稳定的焦点或结点. 与陀螺摆的阻尼方法类似, 可对罗经增加指向椭圆轨迹内部的力矩矢量, 有两种方案:

1) 增加沿 x 轴方向与 β 成比例的径向力矩 (见图 6.10(a)).

2) 增加沿 y 轴方向与 α 成比例的径向力矩 (见图 6.10(b)).

实现第一种阻尼方案的方法很多, 最简单的方法是将带偏心重的内环组合体的重心位置向东偏移一微小角度 ε. 极轴相对水平面倾斜 β 角时, 重力对 O 点的力矩 $\boldsymbol{M}$ 偏离 y 轴但仍保持在水平面内, 其沿 x 轴的分量 M_x 起阻尼作用. 采用这种方案的罗经必须将内环轴与外环轴的位置互换, 以避免上述阻尼力矩传递至外环轴承与约束反力矩相抵消 (见图 6.11). 坐标系转动顺序改为

$$(O-\xi\eta\zeta) \xrightarrow[\eta, y_0]{\beta} (O-x_0y_0z_0) \xrightarrow[x_0, x]{\alpha} (O-xyz) \xrightarrow[z, z_{\mathrm{R}}]{\varphi} (O-x_{\mathrm{R}}y_{\mathrm{R}}z_{\mathrm{R}})$$

此外, 也可利用柔软的钢丝悬挂代替外环轴支承. 1911 年斯伯利最早采用此方案, 将液体摆与内环偏心连接取得阻尼效果.

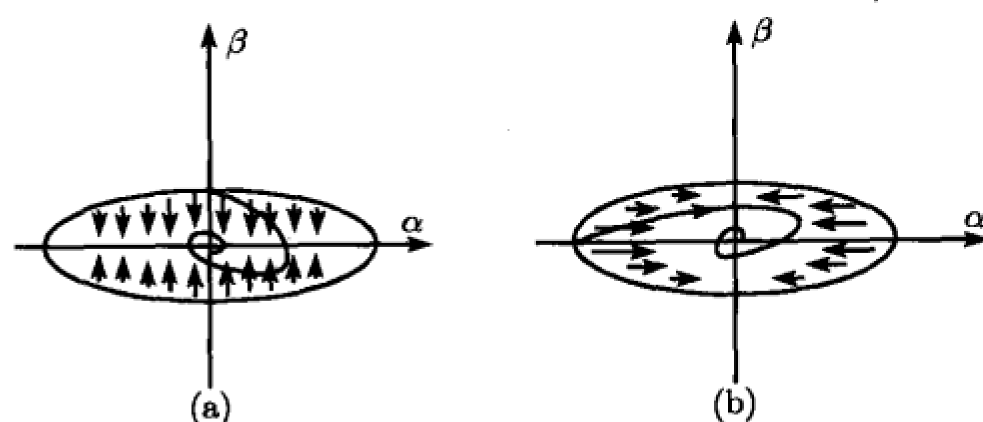


图 6.10　阻尼力矩的作用效果

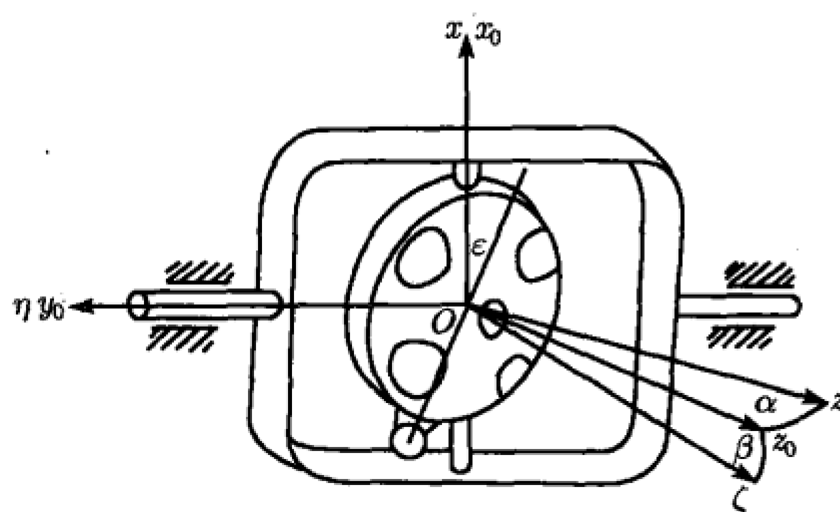


图 6.11　外环轴水平的陀螺罗经

实现第二种方案的困难在于方位角 α 的信息无法获得, 因为 α 的量测基准正是有待罗经建立的子午面. 但利用 α 与 β 的相位差为 90° 的特点, 可将此阻尼力矩由大小与 β 成正比但相位与 β 相差 90° 的水平力矩代替. 例如, 在陀螺内环上固定如图 4.9 所示的液体连通器, 液体黏性极大时成为强阻尼摆, 所产生的倾覆力矩与内环运动之间恰好有接近 90° 的相位差. 液体连通器阻尼方案主要用于安修茨型陀螺罗经, 将在 6.4 节中详细讨论.

6.2.2　带阻尼陀螺罗经的动力学方程

由于进动理论忽略万向支架的质量, 因此列写图 6.11 所示陀螺罗经的动力学方程时不须考虑内、外环转动次序的变更. 将内环组合体质心 O_c 相对 O 点的矢径 $\boldsymbol{l}$ 改为

$$\boldsymbol{l} = l\,(-\boldsymbol{i} + \varepsilon \boldsymbol{j}) \tag{6.2.1}$$

将式 (6.2.1) 和表 3.4 第二行列出的 $\boldsymbol{f}$ 代入式 (6.1.7) 计算内环组合体的重力和惯性力对 O 点的矩 $\boldsymbol{M}$. 经过与前面相同的简化过程, 得到 $\boldsymbol{M}$ 在 x 和 y 轴上的投影

$$M_x = -\mu\varepsilon\left(\beta + \frac{\dot{V}_N}{g}\right),\quad M_y = -\mu\left(\beta + \frac{\dot{V}_N}{g}\right) \tag{6.2.2}$$

将式 (6.2.2) 代入方程 (3.3.21), 导出带阻尼的陀螺罗经进动方程

$$\dot{\alpha} - k_1\beta = -\frac{V_E}{R}\tan\phi + \frac{k_1\dot{V}_N}{g} \tag{6.2.3a}$$

$$\dot{\beta} + \left(\frac{V_E}{R}\right)\alpha + \varepsilon k_1\beta = \frac{V_N}{R} - \frac{\varepsilon k_1\dot{V}_N}{g} \tag{6.2.3b}$$

6.2.3　稳定性分析

设载体静止, 且非齐次项被力矩 (6.1.3) 消除, 方程 (6.2.3) 简化为

$$\dot{\alpha} - k_1\beta = 0 \tag{6.2.4a}$$

$$\dot{\beta} + \Omega_1\alpha + \varepsilon k_1\beta = 0 \tag{6.2.4b}$$

将以上二式相除, 消去时间变量后得到

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\alpha} = -\frac{\Omega_1\alpha + \varepsilon k_1\beta}{k_1\beta} \tag{6.2.5}$$

利用附录三中的表 A.3 判断奇点 $\alpha_s = \beta_s = 0$ 的类型, $\varepsilon < 2\sqrt{\Omega_1/k_1}$ 时为稳定焦点, $\varepsilon > 2\sqrt{\Omega_1/k_1}$ 时为稳定结点, 极轴的平衡位置为渐近稳定. 如内环组合体的质心改为向西偏移, 则 $\varepsilon < 0$, 奇点为不稳定焦点或结点, 极轴的平衡位置变为不稳定.

从方程组 (6.2.4) 的二式中消去 β, 化作 α 的二阶微分方程

$$\ddot{\alpha} + 2\zeta k\dot{\alpha} + k^2\alpha = 0 \tag{6.2.6}$$

其中 $k = \sqrt{k_1/\Omega_1}$. 加大 ε 角则相对阻尼系数 ζ 增大, 周期摆动的衰减过程加快且周期延长: $\zeta < 1$ 时阻尼对罗经周期的影响由式 (4.1.13) 确定.

6.2.4　纬度误差

设载体沿 $\mathscr{E}$ 球面做方位角不变的匀速运动, 将式 (3.3.17) 代入方程组 (6.2.3), 令 $\dot{V}_N = 0$, 得到

$$\dot{\alpha} - k_1\beta = -\Omega_2 - \frac{v_E}{R}\tan\phi \tag{6.2.7a}$$

$$\dot{\beta} + \left(\Omega_1 + \frac{v_E}{R}\right)\alpha + \varepsilon k_1\beta = \frac{v_N}{R} \tag{6.2.7b}$$

此方程组有以下常值特解

$$\alpha_s = \frac{v_N}{R\Omega_1 + v_E} - \varepsilon\tan\phi, \quad \beta_s = \frac{\Omega_2}{k_1} + \frac{v_E}{k_1 R}\tan\phi \tag{6.2.8}$$

其中 β_s 与式 (6.1.24) 相同, α_s 的第一项为速度误差. 增加的第二项为阻尼引起的误差, 因为与地理纬度 ϕ 的正切成比例, 称为**纬度误差**. 由于此误差随纬度的增高而无限增大, 成为陀螺罗经不能用于高纬度地区的又一原因.

6.2.5　第二类加速度误差

不受加速度干扰的舒勒条件只适用于无阻尼陀螺罗经. 有阻尼时即使罗经的进动周期等于舒勒周期, 也有加速度误差产生, 称为**第二类加速度误差**.

设载体沿子午线做变速运动, 令方程 (6.2.3) 中 $V_E = R\Omega_1$, 利用 (6.1.22) 将 β 置换为 β_1, 得到

$$\dot{\alpha} - k\beta_1 = \frac{k_1 \dot{V}_N}{g} \tag{6.2.9a}$$

$$\dot{\beta}_1 + k\alpha + \varepsilon k_1 \beta_1 = \frac{k}{R\Omega_1}\left(V_N - \frac{\varepsilon k_1 R \dot{V}_N}{g}\right) \tag{6.2.9b}$$

利用式 (6.1.18) 定义的复变量 z, 将方程组 (6.2.9) 化为复数形式. 设罗经的参数已满足舒勒条件 (6.1.42), 得到

$$\dot{z} + \mathrm{i}kz + \mathrm{i}\varepsilon k_1 \beta_1 = \frac{1}{R\Omega_1}\left[\dot{V}_N + \mathrm{i}k\left(V_N - \frac{\varepsilon \dot{V}_N}{\Omega_1}\right)\right] \tag{6.2.10}$$

用摄动法对此方程作近似积分. 将 ε 取为小参数, 并将方程 (6.2.10) 的解 $z(t)$ 展成 ε 的幂级数, 仅保留一次项. $\varepsilon = 0$ 时对应于无阻尼的舒勒周期罗经, 因此 $z(t)$ 的零次近似应与速度误差式 (6.1.29) 相等. 得到

$$z(t) = \frac{V_N(t)}{R\Omega_1} + \varepsilon z_1(t) \tag{6.2.11}$$

式中第二项即由阻尼引起的第二类加速度误差 z_{a}, 它与 ε 成正比. 将式 (6.2.11) 代入方程 (6.2.10), 令两边 ε 的一次幂系数相等, 得到 $z_1(t)$ 应满足的微分方程

$$\dot{z}_1 + \mathrm{i}kz_1 = -\frac{\mathrm{i}k\dot{V}_N}{R\Omega_1^2} \tag{6.2.12}$$

设载体做 $\dot{V}_N = a$ 的匀加速运动, z_1 的初值为零, 解出加速度误差的变化规律为

$$z_{\mathrm{a}} = \varepsilon z_1(t) = -\frac{\varepsilon a}{R\Omega_1^2}\left(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\right) \tag{6.2.13}$$

载体加速时间 t_1 极短促时, 将上式中的指数函数展成 $\mathrm{i}kt$ 的幂级数, 令 $t = t_1$, 仅保留其二次项. 得到加速结束时刻的误差值 z_{a}^{**}

$$z_{\mathrm{a}}^{**} = \alpha_{\mathrm{a}}^{**} + \mathrm{i}\left(\frac{k}{\Omega_1}\right)\beta_{\mathrm{a}}^{**} \tag{6.2.14}$$

$$\alpha_{\mathrm{a}}^{**} = -\frac{\varepsilon a}{2R\Omega_1^2}(kt_1)^2, \quad \beta_{\mathrm{a}}^{**} = -\frac{\varepsilon \Delta V}{R\Omega_1} \tag{6.2.15}$$

其中 $\Delta V = at_1$ 为载体加速前后的速度增量. 由于 $\alpha_a^{**} < 0$ 且与 kt_1 的二次项成正比, 表明加速终止时极轴总是落后于但十分接近于平衡位置. 在加速终止时刻 $\dot{V}_N$ 突然消失, 令方程 (6.2.3a) 中 $\dot{V}_N = 0$, $\beta = \beta_a^{**}$, 导出的 $\dot{\alpha}$ 为负值, 与 β_a^{**} 同号. 因此加速结束后, α 以接近于零的初始值和负初始速度做衰减振动. 最大偏差发生在加速结束后约四分之一周期的时刻 (见图 6.1 2).

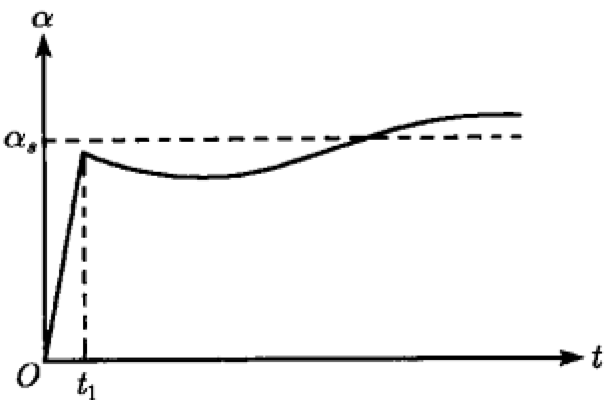


图 6.12　罗经偏角 α 随时间的变化曲线

6.3　电控陀螺罗经

6.3.1　电控陀螺罗经的动力学方程

现代的陀螺罗经利用控制回路的电磁力矩代替重力矩对斯伯利型陀螺罗经实现修正作用, 称为**电控陀螺罗经**. 控制回路的组成类似于 5.1 节中叙述的陀螺垂直仪. 在自由陀螺的内环上悬挂复摆元件, 用于量测内环相对水平面的倾角 β. 量测信号经放大后输入力矩器, 产生按 (6.1.5) 规律变化的电磁力矩. 采取强烈的阻尼措施使复摆元件成为 4.1 节中叙述的强阻尼摆 (见图 6.13). 利用复摆的受迫振动与内环运动之间的相位差接近 90° 的特点, 可以实现对罗经摇摆误差的抑制.

设强阻尼摆的摆动轴平行于 y 轴, 摆绕 y 轴相对内环的顺时针转角为 ϑ (见图 6.14), 作用于复摆上的重力和惯性力矩与式 (6.1.8) 中的 M_y 相似, 只须将偏角 β

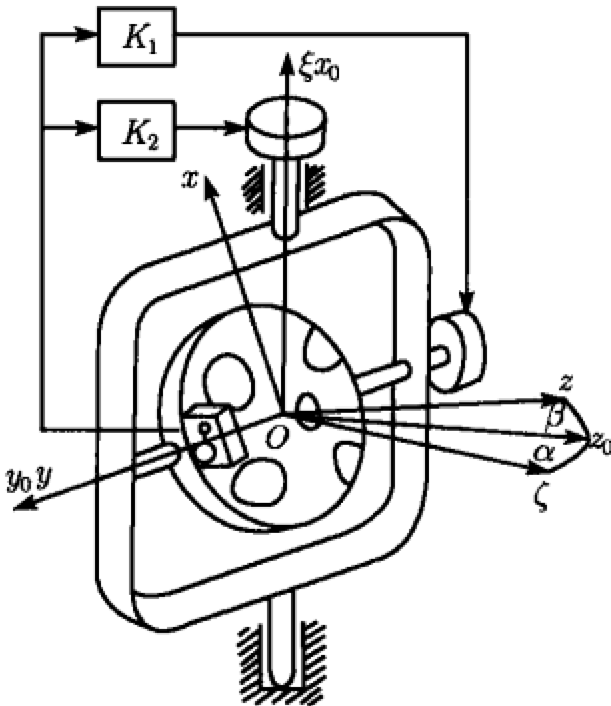


图 6.13　电控罗经的控制回路

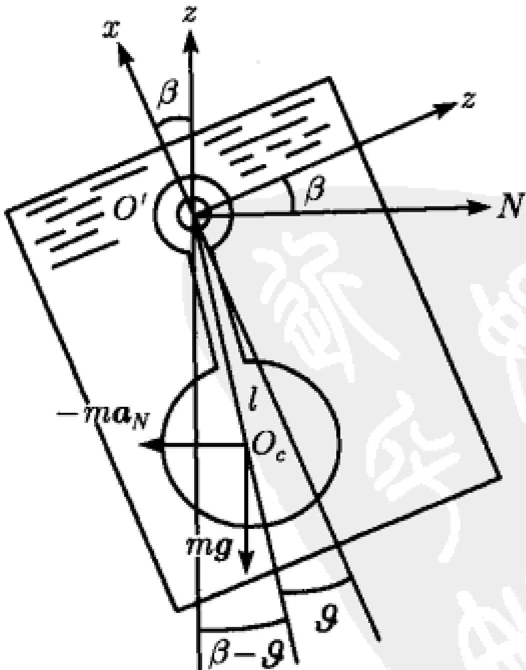


图 6.14　强阻尼摆元件

改为 $\beta-\vartheta$, μ 为复摆的摆性系数. 略去微量后, 得到

$$M_y=-\mu\left(\beta-\vartheta+\frac{\dot{V}_N}{g}\right) \tag{6.3.1}$$

根据 4.1.4 节中的分析, 列写强阻尼摆的动力学方程时可将惯性项略去, 使重力和牵连惯性力矩 M_y 与阻尼力矩 $-D\dot{\vartheta}$ 平衡, 得到

$$T\dot{\vartheta}+\vartheta=\beta+\frac{\dot{V}_N}{g} \tag{6.3.2}$$

其中 $T=D/\mu$ 为强阻尼摆的时间常数.

沿外环轴和内环轴安装力矩器, 使产生与复摆量测信号 ϑ 成比例的控制力矩

$$M_x=K_2\vartheta,\quad M_y=-K_1\vartheta \tag{6.3.3}$$

其中 K_1,K_2 为回路的放大系数. 将式 (6.3.3) 代入方程 (3.3.21), 设载体做匀速运动, 经过与 6.1 节类似的简化过程, 得到电控陀螺罗经的进动方程

$$\dot{\alpha}-k_1\vartheta=-\frac{V_E}{R}\tan\phi \tag{6.3.4a}$$

$$\dot{\beta}+\left(\frac{V_E}{R}\right)\alpha+\varepsilon k_1\vartheta=\frac{V_N}{R} \tag{6.3.4b}$$

参数 k_1,ε 定义为

$$k_1=\frac{K_1}{H},\quad \varepsilon=\frac{K_2}{K_1} \tag{6.3.5}$$

式 (6.3.2) 与 (6.3.4) 组成封闭的方程组, 确定 3 个未知变量 α,β,ϑ.

6.3.2 稳定性分析

设基座与地球固定, 罗经的动力学方程简化为

$$\dot{\alpha}-k_1\vartheta=-\Omega_2 \tag{6.3.6a}$$

$$\dot{\beta}+\Omega_1\alpha+\varepsilon k_1\vartheta=0 \tag{6.3.6b}$$

$$T\dot{\vartheta}+\vartheta-\beta=0 \tag{6.3.6c}$$

此方程组的特征方程为

$$Ts^3+s^2+\varepsilon k_1 s+k_1\Omega_1=0 \tag{6.3.7}$$

根据表 A.2 列出的劳斯–赫尔维茨判据, 导出罗经的渐近稳定性条件

$$\varepsilon>T\Omega_e\cos\phi \tag{6.3.8}$$

图 6.15 为 ε 的稳定域随纬度 ϕ 的变化情况, 复摆的时间常数愈长, 不稳定范围愈大. 强阻尼摆的时间常数一般远小于罗经进动周期, 因此除讨论摇摆误差以外, 在进动理论中可以忽略摆的滞后使计算过程简化. 略去复摆方程 (6.3.2) 中的阻尼力矩项, 得到

$$\vartheta = \beta + \frac{\dot{V}_N}{g} \tag{6.3.9}$$

代入方程 (6.3.4), 得到

$$\dot{\alpha} - k_1\beta = -\frac{V_E}{R}\tan\phi + \frac{k_1\dot{V}_N}{g} \tag{6.3.10a}$$

$$\dot{\beta} + \left(\frac{V_E}{R}\right)\alpha + \varepsilon k_1\beta = \frac{V_N}{R} - \frac{\varepsilon k_1\dot{V}_N}{g} \tag{6.3.10b}$$

载体沿 $\mathscr{E}$ 球面做方位角不变的匀速运动时, 将式 (3.3.17) 代入方程组 (6.3.10), 得到与式 (6.2.4) 完全相同的进动方程. 载体沿子午线做变速运动时, 令 (6.3.10) 中 $V_E = 0$, 且利用 (6.1.22) 将 β 置换为 β_1, 得到的进动方程与 (6.2.9) 完全相同. 可见电控陀螺罗经的进动规律与带阻尼的摆式陀螺罗经相同, 速度误差与加速度误差的计算公式亦完全相同.

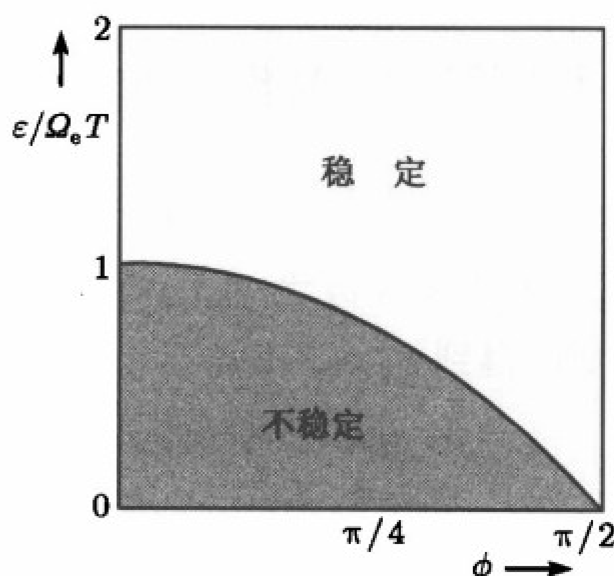


图 6.15　参数 ε 的稳定域

6.3.3　摇摆误差

考虑船的摇摆时, 由于摇摆周期与强阻尼摆的时间常数同数量级, 不允许忽略复摆方程中的阻尼力矩项. 船摇摆时在复摆上产生绕 y 轴的惯性力矩 $M_a = \mu a_N$, 利用式 (6.1.48) 算出

$$M_a = \frac{\mu a}{g}\sin\psi\sin\omega_R t \tag{6.3.11}$$

复摆在此力矩激励下的受迫振动方程为

$$T\dot{\vartheta} + \vartheta = \beta + \frac{a}{g}\sin\psi\sin\omega_R t \tag{6.3.12}$$

罗经的进动过程比复摆的摆动过程缓慢得多, 因此在计算复摆的受迫振动时可将 β 视为常数, 利用式 (4.1.49),(4.1.50) 导出方程 (6.3.12) 的特解

$$\vartheta = \beta + \frac{\sigma a}{g}\sin\psi\sin(\omega_R t + \delta) \tag{6.3.13}$$

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{1+\omega_{\mathrm{R}}^2 T^2}}, \quad \delta = \arctan(\omega_{\mathrm{R}} T) \tag{6.3.14}$$

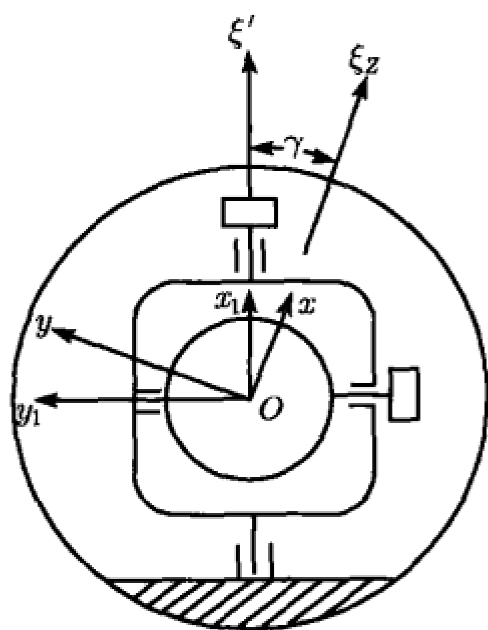


图 6.16　电控罗经的外环组合体

与摆式罗经相比, 电控罗经是另一种类型的三环陀螺. 它虽不增添中环, 且内环组合体无质量偏心, 但整个外环组合体装在一个容器内, 此容器可绕陀螺的极轴自由转动且质心下移而形成复摆 (见图 6.16). 容器摆动角 γ 的变化规律与式 (6.1.58) 完全相同. 将图 6.7 与图 6.16 比较, 虽然前者是内环组合体摆动, 后者是外环组合体摆动, 但对于不考虑万向支架质量的进动理论而言, 这两种情况无本质区别.

外环组合体摆动时力矩器随之改变方位. 忽略阻尼力矩, 令 $\varepsilon = 0$,α, β, γ 定义为 $(O-xyz)$ 相对地理坐标系的角度坐标, 而不代表外环、内环和容器的实际转角. 沿内环轴的控制力矩 $\boldsymbol{M}$ 对 x, y 轴的投影为

$$M_x = K_2 \vartheta \gamma, \quad M_y = -K_1 \vartheta \tag{6.3.15}$$

上式中的 γ, ϑ 以式 (6.1.58), (6.3.13) 代入后, 计算 M_x, M_y 在每个摇摆周期内的平均值, 得到

$$\langle M_x \rangle = -\frac{K_2 a^2 \sin 2\psi}{4g^2\left(1+\omega_{\mathrm{R}}^2 T^2\right)}, \quad \langle M_y \rangle = -K_1 \vartheta \tag{6.3.16}$$

将上式代入陀螺进动方程 (3.3.21) 的力矩项, 忽略船速影响, α 的常值特解即陀螺罗经的摇摆误差 α_{R}

$$\alpha_{\mathrm{R}} = -\left(\frac{1}{1+\omega_{\mathrm{R}}^2 T^2}\right) \frac{k_2 \Phi^2 h^2 \omega_{\mathrm{R}}^4 \sin 2\psi}{4g^2 \Omega_{\mathrm{e}} \cos \phi} \tag{6.3.17}$$

与式 (6.1.61) 相比, 摇摆误差减小为 $\left(1+\omega_{\mathrm{R}}^2 T^2\right)^{-1}$ 倍. 复摆的时间常数愈大, 摇摆误差愈小. 例如, $T_{\mathrm{R}} = 10\mathrm{s}, T = 38\mathrm{s}$, 摇摆误差约减小 600 倍.

6.3.4　陀螺方位仪

将控制回路的水平轴力矩器切断, 令 $K_1 = 0$, 同时增大垂直轴力矩器的放大系数 K_2, 并按式 (6.1.3) 的规律施加修正力矩以消除速度误差, 则陀螺罗经转变为**陀螺方位仪**. 令方程 (6.3.10a) 中的 k_1 和非齐次项为零, 方程 (6.3.10b) 中的 εk_1 改以 k_2 表示, 当 k_2 足够大时略去第二项 $(V_E/R)\,\alpha$, 得到陀螺方位仪的进动方程

$$\dot{\alpha} = 0 \tag{6.3.18a}$$

$$\dot{\beta} + k_2\beta = -\frac{k_2\dot{V}_N}{g} \tag{6.3.18b}$$

式 (6.3.18a) 给出 α 的常值解, 式 (6.3.18b) 表明 β 的变化规律是向平衡位置 $\beta_s = -\dot{V}_N/g$ 趋近的衰减非周期运动. $\dot{V}_N = 0$ 时极轴在水平面内保持任意给定的初始方位不变. 载体沿子午线有加速度时, $\dot{V}_N$ 仅影响 β 的平衡位置而对 α 无影响, 不产生加速度误差. 因此陀螺方位仪可在较短的时间范围内指示方位, 尤其适用于陀螺罗经不能工作的高纬度地区, 或载体做变速运动的情形.

用控制回路代替重力摆的电控陀螺罗经存在许多优点, 主要是控制系数 K_1, K_2 可任意调节. 罗经起动时加大 K_2 可以缩短极轴到达平衡位置的衰减时间. 在高纬度地区令 K_1 为零可将陀螺转变为方位仪工作状态. 载体加速时可令 K_2 为零以消除第二类加速度误差, 也可令 K_1 为零以转变为方位仪, 或令 K_1, K_2 同时为零转变为自由陀螺以消除全部加速度误差. 此外, 电磁力矩器很容易使修正力矩 (6.1.3) 付诸实现, 以消除速度误差. 但与载体速度有关的非齐次项消失后, 舒勒条件即失去意义, 因此电控陀螺罗经的周期不受舒勒周期的限制.

6.4　双转子陀螺罗经

6.4.1　双转子陀螺罗经的运动方程

1908 年安修茨制造了利用水银浮力支承的单转子摆式罗经. 后来为了克服摇摆误差而增加一对侧放的转子, 以加强陀螺壳体绕极轴的稳定性. 1927 年进一步改进为**双转子陀螺罗经**, 它由称作**陀螺球**的球形壳体和球内两只单自由度陀螺组成, 即第 3 章中所陈述的双陀螺系统 (见图 3.9).

采用 3.4 节中规定的坐标系和角度坐标, 设 $(O-xyz)$ 固结于陀螺球, z 轴沿二陀螺动量矩的合矢量方向, x 轴平行于二陀螺支架的转轴. 陀螺球组合体的质心 O_c 沿 x 轴的负方向向下偏离支点 O, μ 为摆性系数. 载体做任意运动时, 利用表 3.4 和式 (6.1.7) 计算陀螺球组合体的重力和惯性力对 O 点的矩 $\boldsymbol{M}$, 略去微量后得到 $\boldsymbol{M}$ 相对 $(O-xyz)$ 轴系的投影为

$$M_x = 0,\ \ M_y = -\mu\left(\beta + \frac{\dot{V}_N}{g}\right),\ \ M_z = -\mu\left(\gamma - \frac{\dot{V}_E}{g}\right) \tag{6.4.1}$$

设联结二陀螺支架的连杆与球体之间有弹簧相联系, 弹簧刚度为 K, 连杆居中时弹簧不变形. 陀螺支架相对球体做方向相反、角度相等的转动时, 连杆偏移并引起弹簧变形产生与转角 δ 成正比的弹性恢复力矩 M_ε. 作用在二陀螺支架上

$$M_\varepsilon = -K\delta \tag{6.4.2}$$

将式 (6.4.1) 和 (6.4.2) 代入方程组 (3.5.22), 其中的 $\Omega_\xi, \Omega_\eta, \Omega_\zeta$ 以表 3.3 的第二行代入, 经过与上节相同的省略, 得到双转子陀螺罗经的进动方程

$$\dot{\alpha} - k_1\beta = -\frac{V_E}{R}\tan\phi + \frac{k_1\dot{V}_N}{g} \tag{6.4.3a}$$

$$\dot{\beta} + \left(\frac{V_E}{R}\right)\alpha = \frac{V_N}{R} \tag{6.4.3b}$$

$$\dot{\gamma} + k_3\delta = -\frac{V_E}{R} \tag{6.4.4a}$$

$$\dot{\delta} - k_2\gamma = -\frac{k_2\dot{V}_E}{g} \tag{6.4.4b}$$

其中常数 k_1, k_2, k_3 定义为

$$k_1 = \frac{\mu}{H_1},\ \ k_2 = \frac{\mu}{H_2},\ \ k_3 = \frac{K}{H_2} \tag{6.4.5}$$

H_1, H_2 的定义见式 (3.5.24). 式 (6.4.3) 和 (6.4.4) 为两组独立的方程组, 分别确定两组未知变量 α, β 和 γ, δ.

6.4.2　双转子陀螺罗经的舒勒条件

方程组 (6.4.3) 形式上与式 (6.1.10) 完全相同, 因此 6.1 节中叙述的单转子陀螺罗经进动规律亦完全适用于双转子陀螺罗经. 罗经的固有频率由式 (6.1.16) 确定, 对应的进动周期为

$$T_{\mathrm{p}} = 2\pi\sqrt{\frac{2H_0\cos\varepsilon_0}{\mu\Omega_{\mathrm{e}}\cos\phi}} \tag{6.4.6}$$

罗经的固有频率受陀螺极轴相对 z 轴倾角 ε_0 的影响. 如利用陀螺球内的特殊机构调整 ε_0 角度, 使随时与地理纬度 ϕ 相等, 则式 (6.4.6) 表示的固有频率即与纬度无关. 只要罗经的参数满足以下条件

$$2\pi\sqrt{\frac{2H_0}{\mu\Omega_{\mathrm{e}}}} = T_{\mathrm{s}} \tag{6.4.7}$$

罗经即可在任意纬度处满足舒勒条件而完全免除加速度误差.

6.4.3　稳定性问题

双转子陀螺罗经利用固定在球体上的液体连通器起阻尼作用. 液体对器壁产生绕 y 轴的倾覆力矩, 与液面倾角 ϑ 成正比, 如式 (5.2.33) 所示. ϑ 的变化规律由方程 (4.1.53) 确定. 在方程组 (6.4.3) 中增加此力矩, 并将方程 (4.1.53) 与之联立, 令 $k' = \mu'/H_1$, 设基座与地球固定, 得到带阻尼双转子罗经的进动方程

$$\dot{\alpha} - k_1\beta + k'\vartheta = -\Omega_2 \tag{6.4.8a}$$

$$\dot{\beta} + \Omega_1 \alpha = 0 \tag{6.4.8b}$$

$$T\dot{\vartheta} + \vartheta - \beta = 0 \tag{6.4.8c}$$

此方程组的常值特解为

$$\alpha_s = 0, \quad \beta_s = \vartheta_s = \frac{H_1 \Omega_1}{\mu - \mu'} \tag{6.4.9}$$

α_s 为零表明液体连通器阻尼方案不会引起纬度误差.

方程组 (6.4.8) 的特征方程与式 (5.2.35) 相似

$$Ts^3 + s^2 + k^2 Ts + \Omega_1 (k_1 - k') = 0 \tag{6.4.10}$$

利用劳斯-赫尔维茨判据导出的带阻尼双转子罗经的渐近稳定性条件为

$$k_1 > k' \text{ 或 } \mu > \mu' \tag{6.4.11}$$

此条件与利用液体连通器阻尼的陀螺摆稳定性条件 (5.2.36) 在形式上完全相同.

6.4.4 摇摆误差

方程组 (6.4.4) 确定陀螺球绕极轴的摆动和球内陀螺支架的转动这两种相互关联的运动. 载体做方位不变的匀速运动时, 此方程组有以下常值特解

$$\gamma_s = 0, \quad \delta_s = -\frac{H_2 V_E}{KR} \tag{6.4.12}$$

γ_s 为零表明陀螺球的赤道平面保持水平. δ_s 的存在使弹簧产生常值力矩, 迫使两只陀螺朝相反方向进动, 以保证陀螺球的赤道平面跟踪水平面在惯性空间中的转动.

消去方程组 (6.4.4) 中的变量 δ, 得到 γ 的二阶微分方程

$$\ddot{\gamma} + k_\gamma^2 \gamma = \left(k_s^2 - k_\gamma^2\right) \frac{\dot{V}_E}{g} \tag{6.4.13}$$

其中 k_s 为舒勒频率, k_γ 定义为

$$k_\gamma = \sqrt{k_2 k_3} \tag{6.4.14}$$

陀螺球绕极轴的自由摆动周期为 $T_\gamma = 2\pi/k_\gamma$, 即

$$T_\gamma = \frac{4\pi H_0 \sin\varepsilon_0}{\sqrt{\mu K}} \tag{6.4.15}$$

动量矩 H_0, 倾角 ε_0 愈大, 或陀螺球的摆性愈小, 弹簧愈软, 则周期愈长. 如折算成复摆周期, 陀螺球相当于惯性矩增大为 $B' = H_2^2/K$ 的大复摆, 转子高速旋转时 B' 远远大于陀螺球的实际惯性矩. 如 $\mu = 6675\ \text{g}\cdot\text{cm}$, $K = 140\ \text{g}\cdot\text{cm}$,

$H_2 = 1.58 \times 10^3\ \mathrm{g\cdot cm\cdot s}$, 则 $T_\gamma = 17$ 分钟, 比转子不转时的复摆周期 (约 2 s) 提高 500 多倍. $B' = 1.78 \times 10^8\ \mathrm{g\cdot cm\cdot s}$, 比陀螺球的实际惯性矩 ($550\ \mathrm{g\cdot cm\cdot s}$) 增大约 32 万倍. 由此可见双陀螺系统极大地增强了壳体绕极轴转动的稳定性.

将方程 (6.4.13) 右边的 $\dot{V}_E$ 以船摇摆引起的加速度 a_E 代替, 计算陀螺球受摇摆作用激励的受迫振动. 将式 (6.1.51) 代入后, 动力学方程为

$$\ddot{\gamma} + k_\gamma^2 \gamma = \left(k_\gamma^2 - k_\mathrm{s}^2\right) \frac{\Phi h \omega_\mathrm{R}^2}{g} \cos\psi \sin\omega_\mathrm{R} t \tag{6.4.16}$$

由于陀螺球的自由摆动周期远大于船的摇摆周期, 方程 (6.4.16) 的受迫振动特解近似为

$$\gamma = -\left(k_\gamma^2 - k_\mathrm{s}^2\right) \frac{\Phi h}{g} \cos\psi \sin\omega_\mathrm{R} t \tag{6.4.17}$$

将式 (6.1.51), (6.4.17) 代入式 (6.1.56), 计算 M_x, M_y 在每个摇摆周期内的平均值, 得到

$$\langle M_x \rangle = -\left(\frac{k_\gamma^2 - k_\mathrm{s}^2}{\omega_\mathrm{R}^2}\right) \frac{\mu \Phi^2 h^2 \omega_\mathrm{R}^4 \sin 2\psi}{4g^2}, \quad \langle M_y \rangle = -\mu\vartheta \tag{6.4.18}$$

在陀螺球运动方程 (3.5.22b) 中增加上述力矩, 导出双转子罗经的摇摆误差 α_R

$$\alpha_\mathrm{R} = -\left(\frac{k_\gamma^2 - k_\mathrm{s}^2}{\omega_\mathrm{R}^2}\right) \frac{k_1 \Phi^2 h^2 \omega_\mathrm{R}^4 \sin 2\psi}{4g^2 \Omega_\mathrm{e} \cos\phi} \tag{6.4.19}$$

与式 (6.1.61) 相比, 摇摆误差减小为 $\left(k_\gamma^2 - k_\mathrm{s}^2\right)/\omega_\mathrm{R}^2$ 倍. 陀螺球的自由摆动周期愈接近舒勒周期, 摇摆误差愈小. 如 $T_\mathrm{R} = 10\ \mathrm{s}$, $T_\gamma = 17$ 分钟, 摇摆误差约减小 10^4 倍.

6.5　空间陀螺罗经

6.5.1　陀螺球的舒勒条件

从陀螺球绕极轴的摆动方程 (6.4.13) 可看出, 如陀螺球的固有频率 k_γ 等于舒勒频率 k_s, 则非齐次项为零, 陀螺球赤道面的水平位置即不受载体的纬线方向加速度的干扰.

将方程组 (6.4.4) 中的 γ 用新变量 γ_1 置换

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{\mu}{K}}\,\gamma \tag{6.5.1}$$

置换后的运动方程具有对称形式

$$\dot{\gamma}_1 + k_\gamma \delta = -\sqrt{\frac{\mu}{K}} \frac{V_E}{R} \tag{6.5.2a}$$

$$\dot{\delta} - k_\gamma \gamma_1 = -\frac{k_2 \dot{V}_E}{g} \tag{6.5.2b}$$

引入复数坐标 w

$$w = \delta + \mathrm{i}\gamma_1 \tag{6.5.3}$$

将方程组 (6.5.2) 化作复数形式

$$\dot{w} + \mathrm{i}k_\gamma w = -\sqrt{\frac{\mu}{K}}\frac{k_\gamma}{g}\left(\dot{V}_E + \frac{\mathrm{i}g}{k_\gamma R}V_E\right) \tag{6.5.4}$$

如陀螺球的固有频率 k_γ 等于舒勒频率 k_s, 则有关系式

$$\frac{\sqrt{\mu K}}{H_2} = \sqrt{\frac{g}{R}} \tag{6.5.5}$$

可将方程 (6.5.4) 化作

$$\dot{w} + \mathrm{i}k_s w = -\frac{H_2}{KR}\left(\dot{V}_E + \mathrm{i}k_s V_E\right) \tag{6.5.6}$$

对于 $V_E(t)$ 的任意变化规律, 此方程均存在特解

$$w = -\frac{H_2 V_E(t)}{KR} \tag{6.5.7}$$

或

$$\delta = -\frac{H_2 V_E(t)}{KR}, \quad \gamma = 0 \tag{6.5.8}$$

从而证明, 只要满足舒勒条件且初始条件与特解一致, 则不论载体沿纬线方向如何变速, 陀螺球的赤道面均能保持水平. 此时支点加速度在陀螺球上引起的惯性力矩恰能迫使球体内的陀螺进动到与新的纬向速度相适应的平衡位置.

如果罗经的进动周期和陀螺球摆动周期均等于舒勒周期, 则对于载体的任意变速运动, 罗经都能同时给出不受加速度干扰的子午面和水平面参考基准. 这种特殊的陀螺罗经称为**空间陀螺罗经**.

6.5.2　陀螺罗经在自然坐标系中的动力学方程

以自然坐标系代替地理坐标系可使陀螺罗经运动的分析过程简化. 在自然坐标系中, 罗经极轴的平衡位置垂直于载体的绝对速度矢量 $\boldsymbol{V}$. 如以 (Y, Z) 坐标面代替子午面作为方位基准, 则不存在速度误差. 如陀螺球的赤道面保持水平, 则其法线轴即 x 轴的平衡位置与 Z 轴一致, 沿总动量矩方向的 z 轴与 Y 轴一致, 陀螺球坐标系即成为自然坐标系的具体体现.

式 (6.4.15) 表明, 要延长陀螺球绕极轴的摆动周期以实现舒勒周期, 必须尽可能加大 ε_0 角和降低弹簧刚度. 图 6.17 所示的空间罗经方案是 $\varepsilon_0 = 90°$ 的双转子

罗经. 弹簧不变形时二陀螺的极轴均沿 y 轴, 但方向相反. ε 偏离 ε_0 时弹簧产生与 $\cos\varepsilon$ 成正比的变形, 且力臂与 $\sin\varepsilon$ 成正比, 因此弹簧对陀螺支架的力矩为

$$M_\varepsilon = K\cos\varepsilon\sin\varepsilon \tag{6.5.9}$$

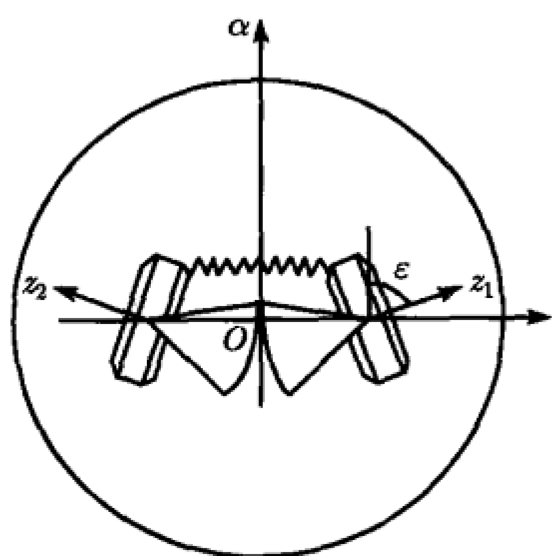


图 6.17　空间罗经

利用表 3.2 的第二行和式 (6.1.7) 计算陀螺球组合体的重力和惯性力对 O 点的矩 $\boldsymbol{M}$, 其在 $(O-xyz)$ 轴系中的投影为

$$M_x=0,\quad M_y=-\frac{\mu V\Omega}{g},\quad M_z=-\mu\left(\gamma-\frac{\dot V}{g}\right) \tag{6.5.10}$$

弹簧极软时 ε 的变化幅度很大而不允许线性化. 将式 (6.5.9), (6.5.10) 代入方程组 (3.5.22) 的力矩项, 其中的 $\Omega_\xi,\Omega_\eta,\Omega_\zeta$ 以表 3.1 表示. 经过与前面类似的简化, 得到自然坐标系中的陀螺罗经动力学方程

$$\dot\alpha-\left(\frac{\mu}{2H_0\cos\varepsilon}\right)\beta=-\Omega+\frac{V\Omega}{g}\left(\frac{\mu}{2H_0\cos\varepsilon}\right) \tag{6.5.11a}$$

$$\dot\beta+\left(\frac{V}{R}\right)\alpha=0 \tag{6.5.11b}$$

$$\dot\gamma-\left(\frac{K}{2H_0}\right)\cos\varepsilon=-\frac{V}{R} \tag{6.5.11c}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2H_0\cos\varepsilon)+\mu\gamma=\frac{\mu\dot V}{g} \tag{6.5.11d}$$

6.5.3　空间罗经的实现条件

先分析空间罗经的平衡位置与自然坐标系重合的可能性. 此问题等价于对于任意变化的 $V(t)$ 和 $\Omega(t)$, 方程组 (6.5.11) 中 α,β,γ 存在零解的可能性. 先令方程 (6.5.11a) 的非齐次项为零, 解出

$$\cos\varepsilon=\frac{\mu V}{2H_0 g} \tag{6.5.12}$$

将上式代入方程 (6.5.11d), 其非齐次项亦被消除. 要使方程 (6.5.11c) 的非齐次项为零, 弹簧刚度 K 必须满足以下条件

$$K=\frac{4H_0^2 g}{\mu R} \tag{6.5.13}$$

在此条件得到满足的前提下, 方程组 (6.5.11) 存在以下特解

$$\alpha=\beta=\gamma=0,\quad \varepsilon(t)=\arccos\left[\frac{\mu}{2H_0 g}V(t)\right] \tag{6.5.14}$$

只要在初始时刻陀螺球坐标系与自然坐标系重合，且陀螺支架在球体内的偏角满足

$$\varepsilon(0) = \arccos\left[\frac{\mu}{2H_0 g}V(0)\right] \tag{6.5.15}$$

则不论载体如何变速运动，$(O-xyz)$ 与 $(O-XYZ)$ 必保持重合.

忽略船速的影响，将式 (6.5.12) 中的 V 改为 $R\Omega_1$，代替罗经进动周期公式 (6.4.6) 中的 $\cos\varepsilon_0$，证明空间罗经的进动周期满足舒勒条件

$$T_{\mathrm{p}} = T_{\mathrm{s}} \tag{6.5.16}$$

将式 (6.5.13) 代入陀螺球摆动周期公式 (6.4.15)，令 $\sin\varepsilon_0 = 1$，证明陀螺球绕极轴的摆动周期亦满足舒勒条件

$$T_{\gamma} = T_{\mathrm{s}} \tag{6.5.17}$$

因此利用空间罗经建立的自然坐标系完全不受载体加速度的干扰.

关于空间罗经的设想早在安修茨罗经发展初期就已提出. 描述弹簧力矩规律的式 (6.5.9) 及 (6.5.13) 为 1935 年盖克勒导出的结果. 伊式林斯基于 20 世纪 50 年代建立了空间罗经的严格理论. 但此理论方案未能转化为实用的空间罗经.



第7章 陀螺的章动理论

陀螺的章动理论考虑进动理论中被忽略的万向支架质量和转子的赤道惯性矩，能更真实地反映陀螺运动的实际过程. 在线性理论范畴内, 陀螺的实际运动可视为进动和章动的叠加. 即极轴的平均位置按进动规律运动, 同时在平均位置附近叠加高频微幅章动. 陀螺摆的受迫规则进动与高频微幅章动叠加后的运动称为拟规则进动. 章动的线性理论基于线性化动力学方程, 其普遍形式由惯性项、阻尼项、陀螺项、摆性力矩项和径向力矩项组成. 凯尔文–泰德–切塔耶夫 (Kelvin-Tait-Chetayev) 定理为判断此类线性系统稳定性的普遍性定理. 陀螺直接稳定器是利用转子的陀螺效应对不稳定对象起稳定作用的装置. 船舶消摆器和单轨车厢为典型的陀螺直接稳定器. 章动的非线性理论考虑线性理论中被忽略了的非线性项. 1955 年马格努斯和古德斯坦 (R. Goodstein) 对陀螺的非线性动力学方程分别用逐次迭代法和小参数法作近似分析, 导出自由陀螺章动漂移的解析公式. 从而对框架陀螺仪在章动过程中的漂移现象作出合理的理论解释. 应用同样方法, 可以分析诸如安装误差、载体振动、弹性变形等各种因素所引起的章动漂移.

7.1 章动的线性理论

7.1.1 自由陀螺的章动

陀螺的**章动理论**考虑进动理论中被忽略的万向支架质量和转子的赤道惯性矩对陀螺运动的影响, 能更真实地反映陀螺的运动过程. 在保留惯性项的线性化动力学方程 (3.2.20) 基础上建立的理论为章动的线性理论. 以章动理论的分析结果为参照, 可以判断进动理论在何种条件下能反映陀螺的实际运动规律.

先讨论静止基座上的自由陀螺, 令方程组 (3.2.20) 中的力矩项 M_x, M_y 为零, 写作

$$A\ddot{\alpha} + H\dot{\beta} = 0 \tag{7.1.1a}$$

$$B\ddot{\beta} - H\dot{\alpha} = 0 \tag{7.1.1b}$$

将 β 置换为新的变量 β_1

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{B}{A}}\,\beta \tag{7.1.2}$$

使方程组 (7.1.1) 化为对称形式

$$\ddot{\alpha} + \nu\dot{\beta}_1 = 0 \tag{7.1.3a}$$

$$\ddot{\beta}_1 - \nu\dot{\alpha} = 0 \tag{7.1.3b}$$

其中参数 ν 定义为

$$\nu = \frac{H_0 \cos\beta_0}{\sqrt{A(\beta_0)B}} \tag{7.1.4}$$

$A(\beta_0)$ 为 β_0 的已知函数, 如式 (3.2.15) 的定义. 令式 (7.1.3b) 乘以 i 与 (7.1.3a) 相加, 合并为复数方程

$$\ddot{z} - \mathrm{i}\nu\dot{z} = 0 \tag{7.1.5}$$

复数坐标 z 定义为

$$z = \alpha + \mathrm{i}\beta_1 \tag{7.1.6}$$

利用式 (4.1.48) 从方程 (7.1.5) 解出 $\dot{z}$, 再积分一次, 设 z_0, $\dot{z}_0$ 为 z 和 $\dot{z}$ 的初值, 得到

$$z = z_0 + \frac{\mathrm{i}\dot{z}_0}{\nu}\left(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu t}\right) \tag{7.1.7}$$

如初始时外环偏角为零, 内环偏角为 β_0, 陀螺受冲击后外环产生初始角速度 $\dot{\alpha}_0$, 但内环起始角速度为零, 此初始条件记为

$$\alpha(0) = 0,\ \ \beta(0) = \beta_0,\ \ \dot{\alpha}(0) = \dot{\alpha}_0,\ \dot{\beta}(0) = 0 \tag{7.1.8}$$

对应于复数坐标的初始条件

$$z(0) = \mathrm{i}\beta_0,\ \ \dot{z}(0) = \dot{\alpha}_0 \tag{7.1.9}$$

将式 (7.1.9) 代入 (7.1.7), 虚实部分离后得到

$$\alpha = \frac{\dot{\alpha}_0}{\nu}\sin\nu t \tag{7.1.10a}$$

$$\beta = \beta_0 + \frac{\dot{\alpha}_0}{\nu}\sqrt{\frac{A}{B}}\left(1 - \cos\nu t\right) \tag{7.1.10b}$$

以上分析表明, 自由陀螺受到冲击后, 极轴在平衡位置附近做频率为 ν 的椭圆锥运动. 这种借助惯性维持的运动称为陀螺的**章动**(见图 7.1). 章动时陀螺力矩与支架的惯性力矩互相平衡, 总动量矩仍保持守恒. 章动频率 ν 与陀螺自转速度 ω_0 成正比, 并随内环偏角 β_0 的增大而减小. 章动振幅与框架的初始角速度 $\dot{\alpha}_0$ 成正比, 与章动频率 ν 或转速 ω_0 成反比. 由于陀螺仪的转速远远超过支架转动角速度, 陀螺的章

动是极轴在平衡位置附近的振幅极微小的高频角振动. 转速愈高则章动频率愈高, 振幅愈小. 极轴与外环轴垂直, 即 $\beta_0 = 0$ 时的章动频率公式为

$$\nu = \frac{H}{\sqrt{AB}} \tag{7.1.11}$$

其中 $H = H_0$, 常数 A, B 的定义见式 (3.2.22). 如不存在万向支架, 则式 (7.1.11) 中的 A, B 以轴对称转子的赤道惯性矩 A_R 代替, 章动频率为

$$\nu = \frac{H}{A_\mathrm{R}} \tag{7.1.12}$$

上式与欧拉情形轴对称刚体的自由规则进动速度, 即式 (2.3.15) 相同. 可见自由陀螺章动现象的本质就是轴对称刚体的欧拉–潘索运动.

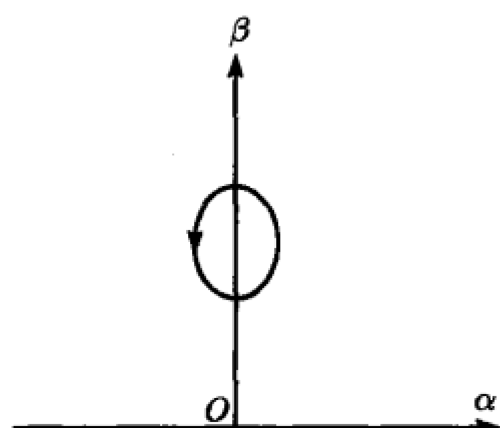


图 7.1　陀螺的章动

上述章动现象体现了高速旋转陀螺仪抵抗外界冲击干扰的能力. 对于冲击引起的任意初始角速度 $\dot{\alpha}_0$, 总能适当选择陀螺的动量矩 H_0 使章动振幅保持为任意小值, 此时进动方程的解可以充分准确地表示自由陀螺的实际运动. 但 $\beta_0 = \pi/2$ 时例外, 此时无论 H_0 的值如何增大都不可能使章动振幅减小. 可见除 $\beta_0 = \pi/2$, 即极轴与外环轴重合的特殊位置以外, 自由陀螺的极轴平衡位置都具有抵抗外界冲击干扰作用的稳定性.

7.1.2　进动理论的依据

陀螺受力矩 M_x, M_y 的作用时, 其线性化动力学方程为

$$A\ddot{\alpha} + H\dot{\beta} = M_x \tag{7.1.13a}$$

$$B\ddot{\beta} - H\dot{\alpha} = M_y \tag{7.1.13b}$$

略去二阶导数后成为式 (3.2.25) 表示的进动方程

$$H\dot{\alpha} = -M_y \tag{7.1.14a}$$

$$H\dot{\beta} = M_x \tag{7.1.14b}$$

令 $x = \dot{\alpha}$, $y = \dot{\beta}$, 方程组 (7.1.13) 可解耦为

$$\ddot{x} + \nu^2 x = -\nu^2 \left(\frac{M_y}{H}\right) + \frac{\dot{M}_x}{A} \tag{7.1.15a}$$

$$\ddot{y} + \nu^2 y = \nu^2 \left(\frac{M_x}{H}\right) + \frac{\dot{M}_y}{B} \tag{7.1.15b}$$

线性方程 (7.1.15) 的解为齐次一般解与非齐次特解的叠加, 前者即自由陀螺的章动, 后者为力矩激励下的受迫振动. 当力矩以 ω 频率变化时, 根据 4.1.2 节中对复摆受迫振动的分析, 方程 (7.1.15) 的受迫振动特解具有以下性质:

1) $\omega \ll \nu$

激励频率远小于章动频率, 受迫振动特解近似为

$$x = -\frac{M_y}{H} + \frac{B\dot{M}_x}{H^2} \tag{7.1.16a}$$

$$y = \frac{M_x}{H} + \frac{A\dot{M}_y}{H^2} \tag{7.1.16b}$$

如忽略上式右边第二项, 则简化为

$$x = -\frac{M_y}{H}, \quad y = \frac{M_x}{H} \tag{7.1.17}$$

此即进动方程 (7.1.14) 的解. 上述简化仅在力矩变化十分平缓且陀螺动量矩足够大的条件下才允许进行. 此时陀螺的运动是方程 (7.1.14) 所确定的进动规律与方程 (7.1.1) 所确定的自由陀螺章动规律的叠加. 当陀螺的动量矩增大得足以将章动振幅抑制得极小时, 进动理论就能足够准确地反映陀螺的实际运动过程.

如式 (7.1.16) 右边第二项不允许忽略, 则陀螺的运动是频率为 ν 的自由振动与频率为 ω 的受迫振动的叠加. 只要交变力矩的幅值足够小, 增大陀螺的动量矩可使此两项振动都减弱到极微小的程度.

2) $\omega = \nu$

激励频率等于章动频率时, 受迫振动无限增大而出现谐振现象. 这种现象不可能用进动理论解释.

3) $\omega \gg \nu$

激励频率远大于章动频率时, 受迫振动接近于零. 因此当力矩中含有任意规律的高频交变分量时, 其进动规律只由力矩的平均值所确定. 进动方程可改写为

$$H\dot{\alpha} = -\langle M_y \rangle \tag{7.1.18a}$$

$$H\dot{\beta} = \langle M_x \rangle \tag{7.1.18b}$$

归纳以上分析, 可得出进动理论的适用条件: **陀螺具有足够大动量矩, 外力矩变化平缓, 其交变分量的幅值足够小且激励频率不得接近章动频率.**

7.1.3　拟规则进动

以陀螺摆为例, 讨论章动运动的性质. 先分析静止基座上带下摆的陀螺摆. 令力矩项 (5.2.2) 中 $V = \Omega = 0$, 代入方程组 (3.2.20), 设 $A = B$, 得到

$$A\ddot{\alpha} + H\dot{\beta} + \mu\alpha = 0 \tag{7.1.19a}$$

$$A\ddot{\beta} - H\dot{\alpha} + \mu\beta = 0 \tag{7.1.19b}$$

使用复变量 $z = \alpha + \mathrm{i}\beta$, 合并为复数方程

$$\ddot{z} - \mathrm{i}\nu\dot{z} + \rho^2 z = 0 \tag{7.1.20}$$

参数 ν, ρ 定义为

$$\nu = \frac{H}{A}, \quad \rho^2 = \frac{\mu}{A} \tag{7.1.21}$$

方程 (7.1.20) 的特征方程为

$$s^2 - \mathrm{i}\nu s + \rho^2 = 0 \tag{7.1.22}$$

特征值为一对纯虚根

$$s_{1,2} = \mathrm{i}\omega_{1,2}, \ \ \omega_{1,2} = \frac{\nu}{2}\left[1 \mp \sqrt{1 + \left(\frac{2\rho}{\nu}\right)^2}\right] \tag{7.1.23}$$

陀螺摆的运动为频率为 ω_1 和 ω_2 的两种周期运动的合成.

对于转速为零的特殊情形, $\nu = 0$, 陀螺摆转变为复摆, 特征根为重根, 对应于复摆的固有频率

$$\omega_{1,2} = \mp\rho = \mp\sqrt{\frac{\mu}{A}} \tag{7.1.24}$$

$|\omega_1|$ 与 ω_2 的差别随陀螺转速的升高而扩大. 转速极高时 $\nu \gg \rho$, 将式 (7.1.23) 中的根式展成 (ρ/ν) 的幂级数, 略去高次项后得到 ω_1 和 ω_2 的近似式

$$\omega_1 = -\frac{\rho^2}{\nu} = -\frac{\mu}{H} \tag{7.1.25a}$$

$$\omega_2 = \nu + \frac{\rho^2}{\nu} = \frac{H}{A} + \frac{\mu}{H} \tag{7.1.25b}$$

与第 5 章中陀螺摆进动理论对照, $|\omega_1|$ 即式 (5.2.4) 表示的陀螺摆进动频率 k. $\omega_1 < 0$ 表示下摆性陀螺摆的进动方向为顺时针. 陀螺动量矩足够大时, 略去式 (7.1.25b) 右边第二项, ω_2 等于式 (7.1.11) 表示的自由陀螺章动频率 ν. 从而证实前面已得到的结论, 即高速旋转陀螺摆的实际运动为进动规律与自由陀螺章动规律的叠加. 利用进动频率与章动频率相差悬殊的特点, 可略去特征方程的二次项直接导出进动频率, 略去特征方程的零次项直接导出章动频率, 使计算过程简化.

与第 2 章中拉格朗日情形刚体定点运动相对比, 将陀螺摆改为上摆性, l 和 μ 必须变号, ω_1 和 ω_2 等于刚体受迫规则进动的慢进动速度 Ω_1 和快进动速度 Ω_2, 与 $\vartheta_0 = 0$ 时的式 (2.4.28) 完全一致.

图 7.2 为根据式 (7.1.23) 画出的 $|\omega_1|$ 和 ω_2 随转速 ω_0 的变化曲线, 虚线为式 (7.1.25) 表示的近似解.

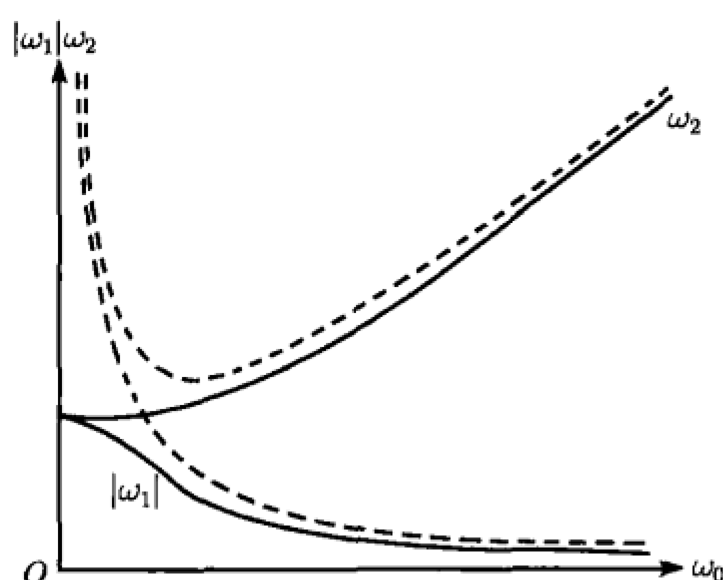


图 7.2　陀螺摆的固有频率

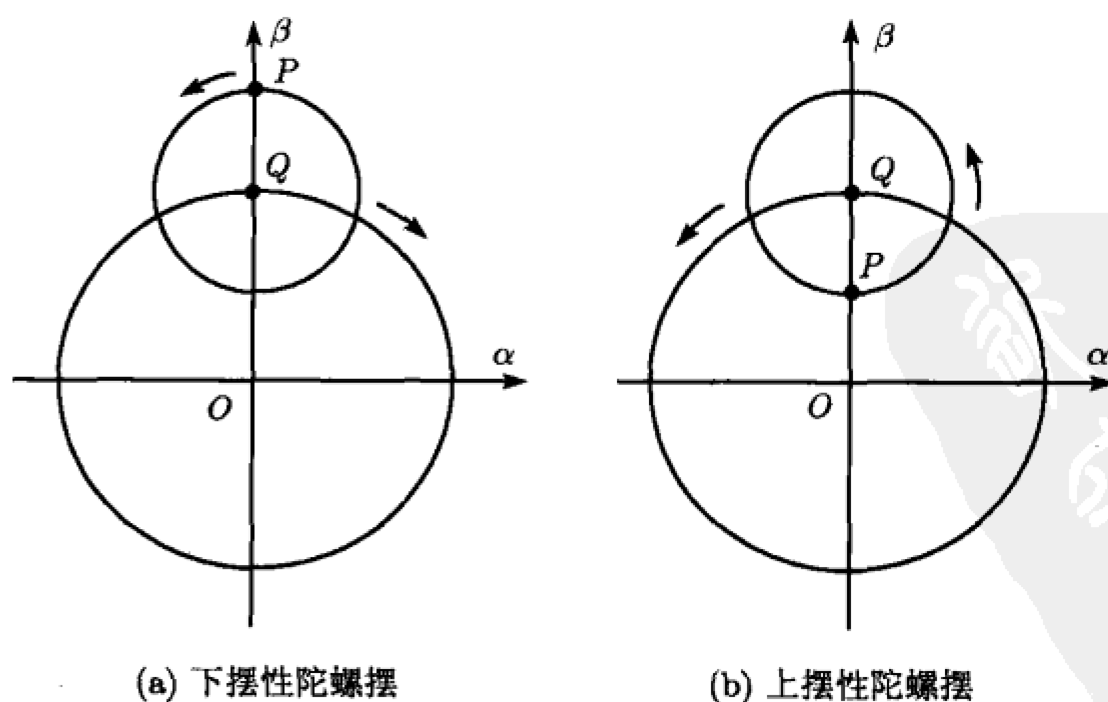
将方程 (7.1.20) 的一般解写作

$$z = z_1 + z_2,\quad z_1 = a_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt},\quad z_2 = a_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu t} \tag{7.1.26}$$

陀螺摆的极点轨迹是 z 的复数平面上两个旋转矢量 z_1 和 z_2 的叠加, 常数 a_1 和 a_2 取决于陀螺摆的初始条件. 对于式 (7.1.8) 表示的初始条件, 导出

$$a_1 = \frac{\mathrm{i}\,(\nu\beta_0 + \dot{\alpha}_0)}{\nu + k},\quad a_2 = \frac{\mathrm{i}\,(k\beta_0 - \dot{\alpha}_0)}{\nu + k} \tag{7.1.27}$$

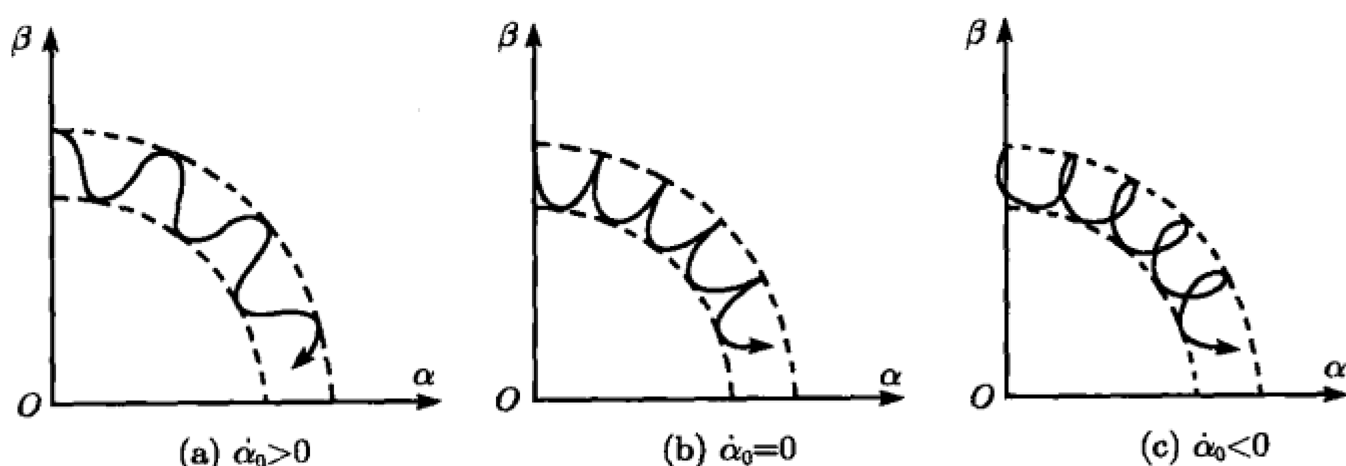
陀螺转速极高时 $\nu \gg k$, $|a_1| \gg |a_2|$, 陀螺极点的运动相当于半径为 $|a_2|$ 的圆周上一点 P 绕圆心 Q 以角速度 ν 逆时针快速旋转, 同时 Q 沿半径为 $|a_1|$ 的圆周绕坐标原点 O 以角速度 k 顺时针缓慢旋转, 即进动与章动两种运动的合成 (见图 7.3(a)). 陀螺的极点轨迹为摆线, 不同的初始条件对应于摆线的不同几何特征, 如图 7.4 所示. 无章动伴随的受迫规则进动仅在 $\dot{\alpha}_0 = k\beta_0$ 的特殊条件下才可能发生. 一般情



(a) 下摆性陀螺摆　(b) 上摆性陀螺摆

图 7.3　进动与章动的合成

况下陀螺摆的运动必存在高频微幅章动, 这种与规则进动相差甚微的运动形态称为**拟规则进动**.



(a) $\dot{\alpha}_0>0$　(b) $\dot{\alpha}_0=0$　(c) $\dot{\alpha}_0<0$

图 7.4　下摆性陀螺摆的极点轨迹

7.1.4　陀螺摆永久转动的稳定性

对于带上摆性的陀螺摆, 必须改变 l 或 μ 的符号. 将 ρ^2 的定义改为 $\rho^2=|\mu|/A$, 动力学方程 (7.1.20) 改为

$$\ddot{z}-\mathrm{i}\nu\dot{z}-\rho^2 z=0 \tag{7.1.28}$$

特解 $z=0$ 对应于转子绕极轴匀速旋转且旋转轴保持垂直的运动状态, 即陀螺摆相对达尔布坐标系的永久转动. 为判断此永久转动的稳定性, 解出方程 (7.1.28) 的特征值

$$s_{1,2}=\mathrm{i}\omega_{1,2},\quad \omega_{1,2}=\frac{\nu}{2}\left[1\mp\sqrt{1-\left(\frac{2\rho}{\nu}\right)^2}\right] \tag{7.1.29}$$

此特征值的纯虚根条件为

$$\left|\frac{2\rho}{\nu}\right|\leqslant 1 \tag{7.1.30}$$

可化作

$$\omega_0\geqslant\omega_{\mathrm{cr}} \tag{7.1.31}$$

ω_{cr} 为转速的临界值, 定义为

$$\omega_{\mathrm{cr}}=\frac{2}{C_{\mathrm{R}}}\sqrt{Amgl} \tag{7.1.32}$$

因此上摆性陀螺摆仅当转速大于临界值 ω_{cr} 时, 其永久转动才可能稳定. 如小于临界值, 则特征值出现正实部, 陀螺摆的永久转动不稳定而倾覆. 条件 (7.1.31) 即 2.4.4 节中导出的拉格朗日情形刚体的受迫规则进动条件, 式 (7.1.32) 表示的临界转速 ω_{cr} 与条件 (2.4.27) 中 $\vartheta_0=0$ 时完全一致. 图 7.5 为稳定性条件 (7.1.31) 当

$C_R = 2A$ 时在 $(\omega_0, \mu/A)$ 参数平面内划分的稳定域. 上半平面表示下摆性陀螺摆, 不论转速如何, 包括转速为零的复摆在内, 其永久转动总是稳定. 下半平面表示的上摆性陀螺摆则必须有足够高的转速才能稳定住. 稳定域的大小取决于陀螺摆的质量几何, 转子愈扁平, 质心位置愈低愈有利于稳定. 转子愈细长, 质心位置愈高, 要求的稳定转速愈高.

稳定性条件满足时, 上摆性陀螺摆运动的一般形式也是拟规则进动, 只是矢量 z 的旋转方向变为逆时针 (见图 7.3(b)). 极点轨迹为图 7.6 所示的摆线, 可看作是第 2 章中图 2.14 表示的拉格朗日情形刚体的球面极点轨迹的近似描绘.

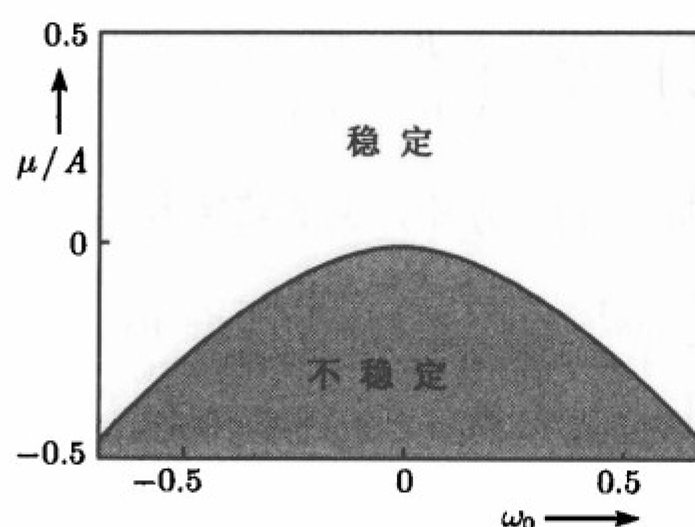


图 7.5　$(\omega_0, \mu/A)$ 参数平面内的稳定域

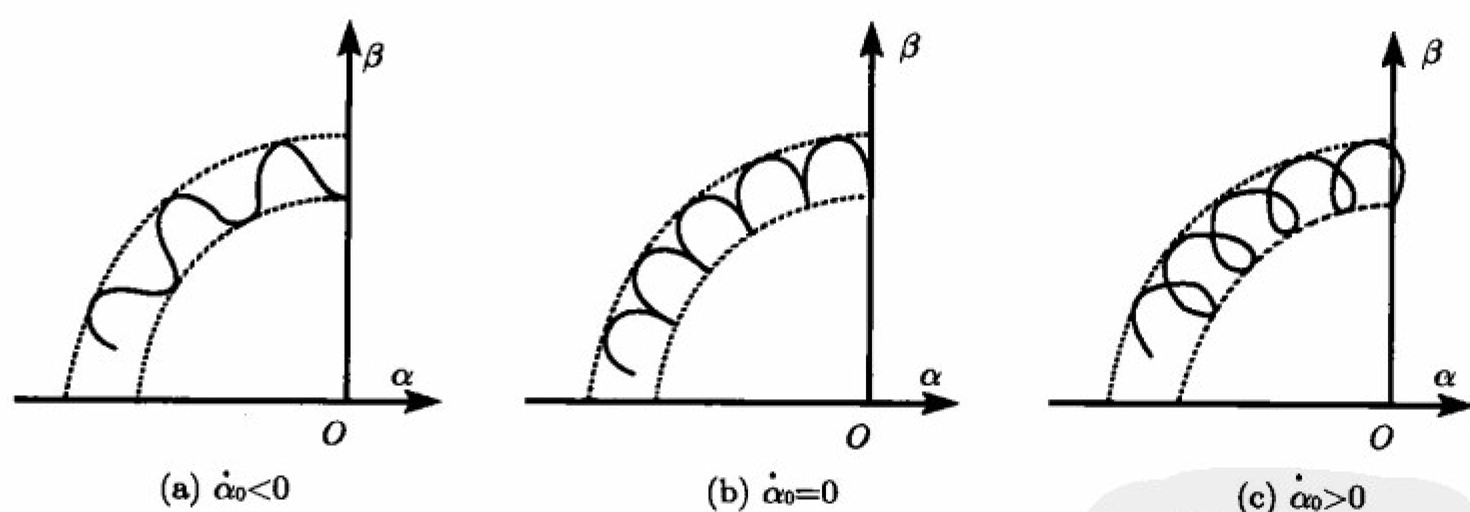


图 7.6　上摆性陀螺摆的极点轨迹

7.2　线性陀螺系统

7.2.1　凯尔文–泰特–切塔耶夫定理

归纳以上对各种类型二自由度陀螺仪的讨论, 将 α, β 用坐标列阵 $\boldsymbol{x}$ 表示, 其

线性化动力学方程可表示为以下普遍形式

$$\boldsymbol{J}\ddot{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{G}\dot{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \tag{7.2.1}$$

方程中各项依次为惯性力矩、阻尼力矩、陀螺力矩、摆性力矩和径向修正力矩, 系数矩阵 $\boldsymbol{J},\boldsymbol{D},\boldsymbol{G},\boldsymbol{K},\boldsymbol{C}$ 分别为**惯性矩阵、阻尼矩阵、陀螺力矩阵、刚度矩阵和径向修正矩阵**

$$\begin{gathered}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}D_1&0\\0&D_2\end{pmatrix}\\ \boldsymbol{G}=\begin{pmatrix}0&G_1\\G_2&0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{K}=\begin{pmatrix}K_1&0\\0&K_2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}C_1&0\\0&C_2\end{pmatrix}\end{gathered} \tag{7.2.2}$$

其中的陀螺力矩项即第 3 章 (3.4.5) 中定义的陀螺力. 方程 (7.2.1) 的特征方程为

$$a_0s^4+a_1s^3+a_2s^2+a_3s+a_4=0 \tag{7.2.3}$$

系数 $a_i\,(i=0,1,\cdots,4)$ 定义为

$$\begin{aligned}&a_0=AB,\ \ a_1=AD_2+BD_1,\ \ a_2=H^2+AK_2+BK_1+D_1D_2\\&a_3=D_1K_2+D_2K_1+H\left(C_1+C_2\right),\ \ a_4=K_1K_2+C_1C_2\end{aligned} \tag{7.2.4}$$

对于最简单的自由刚体, 仅保留方程 (7.2.1) 中的惯性力矩, 则特征值为零, 陀螺极轴的平衡具有随遇性. 陀螺力矩的加入使特征值出现纯虚根, 表明刚体绕极轴的旋转运动能赋予极轴平衡位置以稳定性. 增加阻尼力矩后平衡位置转变为渐近稳定, 自由陀螺的章动衰减为零.

仅保留惯性力矩和摆性力矩时, 系统 (7.2.1) 转变为二自由度复摆, 特征方程简化为

$$a_0s^4+a_2s^2+a_4=0 \tag{7.2.5}$$

其中

$$a_0=AB,\ \ a_2=AK_2+BK_1,\ \ a_4=K_1K_2 \tag{7.2.6}$$

方程 (7.2.1) 的零解稳定性由特征方程的纯虚根条件确定, 即

$$a_0>0 \tag{7.2.7a}$$

$$a_2>0 \tag{7.2.7b}$$

$$a_4>0 \tag{7.2.7c}$$

$$a_2^2-4a_0a_4>0 \tag{7.2.7d}$$

将式 (7.2.6) 代入验算可以证实, 条件 (7.2.7a), (7.2.7d) 恒满足, 条件 (7.2.7b)(7.2.7c) 则要求 K_1, K_2 均为正值. 分别讨论以下三种情况:

情况一: $K_1 > 0, K_2 > 0$: 稳定

情况二: $K_1 < 0, K_2 < 0$: 不稳定

情况三: $K_1 < 0, K_2 > 0$ 或 $K_1 > 0, K_2 < 0$: 不稳定

情况一和情况二分别对应于带下摆或上摆的复摆, 情况三对应于摆动轴不相交而质心介于二摆动轴之间的复摆.

在方程中增加陀螺力矩, 复摆转变为陀螺摆. 特征方程仍具有式 (7.2.5) 的形式, 稳定性条件与式 (7.2.7) 相同, 仅系数 a_2 的定义改为

$$a_2 = H^2 + AK_2 + BK_1 \tag{7.2.8}$$

增加陀螺力矩后情况一仍保持稳定. 对于情况二, 只要适当增大动量矩, 使满足以下条件

$$H > \sqrt{A|K_2| + B|K_1|} \tag{7.2.9}$$

则原来不满足的条件 (7.2.7b) 也能变得满足, 系统转为稳定. 对于情况三, 由于 a_4 的符号不受 H 的影响, 条件 (7.2.7c) 恒不能满足, 无论选择多大的动量矩都不可能依靠陀螺力矩使系统转为稳定.

陀螺的进动理论与章动理论的区别在于是否保留方程 (7.2.1) 的惯性力矩项. 保留此项为章动方程, 略去此项成为进动方程. 陀螺摆进动方程对应的特征方程为

$$a_2 s^2 + a_4 = 0 \tag{7.2.10}$$

其中

$$a_2 = H^2, \quad a_4 = K_1 K_2 \tag{7.2.11}$$

根据进动理论分析, 只要 K_1 与 K_2 同号 (情况一或情况二), 平衡位置必稳定, K_1 与 K_2 异号 (情况三), 则平衡位置不稳定. 从而归纳出以下结论:

摆性力矩单独作用下的稳定系统增加陀螺力矩后, 系统仍保持稳定. 摆性力矩单独作用下的不稳定系统增加陀螺力矩后如能使系统的进动方程稳定, 则在章动理论中只要选择足够大的陀螺动量矩, 也能使系统稳定. 反之, 如增加的陀螺力矩不能使进动方程稳定, 则在章动理论意义下系统亦必不稳定.

方程中如再增加阻尼力矩, 则特征方程具有式 (7.2.3) 的形式, 其中

$$a_3 = D_1 K_2 + D_2 K_1, \quad a_4 = K_1 K_2 \tag{7.2.12}$$

a_0, a_1, a_2 的定义与式 (7.2.4) 相同. 利用劳斯–赫尔维茨判据判断方程 (7.2.1) 零解的渐近稳定性. 对于情况一, 除各系数大于零均能满足以外, $a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) > a_1^2 a_4$

条件亦得到满足. 表明阻尼力矩的加入能使原来的稳定系统变为渐近稳定. 对于情况二, 因 a_1 恒小于零, 阻尼力矩反而使系统变为不稳定. 对于情况三, 由于阻尼力矩不影响 a_0 的符号, 因此不可能对系统的不稳定性产生任何影响. 可归纳出以下结论:

摆性力矩单独作用下的稳定系统同时增加陀螺力矩和阻尼力矩后, 系统变为渐近稳定. 但摆性力矩单独作用下的不稳定系统不可能借同时增加陀螺力矩和阻尼力矩来改变系统的不稳定性.

以上得到的结论属于更具普遍意义的**凯尔文–泰德–切塔耶夫定理**, 叙述如下:

如保守系统的平衡是稳定的, 则增加陀螺力和消散力后, 平衡的稳定性不变; 如增加的是完全消散力, 则稳定平衡变为渐近稳定. 如保守系统的平衡是不稳定的, 则增加陀螺力和完全消散力以后, 平衡的不稳定性不变①.

如在方程中再增加径向力矩, 则特征方程的系数全部按式 (7.2.4) 定义. 只要正确规定径向力矩的作用方向以保证 C_1, C_2 均为正值, 不仅情况一可转为渐近稳定, 而且若以下条件同时满足, 情况二也能转为渐近稳定

$$H\left(C_1+C_2\right)>D_1\left|K_2\right|+D_2\left|K_1\right| \tag{7.2.13}$$

满足以下条件时情况三也转为渐近稳定

$$C_1 C_2>\left|K_1 K_2\right| \tag{7.2.14}$$

可见与阻尼力矩不同, 径向力矩的加入能明显提高系统的稳定度, 且能使原来的不稳定系统变为稳定.

7.2.2 施利克消摆器和单轨车厢

线性陀螺系统的一般理论指出, 在机械系统中增加陀螺力矩, 或同时增加径向力矩, 可提高原来稳定系统的稳定度, 且能使原来的不稳定系统变为稳定. 这种利用陀螺效应直接影响机械系统运动性质的装置称为**陀螺直接稳定器**. 从旋转的弹丸到现代的自旋卫星都是陀螺直接稳定器.

如将支架视为稳定对象, 则万向支架陀螺仪可视为特殊的陀螺直接稳定器. 20 世纪初出现的稳定船舶用的**施利克消摆器**(见图 7.7) 和**单轨车厢**(见图 7.8) 是两种变相的万向支架陀螺摆②. 它们由绕纵轴转动的船舶或车厢, 以及安装在内部的单自由度陀螺组成. 船舶或车厢相当于外环, 陀螺稳定器相当于内环组合体. 船舶与

① 凯尔文–泰德–切塔耶夫定理中力的概念是广义的, 其中的力实际指力矩. 阻尼力矩属于完全消散力. 关于此定理的严格证明和详细讨论, 读者可参阅麦尔金 [4] 或马格努斯的著作 [11].

② 1904 年施利克 (O. Shlick) 发明的船舶消摆器是最早的陀螺直接稳定器. 1909 年布伦南 (L. Brennan) 在英国展示利用极轴水平的双陀螺稳定器的单轨车厢. 由于在技术和经济方面存在的缺陷, 陀螺直接稳定的单轨车厢未能实际用于交通运输.

车厢均可简化为复摆, 区别仅在于前者的质心在浮心的下方, 而后者的质心在支点的上方. 定义 A 和 K_1 为船舶或车厢绕纵轴的惯性矩和摆性系数, B 和 K_2 为单自由度陀螺绕支架转轴的惯性矩和摆性系数, 即可利用方程 (7.2.1) 描述施利克消摆器或单轨车厢的运动.

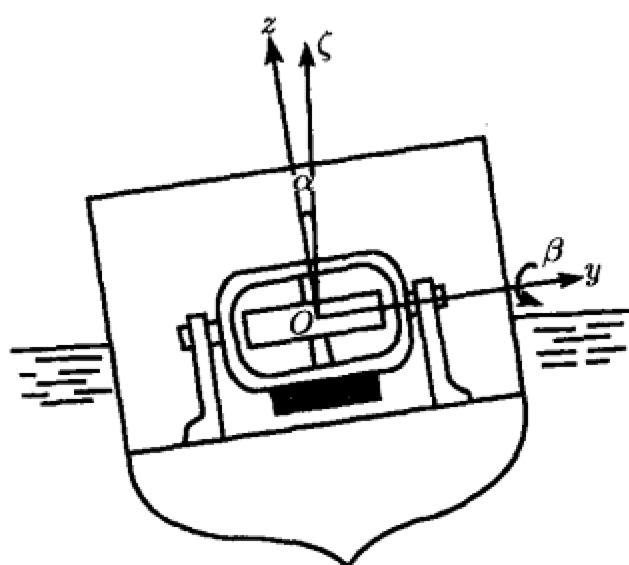


图7.7　施利克消摆器

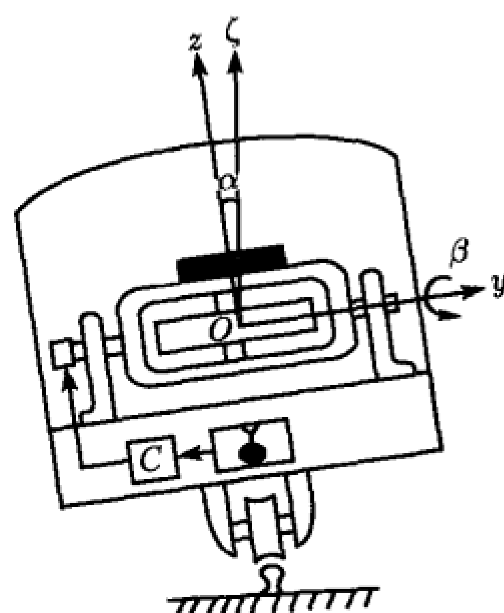


图7.8　单轨车厢

根据前面的分析, 要使稳定器产生效果, K_1, K_2 的符号必须相同. 因此具有下摆性的船舶必须用下摆性陀螺来稳定, 具有上摆性的车厢必须用上摆性陀螺来稳定. 由于陀螺框架轴承内难以避免摩擦的存在, 根据凯尔文–泰特定理, 只有原来稳定的船舶能利用施利克消摆器保持渐近稳定, 而原来不稳定的单轨车厢即使加入陀螺力矩, 其稳定性也必受到阻尼力矩的破坏. 因此必须在单轨车厢的陀螺框架轴上安装力矩器, 利用复摆量测的角度信息产生径向修正力矩 (见图 7.8), 才能使单轨车厢也具有渐近稳定性.

7.2.3　单陀螺稳定器

单陀螺稳定器为一种特殊的二自由度陀螺, 安装在稳定平台上. 平台通过随动系统跟踪被稳定的内框架位置. 与上述陀螺直接稳定器不同, 稳定作用不是直接利用陀螺力矩, 而是借助控制系统的力矩器实现. 单陀螺稳定器的质心与支点重合, 内、外环转轴上均装有测角器和力矩器 (见图 7.9). 稳定器的控制系统保证外环力矩器产生与内环偏角 β 成比例的力矩, 内环力矩器产生与外环偏角 α 成比例的力矩, C_1, C_2 为比例系数. 陀螺的动力学方程与径向修正的陀螺垂直仪类似

$$\boldsymbol{J}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{G}\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{M}' \tag{7.2.15}$$

其中 $\boldsymbol{M}'$ 是由外环轴和内环轴干扰力矩 M'_x, M'_y 组成的列阵.

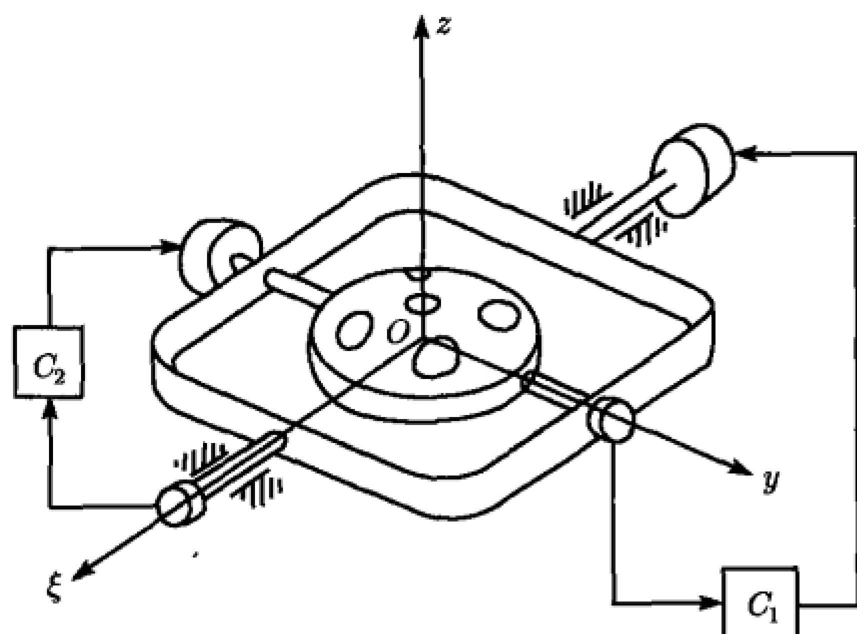


图 7.9　单陀螺稳定器

先假定稳定回路断开, $\boldsymbol{C}=\mathbf{0}$, 干扰力矩为常值. 从方程 (7.2.15) 解出 $\dot{\alpha},\dot{\beta}$ 的常值特解 $\dot{\alpha}_{\mathrm{s}},\dot{\beta}_{\mathrm{s}}$

$$\dot{\alpha}_{\mathrm{s}}=\frac{D_2M_x'-HM_y'}{H^2+D_1D_2},\quad \dot{\beta}_{\mathrm{s}}=\frac{D_1M_y'+HM_x'}{H^2+D_1D_2} \tag{7.2.16}$$

陀螺的内、外环分别以 $\dot{\alpha}_{\mathrm{s}},\dot{\beta}_{\mathrm{s}}$ 为角速度匀速转动. 在干扰力矩作用下陀螺作稳态进动而丧失定轴性.

接通稳定回路后, 在同样的常值干扰力矩作用下, 方程 (7.2.15) 存在 α,β 的常值特解 $\alpha_{\mathrm{s}},\beta_{\mathrm{s}}$

$$\alpha_{\mathrm{s}}=-\frac{M_y'}{C_2},\quad \beta_{\mathrm{s}}=\frac{M_x'}{C_1} \tag{7.2.17}$$

此常值偏角所引起的控制力矩恰好与干扰力矩平衡而产生卸载作用, 陀螺的内、外环以 $\alpha_{\mathrm{s}},\beta_{\mathrm{s}}$ 为偏角保持静止. 尽管存在干扰却不会出现陀螺漂移.

方程 (7.2.15) 对应的特征方程具有与式 (7.2.3) 相同的形式, 系数 a_0,a_1,a_2 为

$$a_2=H^2+D_1D_2,\quad a_3=H\left(C_1+C_2\right),\quad a_4=C_1C_2 \tag{7.2.18}$$

a_0,a_1 的定义与 (7.2.4) 相同. 根据劳斯–赫尔维茨判据, 仅当阻尼力矩存在时方能保证系统的渐近稳定性. 此外, 控制回路的放大系数 C_1,C_2 必须满足以下限制条件

$$C_{1,2}<\frac{2H^3\left(AD_2+BD_1\right)}{4H^2AB+\left(AD_2+BD_1\right)^2} \tag{7.2.19}$$

此结论与进动理论不一致. 因为根据进动理论分析, 只要 C_1,C_2 为正值即认为渐近稳定. 可见直接稳定陀螺必须应用章动理论分析方能得出正确结论.

7.2.4　四陀螺稳定器

上述单陀螺稳定器当平台绕万向支架的外环轴或内环轴转动时，转子会由于定轴性产生相对外环或内环的偏转而出现错误信号. 多陀螺稳定器可避免发生此问题，以 3.5.4 节中叙述的由 4 只陀螺组成的**四陀螺稳定器**为例.

四陀螺稳定器的结构如图 3.10 所示. 由于每对陀螺 G_1, G_2 或 G_3, G_4 的转动方向相反，其总动量矩为零，可以避免出现上述载体转动引起的错误信号. 稳定器的内、外环轴和陀螺框架转轴上均装有测角器和力矩器. 控制系统保证沿外环轴的控制力矩与陀螺 G_1, G_2 的偏角 γ 成比例，沿内环轴的控制力矩与 G_3, G_4 的偏角 δ 成比例. 对陀螺 G_1, G_2 的控制力矩与外环偏角 α 成比例，对 G_3, G_4 的控制力矩与内环偏角 β 成比例. 此外，各转轴上还存在与相对角速度成比例的阻尼力矩和干扰力矩. 各控制力矩表示为

$$M_x = -D_1\dot{\alpha} + C_1\gamma + M_x' \tag{7.2.20a}$$

$$M_y = -D_1\dot{\beta} - C_1\delta + M_y' \tag{7.2.20b}$$

$$M_\gamma = -D_2\dot{\gamma} - C_2\alpha + M_\gamma' \tag{7.2.20c}$$

$$M_\delta = -D_2\dot{\delta} + C_2\beta + M_\delta' \tag{7.2.20d}$$

其中 C_1, C_2 为控制回路的放大系数，D_1, D_2 为阻尼力矩系数，$M_x', M_y', M_\gamma', M_\delta'$ 为干扰力矩.

将式 (7.2.20) 代入四陀螺系统的动力学方程 (3.5.35)，划分为两个独立的方程组

$$A_1\ddot{\alpha} + D_1\dot{\alpha} - H\dot{\gamma} - C_1\gamma = M_x' \tag{7.2.21a}$$

$$B_1\ddot{\gamma} + D_2\dot{\gamma} + H\dot{\alpha} + C_2\alpha = M_\gamma' \tag{7.2.21b}$$

$$A_2\ddot{\beta} + D_1\dot{\beta} + H\dot{\delta} + C_1\delta = M_y' \tag{7.2.22a}$$

$$B_2\ddot{\delta} + D_2\dot{\delta} - H\dot{\beta} - C_2\beta = M_\delta' \tag{7.2.22b}$$

方程组 (7.2.21) 和 (7.2.22) 可用统一形式的矩阵方程 (7.2.15) 表示，但矩阵符号取不同的定义. 适用于方程组 (7.2.21) 的定义为

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 0 & -H \\ H & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0 & -C_1 \\ C_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{M}' = \begin{pmatrix} M_x' \\ M_\gamma' \end{pmatrix}
\end{gathered} \tag{7.2.23}$$

对于方程组 (7.2.22), 矩阵符号的定义改为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\beta\\ \delta\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}A_2 & 0\\ 0 & B_2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}D_1 & 0\\ 0 & D_2\end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{G}=\begin{pmatrix}0 & H\\ -H & 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0 & C_1\\ -C_2 & 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{M}'=\begin{pmatrix}M'_y\\ M'_\delta\end{pmatrix} \tag{7.2.24}$$

两个方程组的特征方程均与 (7.2.3) 相同, 其中 a_0, a_1 定义为

$$a_0 = A_1B_1,\ \ a_1 = A_1D_2 + B_1D_1 \tag{7.2.25}$$

对于方程组 (7.2.22), a_0, a_1 改为

$$a_0 = A_2B_2,\ \ a_1 = A_2D_2 + B_2D_1 \tag{7.2.26}$$

其余系数均与式 (7.2.18) 相同. 重复与单陀螺稳定器相同的分析, 导出控制回路放大系数 C_1, C_2 应满足的限制条件

$$C_{1,2} < \frac{2H^3(A_iD_2 + B_iD_1)}{4H^2A_iB_i + (A_iD_2 + B_iD_1)^2}\quad (i = 1, 2) \tag{7.2.27}$$

7.3 章动的非线性理论

7.3.1 自由陀螺章动的定性理论

以上叙述的线性理论仅适用于陀螺的小偏角运动. 对于陀螺的大幅度运动, 不允许忽略动力学方程中的非线性项. 以理想化的自由陀螺为例, 设基座静止, 轴承无摩擦, 转子做稳态运动. 利用陀螺的非线性动力学方程 (3.2.14), 令其中力矩项为零, 作为自由陀螺的精确方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[A(\beta)\dot{\alpha} + H_0\sin\beta] = 0 \tag{7.3.1a}$$

$$B\ddot{\beta} - \frac{1}{2}A'(\beta)\dot{\alpha}^2 - H_0\dot{\alpha}\cos\beta = 0 \tag{7.3.1b}$$

直接积分式 (7.3.1a), 得到

$$A(\beta)\dot{\alpha} + H_0\sin\beta = H_0\sin\beta^* \tag{7.3.2}$$

此初积分是与循环坐标 α 对应的循环积分, 其物理意义为外环组合体相对外环轴的动量矩守恒. β^* 为积分常数, 设初始条件与式 (7.1.8) 相同, 导出

$$\sin\beta^* = \sin\beta_0 + \frac{A(\beta_0)\dot{\alpha}_0}{H_0} \tag{7.3.3}$$

动量矩 H_0 很大时 β^* 与 β_0 很接近. 不失一般性, 假定 β^* 在 $(0,\pi/2)$ 区间内, 从式 (7.3.2) 导出

$$\dot{\alpha} = \frac{H_0(\sin\beta^* - \sin\beta)}{A(\beta)} \tag{7.3.4}$$

为不致使计算过繁, 假定陀螺的质量几何满足以下条件

$$A_1 + A_\mathrm{R} - C_1 = 0 \tag{7.3.5}$$

此条件满足时 $A(\beta) = A_0 + C_1$ 成为常数, 且 $A'(\beta) = 0$. 将式 (7.3.5) 代入方程 (7.3.1b), 令 $y = \dot{\beta}$, 导出内环组合体相对外环转动的相轨迹方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\beta} = \frac{\nu^2\cos\beta(\sin\beta^* - \sin\beta)}{y} \tag{7.3.6}$$

参数 ν 即式 (7.1.11) 定义的线性理论的章动频率

$$\nu = \frac{H_0}{\sqrt{AB}} \tag{7.3.7}$$

方程 (7.3.6) 可分离变量积分, 得到 (β, y) 相平面内以 $\dot{\alpha}_0$ 为参变量的相轨迹曲线族 (见图 7.10)

$$y^2 + \nu^2(\sin\beta^* - \sin\beta)^2 = \left(\frac{A}{B}\right)\dot{\alpha}_0^2 \tag{7.3.8}$$

此方程的物理意义为机械能守恒, 也可从能量积分直接导出.

在 β 的 $(-\pi/2,\pi/2)$ 区间内, 方程 (7.3.6) 存在以下奇点

$$\begin{aligned} S_1:&\quad \beta_\mathrm{s} = \beta^*,\ \ y_\mathrm{s} = 0 \\ S_2:&\quad \beta_\mathrm{s} = \pi/2,\ \ y_\mathrm{s} = 0 \\ S_3:&\quad \beta_\mathrm{s} = -\pi/2,\ \ y_\mathrm{s} = 0 \end{aligned} \tag{7.3.9}$$

其中仅 S_1 能使 $\dot{\beta}$ 和 $\dot{\alpha}$ 同时为零, 对应于陀螺极轴的平衡位置. 其余两个奇点 S_2,S_3 仅能使 $\dot{\beta}$ 为零, 但 $\dot{\alpha}$ 不为零, 对应于极轴与外环轴重合的特殊状态.

为判断各奇点的类型, 令 $x = \beta - \beta_\mathrm{s}$, 导出方程 (7.3.6) 在奇点附近的一次近似式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{ax}{y} \tag{7.3.10}$$

常数 a 定义为

$$a = \nu^2\left[(\sin\beta^* - \sin\beta_\mathrm{s})\sin\beta_\mathrm{s} + \cos^2\beta_\mathrm{s}\right] \tag{7.3.11}$$

a 在不同奇点处取不同的值

$$S_1:\quad a = \nu^2\cos^2\beta^*$$

$$S_2: \quad a = -\nu^2(1 - \sin\beta^*) \tag{7.3.12}$$
$$S_3: \quad a = -\nu^2(1 + \sin\beta^*)$$

在 S_1 处 $a > 0$, 奇点为中心. 在 S_2,S_3 处 $a < 0$, 奇点为鞍点. 如外环的初始角速度 $\dot{\alpha}_0$ 为零, 则相轨迹缩为奇点 S_1, 极轴维持 $\beta = \beta_0 = \beta^*$ 的初始位置不变而保持陀螺的定轴性. 如冲击引起的初始角速度 $\dot{\alpha}_0$ 足够微小, 则相轨迹为包围 S_1 的封闭曲线, 体现为线性理论中的章动现象. 表现出极轴平衡位置在小冲击作用下的稳定性. 随着冲击作用的增强, 封闭相轨迹的幅度随之增大而趋近于过奇点 S_2 的分隔线. 如 $\dot{\alpha}_0$ 继续增大, 则陀螺的运动形态可发生突变, 极轴将越过外环轴位置, 并以外环轴为中心位置做对称的大幅度摆动. 因此在大冲击作用下极轴平衡位置的稳定性完全丧失. $\dot{\alpha}_0$ 再继续增大时相轨迹趋近于过奇点 S_3 的分隔线, 然后运动形态又一次发生突变, 内环组合体将绕内环轴作单方向回转运动 (见图 7.10).

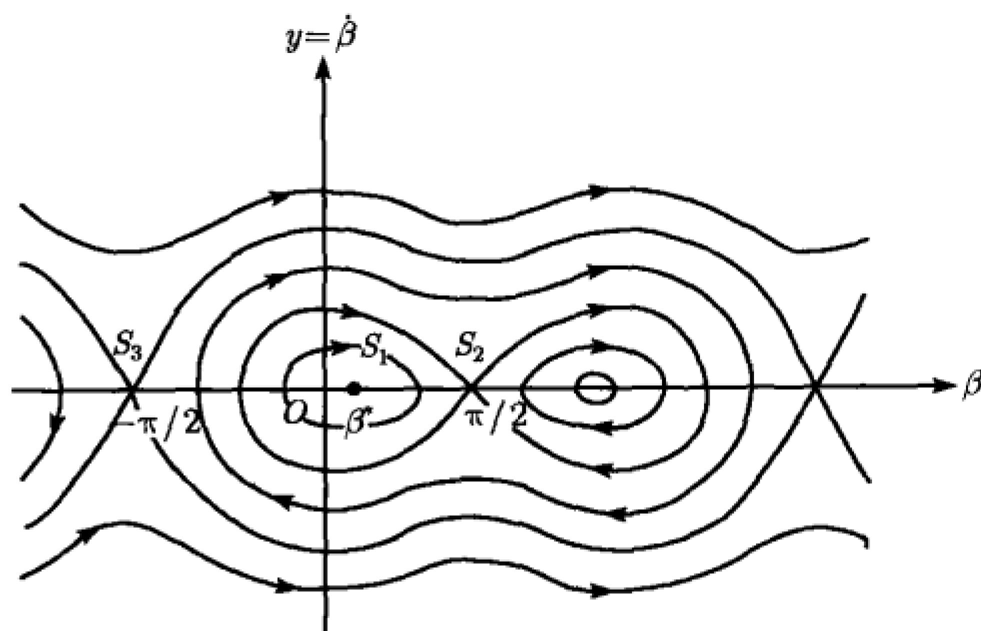


图 7.10　(β, y) 平面内的相轨迹族

当相点沿围绕 S_1 的封闭轨迹运动时, 它与 β 轴的两个交点 β_1 和 β_2 可从方程 (7.3.8) 解出. 令其中 $y = 0$, 得到

$$\sin\beta_{1,2} = \sin\beta^* \mp \frac{A\dot{\alpha}_0}{H_0} \tag{7.3.13}$$

β^* 在 $(0, \pi/2)$ 区间内时, 不难从正弦曲线的几何性质判断出

$$|\beta_2 - \beta^*| > |\beta^* - \beta_1| \tag{7.3.14}$$

图 7.11 是根据式 (7.3.4) 画出的 $(\beta, \dot{\alpha})$ 函数曲线. 在陀螺章动过程中, 当 β 在 $[\beta_1, \beta_2]$ 区间内周期变化时, 根据不等式 (7.3.14) 可以预计 $\dot{\alpha}$ 的平均值不会等于零. 从而判断陀螺章动时外环平衡位置的不确定性, 章动漂移现象即由此而产生.

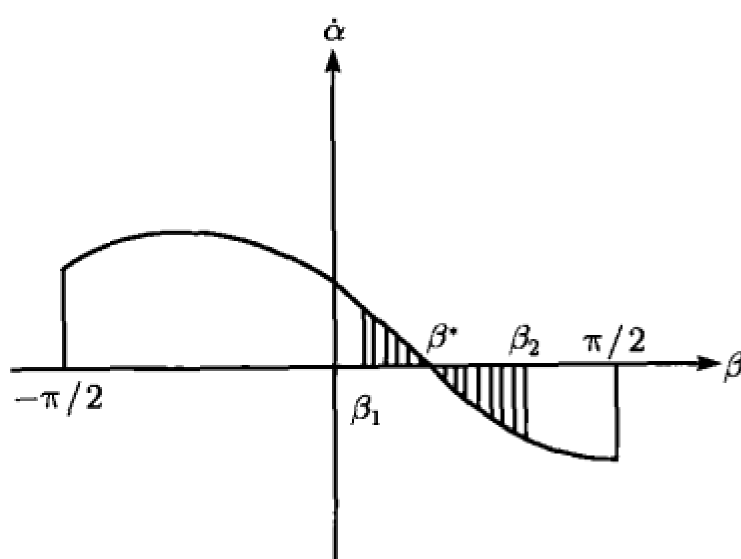


图 7.11　$(\beta, \dot{\alpha})$ 函数曲线

直接积分方程 (7.3.8), 得到以超椭圆积分表示的 β 的解

$$t = \int_{\beta_0}^{\beta} \frac{\mathrm{d}\beta}{\sqrt{(A/B)\,\dot{\alpha}_0^2 - \nu^2\,(\sin\beta^* - \sin\beta)^2}} \tag{7.3.15}$$

将上式代入式 (7.3.4), 再积分一次即得到 α 的解析形式解.

7.3.2　马格努斯公式

万向支架支承的自由陀螺在章动过程中, 极轴的平均位置在惯性空间中缓慢漂移的现象可在实验中观测到, 但无法用线性理论作出解释. 1955 年马格努斯和随后的古德斯坦用近似解析方法处理非线性的陀螺动力学方程 (7.3.1), 导出自由陀螺的章动漂移公式, 称为**马格努斯公式**. 在推导马格努斯公式的各种方法中, 本节采用的分析方法较简明且具有清晰的物理意义.

将线性理论作为零次近似, 极轴按式 (7.1.10) 确定的规律做章动运动. 极轴的运动带动万向支架的运动, 作用在万向支架上的约束力矩必须保证内环和外环能实现这种确定规律的运动. 根据内环轴承的约束特点, 外环作用于内环的约束力矩 $\boldsymbol{L}_1$ 必须垂直于 y_0 轴 (见图 7.12). 设 $\boldsymbol{L}_1$ 相对外环坐标系 $(O - x_1y_1z_1)$ 的投影式为

$$\boldsymbol{L}_1 = L_{1x_0}\boldsymbol{i}_0 + L_{1z_0}\boldsymbol{k}_0 \tag{7.3.16}$$

$\boldsymbol{L}_1$ 的反作用力矩 $-\boldsymbol{L}_1$ 作用于外环, 其垂直于外环轴 x_0 的分量 $-L_{1z_0}\boldsymbol{k}_0$ 与载体对外环的约束力矩 $\boldsymbol{L}_1$ 相平衡, 沿 x_0 轴的分量 $-L_{1x_0}\boldsymbol{i}_0$ 则影响外环的运动. 设载体静止, 且外部作用于外环和内环的主动力矩 $\boldsymbol{M}_0$ 和 $\boldsymbol{M}_1$ 均为零, 列出外环绕 x_0 轴的转动方程

$$A_0\ddot{\alpha} = -L_{1x_0} \tag{7.3.17}$$

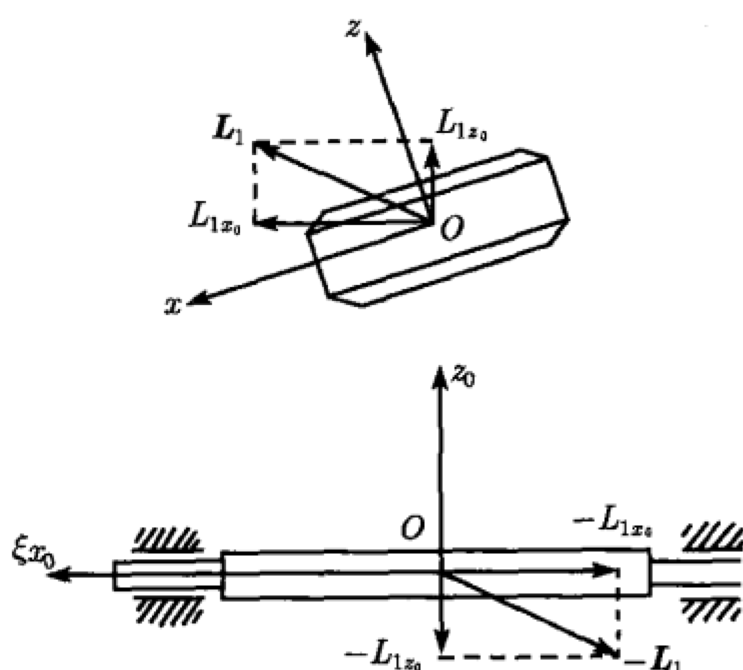


图 7.12　外环与内环之间的约束力矩

内环受到外环约束力矩 $\boldsymbol{L}_1$ 和转子约束力矩 $-\boldsymbol{L}_2$ 的共同作用. 转子轴承的约束特点要求 $-\boldsymbol{L}_2$ 与极轴垂直, 因此内环的欧拉方程相对 z 轴的投影式必不受转子约束力矩的影响

$$C_1\dot{\omega}_z + (B_1 - A_1)\,\omega_x\omega_y = L_{1x_0}\sin\beta + L_{1z_0}\cos\beta \tag{7.3.18}$$

将式 (3.2.5), (7.3.18) 代入 (7.3.19), 得到

$$L_{1x_0} = (A_0 + C_1)\,\ddot{\alpha}\tan\beta + (B_1 + C_1 - A_1)\,\dot{\alpha}\dot{\beta} \tag{7.3.19}$$

在式 (7.3.16) 所示 $\boldsymbol{L}_1$ 的两个分量中, 沿 x_0 轴的分量方向不变, 模按式 (7.3.17) 周期性变化, 沿 z_0 轴的分量则不仅模按式 (7.3.19) 周期性变化, 而且随章动运动而不断改变在惯性空间中的方向. 将 $\boldsymbol{L}_1$ 投影到惯性坐标系 $(O-\xi\eta\zeta)$, 保留 $\alpha_0, \beta-\beta_0$ 及其导数的二阶微量, 得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}_1 = &- A_0\ddot{\alpha}\boldsymbol{\xi}^0 - (A_0 + C_1)\,\alpha\ddot{\alpha}\tan\beta_0\boldsymbol{\eta}^0 + \left\{(A_0 + C_1)\left[\tan\beta_0 + (\beta-\beta_0)\sec^2\beta_0\right]\ddot{\alpha}\right.\\ &\left.+ (B_1 + C_1 - A_1)\,\dot{\alpha}\dot{\beta}\right\}\boldsymbol{\zeta}^0\end{aligned} \tag{7.3.20}$$

将零次近似的章动规律 (7.1.10) 代入上式, 得到力矩 $\boldsymbol{L}_1$ 的一次近似式. 其中包含频率为 ν 和 2ν 的周期分量和常值分量. 只讨论 $\boldsymbol{L}_1$ 对陀螺进动规律的影响时, 由于高频交变的力矩分量对陀螺的进动不产生影响, 可将 $\boldsymbol{L}_1$ 各项以每个章动周期 $T_n = 2\pi/\nu$ 内的平均值代替. 平均化后得到的力矩常值项沿 η 轴方向

$$\langle\boldsymbol{L}_1\rangle = \frac{1}{T_n}\int_0^{T_n}\boldsymbol{L}_1\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,(A_0 + C_1)\,\dot{\alpha}_0^2\tan\beta_0\boldsymbol{\eta}^0 \tag{7.3.21}$$

此平均力矩经过轴承传递至转子, 引起陀螺漂移, 由于是章动引起而称为**章动漂移**. 将上式代入进动方程 (3.2.25a) 右边的力矩项, 导出的漂移率公式即马格努斯公式

$$\dot{\alpha}=-\frac{\dot{\alpha}_0^2\,(A_0+C_1)\tan\beta_0}{2H_0\cos\beta_0}\tag{7.3.22}$$

以上分析解释了万向支架支承的自由陀螺在章动过程中, 出现极轴平均位置绕外环轴缓慢进动的现象 (见图 7.13). 为说明产生此现象的物理原因, 观察章动中的陀螺极点轨迹上 β 相同但 α 为最大和最小值的两个点 P_1 和 P_2 (见图 7.14), 在这两个点处 $\dot{\alpha}$ 均等于零但 $\ddot{\alpha}$ 异号, 因此 L_{1z_0} 异号. 当极轴位置从 P_1 转移到 P_2 时, 外环轴承上作用的约束力矩由于方向改变而不能抵消, 章动漂移即此合力矩的作用结果. 由此可见, 万向支架支承的自由陀螺并非完全自由.

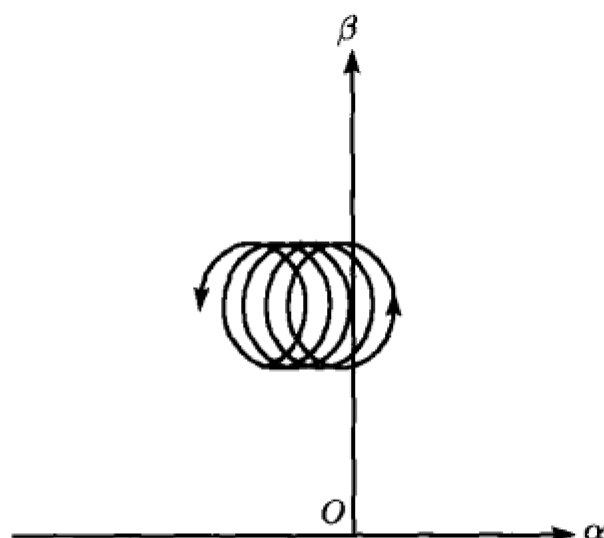


图 7.13　章动漂移

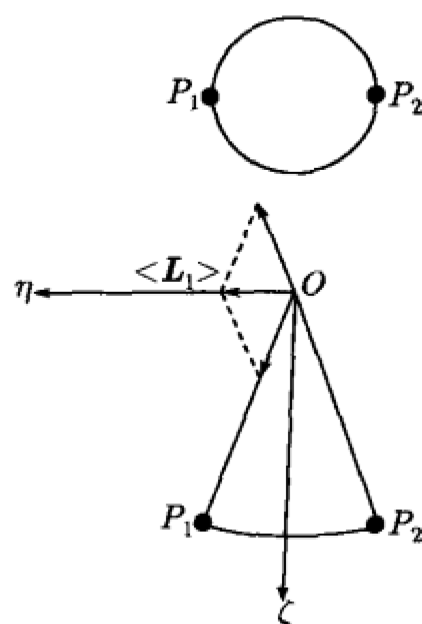


图 7.14　章动漂移的物理解释

由于轴承约束力矩是为克服万向支架的惯性而产生, 因此章动漂移率与内、外环的惯性矩 A_1 和 C_2 有关, 且随内环偏角 β_0 而增大. 如极轴与外环轴正交, $\beta_0=0$, 则外环轴承约束力矩的平均效应为零而不可能引起漂移.

如将力矩 $\boldsymbol{L}_2$ 的一次近似式代入陀螺章动方程 (3.2.20) 的力矩项, 则 $\boldsymbol{L}_2$ 中存在的章动频率周期分量可引起振幅随时间增长的谐振现象, 从而出现非线性方程近似解法所带来的久期项问题. 仅讨论 $\boldsymbol{L}_2$ 对陀螺进动的影响时, 此问题暂不予考虑. 在第 9 章关于挠性陀螺章动问题的讨论中, 将利用双重时间尺度解决久期项问题.

7.3.3　安装误差引起的陀螺漂移

章动漂移现象伴随陀螺的章动存在. 当实际陀螺仪的章动由于轴承摩擦而衰减时, 章动漂移现象必随之消失. 如章动衰减后陀螺仍存在漂移, 必由其它物理原因引起. 安装误差造成的转子旋转轴与惯性主轴不重合是产生持续漂移的原因

之一.

定义 z_{R} 轴为转子的极惯性主轴, z'_{R} 轴为转子的旋转轴, ε 为 z_{R} 与 z'_{R} 二轴之间的误差角. 坐标系 $(O-x_{\mathrm{R}}y_{\mathrm{R}}z_{\mathrm{R}})$ 和 $(O-x'_{\mathrm{R}}y'_{\mathrm{R}}z'_{\mathrm{R}})$ 均与转子固定, 前者为主轴坐标系. x_{R} 和 x'_{R} 轴均被包含在 $(z_{\mathrm{R}},z'_{\mathrm{R}})$ 平面内 (见图 7.15). 各坐标系之间的关系为

$$
\begin{array}{ccccc}
 & \alpha & & \beta & \\
(O-\xi\eta\zeta) & \rightarrow & (O-x_0y_0z_0) & \rightarrow & (O-xyz) \\
 & \xi, x_0 & & y_0, y & \\
 & \varphi & & \varepsilon & \\
 & \rightarrow & (O-x'_{\mathrm{R}}y'_{\mathrm{R}}z'_{\mathrm{R}}) & \rightarrow & (O-x_{\mathrm{R}}y_{\mathrm{R}}z_{\mathrm{R}}) \\
 & z, z'_{\mathrm{R}} & & y'_{\mathrm{R}}, y_{\mathrm{R}} &
\end{array}
$$

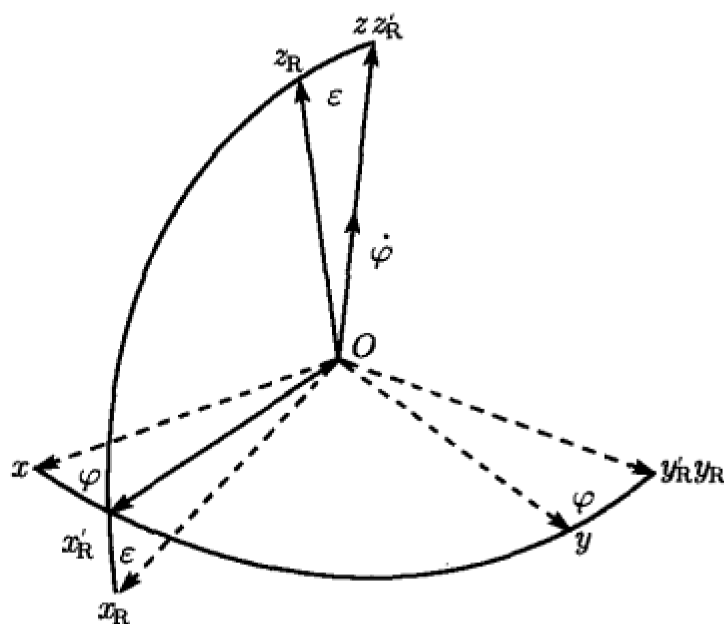


图 7.15　旋转轴对惯性主轴的偏离

设载体静止, 转子稳态旋转, 存在初积分 (3.2.12). 只保留误差角 ε 的一次项, 计算式(3.2.4c)表示的转子角速度 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{R}}$ 相对主轴坐标系 $(O-x_{\mathrm{R}}y_{\mathrm{R}}z_{\mathrm{R}})$ 的投影, 得到

$$
\begin{aligned}
&\omega_{\mathrm{R}x} = \dot{\alpha}\cos\beta\cos\varphi + \dot{\beta}\sin\varphi - \varepsilon\omega_0 \\
&\omega_{\mathrm{R}y} = -\dot{\alpha}\cos\beta\sin\varphi + \dot{\beta}\cos\varphi, \quad \omega_{\mathrm{R}z} = \dot{\varphi} = \omega_0
\end{aligned} \tag{7.3.23}
$$

转子对 O 点的动量矩 H_{R} 为

$$
H_{\mathrm{R}} = A_{\mathrm{R}}\left(\omega_{\mathrm{R}z}\boldsymbol{i}_{\mathrm{R}} + \omega_{\mathrm{R}z}\boldsymbol{j}_{\mathrm{R}}\right) + C_{\mathrm{R}}\omega_{\mathrm{R}z}\boldsymbol{k}_{\mathrm{R}} \tag{7.3.24}
$$

变换到 $(O-xyz)$ 坐标系, 得到

$$
\begin{aligned}
\mathrm{H}_{\mathrm{R}} = &\left[A_{\mathrm{R}}\dot{\alpha}\cos\beta + \varepsilon\left(C_{\mathrm{R}} - A_{\mathrm{R}}\right)\omega_0\cos\varphi\right]\boldsymbol{i} \\
&+ \left[A_{\mathrm{R}}\dot{\beta} + \varepsilon\left(C_{\mathrm{R}} - A_{\mathrm{R}}\right)\omega_0\sin\varphi\right]\boldsymbol{j} + H_0\boldsymbol{k}
\end{aligned} \tag{7.3.25}
$$

其中 $H_0 = C_R\omega_0$. 将上式代替 (3.2.6c), 建立陀螺极轴在 $\alpha = 0$, $\beta = \beta_0$ 附近的线性化动力学方程. 设 φ 的初值为零, 令 $\varphi = \omega_0 t$, 得到

$$A\ddot{\alpha} + H\dot{\beta} = \varepsilon(C_R - A_R)\omega_0^2\cos\beta_0\sin\omega_0 t \tag{7.3.26a}$$

$$B\ddot{\beta} - H\dot{\alpha} = -\varepsilon(C_R - A_R)\omega_0^2\cos\omega_0 t \tag{7.3.26b}$$

此方程组的齐次一般解表示的自由振动, 即频率为 ν 的章动可因实际存在的阻尼而衰减. 仅须考虑其受迫振动特解

$$\alpha = \frac{\varepsilon\cos\beta_0(C_R - A_R)(C_R + B)}{C_R^2\cos^2\beta_0 - AB}\sin\omega_0 t \tag{7.3.27a}$$

$$\beta = \beta_0 - \frac{\varepsilon(C_R - A_R)\left(C_R\cos^2\beta_0 + A\right)}{C_R^2\cos^2\beta_0 - AB}\cos\omega_0 t \tag{7.3.27b}$$

仍使用逐次近似方法, 以线性方程的解 (7.3.27) 作为零次近似, 代入式 (7.3.20) 计算轴承约束力矩 $\boldsymbol{L}_1$ 的一次近似式, 且在转子自转周期 $T_0 = 2\pi/\omega_0$ 内平均化. 计算时保留二阶微量, 得到

$$\begin{aligned}\langle\boldsymbol{L}_1\rangle &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\boldsymbol{L}_1\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}(A_0 + C_1)\omega_0^2\tan\beta_0\left[\frac{\varepsilon\cos\beta_0(C_R - A_R)(C_R + B)}{C_R^2\cos^2\beta_0 - AB}\right]^2\boldsymbol{\eta}^0\end{aligned} \tag{7.3.28}$$

将上式代入进动方程 (3.2.25a) 的力矩项, 导出陀螺的漂移率公式

$$\dot{\alpha} = -\frac{(A_0 + C_1)\omega_0^2\tan\beta_0}{2H_0\cos\beta_0}\left[\frac{\varepsilon\cos\beta_0(C_R - A_R)(C_R + B)}{C_R^2\cos^2\beta_0 - AB}\right]^2 \tag{7.3.29}$$

漂移率随误差角 ε 和转速 ω_0 增大而上升, 转子为球对称时, $C_R = A_R$, 或极轴垂直于外环轴时, $\beta_0 = 0$, 均不产生漂移. 自转频率 ω_0 愈接近于章动频率 ν, 即 $C_R\cos\beta_0$ 愈接近于 $\sqrt{AB}$ 时, 陀螺愈接近谐振状态, 漂移现象愈严重.

7.3.4 载体转动引起的陀螺漂移

载体绕陀螺支点 O 做角运动时, 即使轴承为无摩擦的理想约束, 仍可能使万向支架支承的自由陀螺产生漂移. 与章动漂移类似, 这种现象也来源于为克服万向支架惯性而产生的外环轴承约束力矩.

设载体坐标系 $(O-\xi\eta\zeta)$ 相对惯性空间的角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ 的投影式为

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega_\xi\boldsymbol{\xi}^0 + \Omega_\eta\boldsymbol{\eta}^0 + \Omega_\zeta\boldsymbol{\zeta}^0 \tag{7.3.30}$$

考虑此牵连运动, 外环角速度 $\boldsymbol{\omega}_0$ 相对 $(O-x_0y_0z_0)$ 轴系的投影为

$$\omega_{0x} = \dot{\alpha} + \Omega_\xi$$

$$\omega_{0y} = \Omega_\eta \cos\alpha + \Omega_\zeta \sin\alpha \qquad (7.3.31)$$
$$\omega_{0z} = -\Omega_\eta \sin\alpha + \Omega_\zeta \cos\alpha$$

内环角速度 ω 相对 $(O-xyz)$ 轴系的投影为

$$\begin{aligned} \omega_x &= \omega_{0x}\cos\beta - \omega_{0z}\sin\beta \\ \omega_y &= \omega_{0y} + \dot{\beta} \\ \omega_z &= \omega_{0x}\sin\beta + \omega_{0z}\cos\beta \end{aligned} \qquad (7.3.32)$$

陀螺的章动衰减后, 极轴接近于保持在惯性空间中的指向不变. 使用逐次近似方法, 以陀螺的定轴性作为零次近似. 先令上式中 $\omega_x = \omega_y = 0$, 从式 (7.3.31), (7.3.32) 导出

$$\dot{\alpha} = -\Omega_\xi - (\Omega_\eta \sin\alpha - \Omega_\zeta \cos\alpha)\tan\beta \qquad (7.3.33a)$$
$$\dot{\beta} = -\Omega_\eta \cos\alpha - \Omega_\zeta \sin\alpha \qquad (7.3.33b)$$

在外环约束力矩 $\boldsymbol{L}_1$ 的作用下, 内环相对 z 轴的欧拉方程与式 (7.3.18) 完全相同. 外环相对 x_0 轴的欧拉方程中必须考虑载体的牵连转动, 式 (7.3.17) 应改为

$$A_0\dot{\omega}_{0x} + (C_0 - B_0)\,\omega_{0y}\omega_{0z} = -L_{1x_0} \qquad (7.3.34)$$

约束力矩 $\boldsymbol{L}_1$ 与极轴垂直的分量是引起陀螺漂移的物理原因. 利用式 (7.3.34) 和 (7.3.18) 将 $\boldsymbol{L}_1$ 在 x_0, y_0 轴上的投影变换到 x, y 轴, 得到

$$\begin{aligned} L_{1x} &= -[A_0\dot{\omega}_{0x} + (C_0 - B_0)\,\omega_{0y}\omega_{0z}]\sec\beta - [C_1\dot{\omega}_z + (B_1 - A_1)\,\omega_x\omega_y]\tan\beta \\ L_{1y} &= 0 \end{aligned} \qquad (7.3.35)$$

对于确定规律的 $\Omega_\xi(t), \Omega_\eta(t), \Omega_\zeta(t)$, 积分一阶非线性方程组 (7.3.33), 得到 $\alpha(t)$, $\beta(t)$ 的零次近似解, 代入式 (7.3.31), (7.3.32) 计算内外环角速度, 再代入式 (7.3.35) 导出轴承约束力矩 $\boldsymbol{L}_1$ 和相应的陀螺漂移率. 先讨论几种特殊情况:

1) 载体绕外环轴转动

$$\Omega_\xi = \Omega, \quad \Omega_\eta = \Omega_\zeta = 0 \qquad (7.3.36)$$

将上式代入 (7.3.33), (7.3.31), (7.3.32), (7.3.35) 等式, 得到

$$\begin{aligned} &\dot{\alpha} = -\Omega, \quad \dot{\beta} = 0 \\ &\omega_{0x} = \omega_{0y} = \omega_{0z} = 0 \\ &\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0, \quad L_{1x} = 0 \end{aligned} \qquad (7.3.37)$$

载体绕外环轴的转动对陀螺全无影响, 不引起陀螺漂移.

2) 载体绕内环轴转动

$$\Omega_\xi = 0,\ \ \Omega_\eta = \Omega\cos\alpha,\ \ \Omega_\zeta = \Omega\sin\alpha \tag{7.3.38}$$

重复以上计算, 得到

$$\begin{aligned}&\dot{\alpha} = 0,\ \ \dot{\beta} = -\Omega\\ &\omega_{0x} = \omega_{0z} = 0,\ \ \omega_{0y} = \Omega\\ &\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0,\ \ L_{1x} = 0\end{aligned} \tag{7.3.39}$$

外环随载体一同绕内环轴转动, 但对内环组合体无影响, 也不引起陀螺漂移.

3) 载体绕转子极轴转动

$$\Omega_\xi = \Omega\sin\beta,\ \ \Omega_\eta = -\Omega\sin\alpha\cos\beta,\ \ \Omega_\zeta = \Omega\cos\alpha\cos\beta \tag{7.3.40}$$

计算结果为

$$\begin{aligned}&\dot{\alpha} = 0,\ \ \dot{\beta} = 0\\ &\omega_{0x} = \Omega\sin\beta,\ \ \omega_{0y} = 0,\ \ \omega_{0z} = \Omega\cos\beta\\ &\omega_x = \omega_y = 0,\ \ \omega_z = \Omega\\ &L_{1x} = -(A_0 + C_1)\,\dot{\Omega}\tan\beta\end{aligned} \tag{7.3.41}$$

载体带动外环和内环一同绕转子极轴转动, 与载体角加速度有关的轴承约束力矩可引起陀螺漂移. 将 L_{1x} 作为方程 (3.2.25b) 的力矩项, 导出漂移率

$$\dot{\beta} = -\frac{(A_0 + C_1)\,\dot{\Omega}\tan\beta}{H_0} \tag{7.3.42}$$

载体匀速转动时漂移率为零, 载体做角振动时漂移率的平均值为零.

再讨论载体绕确定轴 l 做微幅角振动的一般情形. 考虑到载体绕外环轴的转动完全不影响陀螺的运动, 不失一般性, 假定 l 轴在垂直于外环轴的 (η,ζ) 平面内与 ζ 轴的夹角为 γ, 角振动的振幅和角频率为 Φ 和 σ, 令

$$\Omega_\xi = 0,\ \ \Omega_\eta = \Phi\sigma\sin\gamma\cos\sigma t,\ \ \Omega_\zeta = \Phi\sigma\cos\gamma\cos\sigma t \tag{7.3.43}$$

设陀螺极轴在 $\alpha = 0$, $\beta = \beta_0$ 位置附近运动, 将式 (7.3.42) 代入式 (7.3.33), 保留 α, $\beta - \beta_0$ 和 Φ 的一阶微量, 积分得到

$$\alpha = \Phi\tan\beta_0\cos\gamma\sin\sigma t,\ \ \beta = \beta_0 - \Phi\sin\gamma\sin\sigma t \tag{7.3.44}$$

以 (7.3.43), (7.3.44) 为零次近似, 代入式 (7.3.35) 计算力矩 $\boldsymbol{L}_1$, 保留二阶微量, 且在每个振动周期 $T = 2\pi/\sigma$ 内平均化, 得到

$$\begin{aligned}\langle L_{1x}\rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T L_{1x}\mathrm{d}t\\ &= -\frac{1}{4}\Phi^2\sigma^2\sec\beta_0\sin 2\gamma\left(A_0\tan^2\beta_0 + C_1\sec^2\beta_0 + C_0 - B_0\right)\end{aligned} \tag{7.3.45}$$

代入进动方程 (3.2.25b) 的力矩项, 导出陀螺的漂移率

$$\dot{\beta} = -\frac{\Phi^2\sigma^2\sin 2\gamma}{4H_0\cos^2\beta_0}\left(A_0\tan^2\beta_0 + C_1\sec^2\beta_0 + C_0 - B_0\right) \tag{7.3.46}$$

与外环偏转的章动漂移现象不同, 载体角振动引起内环的缓慢偏转. 载体绕 η 轴或 ζ 轴做角振动时, $\gamma = 0$ 或 $\pi/2$, 漂移率为零. $\gamma = \pi/4$ 时漂移率有最大值. 对于极轴与外环轴垂直的特殊情形, $\beta_0 = 0$, 式 (7.3.46) 简化为

$$\dot{\beta} = -\frac{\Phi^2\sigma^2\sin 2\gamma\,(C_1 + C_0 - B_0)}{4H_0} \tag{7.3.47}$$

如万向支架的质量几何恰好满足 $C_1 + C_0 - B_0 = 0$, 则载体角振动引起的漂移自行消除.

7.4　弹性变形问题

7.4.1　带弹性支架的陀螺动力学方程

沿用 4.3 节对于万向支架弹性变形的处理方法, 假定弹性变形集中由忽略质量的内环轴和外环轴体现. 设基座 $(O-\xi\eta\zeta)$ 绕 ξ 轴转过 α 角为弹性变形前的外环坐标系 $(O-x_0'y_0'z_0')$; 由于外环轴的弹性变形, $(O-x_0'y_0'z_0')$ 绕 y_0' 轴转过 ψ 角为外环坐标系的实际位置 $(O-x_0y_0z_0)$; 设 $(O-x_0y_0z_0)$ 绕 y_0 轴转过 β 角为弹性变形前的内环坐标系 $(O-x'y'z')$, 由于内环轴的弹性变形, $(O-x'y'z')$ 绕 x' 轴转过 ϑ 角为 $(O-x''y''z'')$, 绕 z'' 轴转过 γ 角为内环坐标系的实际位置 $(O-xyz)$; $(O-xyz)$ 绕 z 轴转动 φ 角后为转子坐标系 $(O-x_{\mathrm{R}}y_{\mathrm{R}}z_{\mathrm{R}})$ (见图 7.16). 由于刚体转动已由 α 和 β 体现, 无限小转动 ψ,ϑ,γ 中不包含刚体转动成分. ψ 转动只能由外环轴的反对称弯曲变形实现, ϑ 转动只能由内环轴的反对称弯曲变形实现, 绕极轴的 γ 转动可由内环轴也可由外环轴的弯曲变形产生. 此处为简化分析, 认为仅由内环轴的反对称弯曲变形实现. 各坐标系之间的关系为

$$(O-\xi\eta\zeta) \underset{\xi,x_0'}{\overset{\alpha}{\longrightarrow}} (O-x_0'y_0'z_0') \underset{y_0',y_0}{\overset{\psi}{\longrightarrow}} (O-x_0y_0z_0) \underset{y_0,y'}{\overset{\beta}{\longrightarrow}} (O-x'y'z')$$

$$\underset{x',x''}{\overset{\vartheta}{\longrightarrow}} (O-x''y''z'') \underset{z'',z}{\overset{\gamma}{\longrightarrow}} (O-xyz) \underset{z,z_{\mathrm{R}}}{\overset{\varphi}{\longrightarrow}} (O-x_{\mathrm{R}}y_{\mathrm{R}}z_{\mathrm{R}})$$

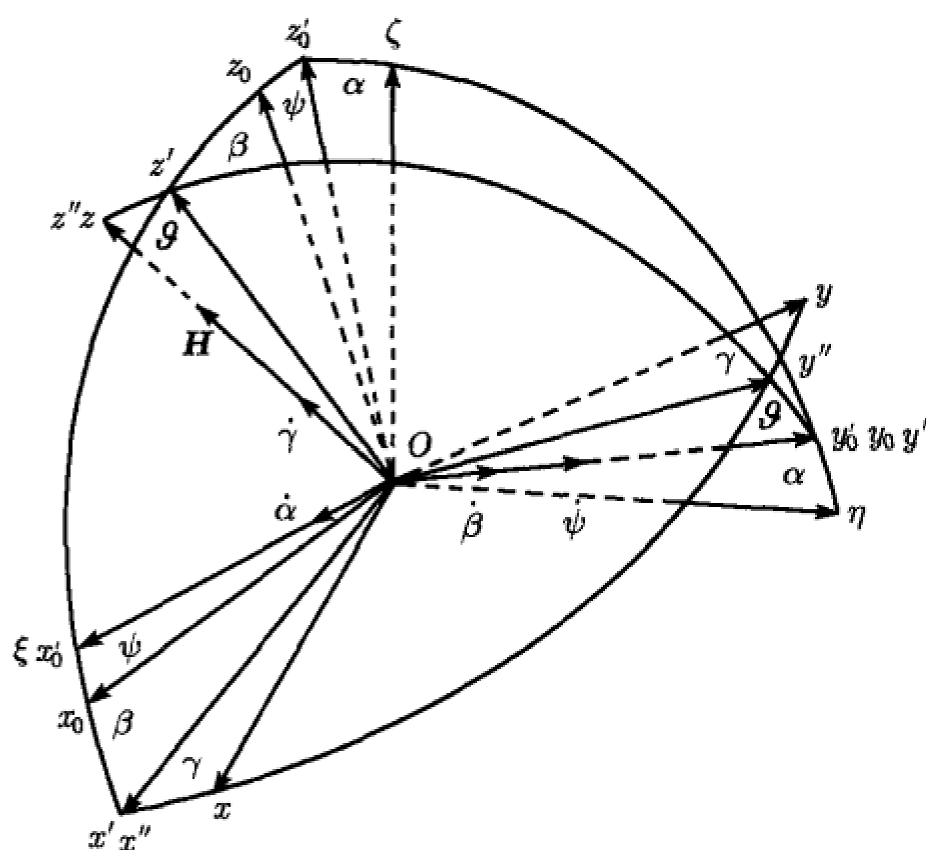


图 7.16　考虑支架变形的参考坐标系

万向支架的弹性变形使陀螺极轴增加 3 个转动自由度. 除 β 在平衡位置 β_0 附近为有限值以外, 其他角度坐标均为小量, 仅保留其一次项. 外环坐标系 $(O\text{–}x_0y_0z_0)$ 相对 $(O-\xi\eta\zeta)$ 以及内环坐标系 $(O-xyz)$ 相对 $(O-x_0y_0z_0)$ 的方向余弦矩阵分别为

$$\boldsymbol{C}_{\xi}^{x_0}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \psi\\ 0 & 1 & -\alpha\\ -\psi & \alpha & 1\end{pmatrix} \tag{7.4.1}$$

$$\boldsymbol{C}_{x_0}^{x}=\begin{pmatrix}\cos\beta & \vartheta\sin\beta-\gamma\cos\beta & \sin\beta\\ \gamma & 1 & -\vartheta\\ -\sin\beta & \vartheta\cos\beta+\gamma\sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix} \tag{7.4.2}$$

外环角速度 $\boldsymbol{\omega}_0$ 由沿 x_0 轴和 y_0 轴的投影 $\dot\alpha$ 和 $\dot\psi$ 组成, 内环角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 在 $(O-xyz)$ 中的投影 ω_x, ω_y, ω_z 为

$$\omega_x=\dot\alpha\cos\beta+\dot\vartheta,\quad \omega_y=\dot\beta+\dot\psi,\quad \omega_z=\dot\alpha\sin\beta+\dot\gamma \tag{7.4.3}$$

基座静止时各部件的动量矩为

$$\text{外环}:\boldsymbol{H}_0=A_0\dot\alpha\boldsymbol{i}_0+B_0\dot\psi\boldsymbol{j}_0 \tag{7.4.4a}$$

$$\text{内环}:\boldsymbol{H}_1=A_1\omega_x\boldsymbol{i}+B_1\omega_y\boldsymbol{j}+C_1\omega_z\boldsymbol{k} \tag{7.4.4b}$$

$$\text{转子}:\boldsymbol{H}_\mathrm{R}=A_\mathrm{R}\left(\omega_x\boldsymbol{i}+\omega_y\boldsymbol{j}\right)+C_R\left(\omega_z+\dot\varphi\right)\boldsymbol{k} \tag{7.4.4c}$$

设陀螺除约束力矩以外无其他外力矩作用. 转子稳态旋转, 存在初积分 (3.2.17). 为避免计算过繁, 设内、外环相对 z 轴或 z_0 轴对称, $A_0 = B_0$, $A_1 = B_1$, 且满足式 (7.3.5) 的简化条件, $A_1 + A_{\mathrm{R}} - C_1 = 0$. 则内环组合体和外环组合体的动量矩为

$$\boldsymbol{H}_1 + \boldsymbol{H}_{\mathrm{R}} = B\left[\left(\dot{\alpha}\cos\beta + \dot{\vartheta}\right)\boldsymbol{i} + \left(\dot{\beta} + \dot{\psi}\right)\boldsymbol{j}\right] + \left[C_1\left(\dot{\alpha}\sin\beta + \dot{\gamma}\right) + H_0\right]\boldsymbol{k} \tag{7.4.5}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{H}_1 + \boldsymbol{H}_{\mathrm{R}} = &\left[A\dot{\alpha} + B\left(\dot{\vartheta}\cos\beta + \dot{\gamma}\sin\beta\right) + H_0\sin\beta\right]\boldsymbol{i} \\ &+ \left(B\dot{\beta} + A\dot{\psi}\right)\boldsymbol{j} + \left(H_0\cos\beta - C_1\dot{\vartheta}\sin\beta\right)\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{7.4.6}$$

其中

$$A = A_0 + C_1,\quad B = B_1 + A_{\mathrm{R}} = A_1 + A_{\mathrm{R}} = C_1,\quad H_0 = C_{\mathrm{R}}\omega_0 \tag{7.4.7}$$

令 $H = H_0\cos\beta_0$, 列出外环组合体相对 x_0 轴, 和内环组合体相对 y 轴的线性化欧拉方程

$$A\ddot{\alpha} + B\left(\ddot{\vartheta}\cos\beta + \ddot{\gamma}\sin\beta\right) + H\left(\dot{\beta} + \dot{\psi}\right) = 0 \tag{7.4.8a}$$

$$B\left(\ddot{\beta} + \ddot{\psi}\right) - H\dot{\alpha} - H_0\dot{\vartheta} = 0 \tag{7.4.8b}$$

载体对外环组合体的约束力矩 $\boldsymbol{L}_0$ 垂直于外环轴承中心线 x_0' 轴, 沿 y_0 轴负方向且与弹性转角 ψ 成比例 (见图 7.17(a)). 设内环和外环有相同的抗弯刚度 K, $\boldsymbol{L}_0$ 在 $(O - x_0y_0z_0)$ 中的投影为

$$L_{0x_0} = 0,\quad L_{0y_0} = -K\psi,\quad L_{0z_0} = 0 \tag{7.4.9}$$

外环对内环的约束力矩 $\boldsymbol{L}_1$ 垂直于内环轴承中心线 y_0 轴, 沿 x' 轴和 z 轴的分量分别与弹性转角 ϑ 和 γ 成比例 (见图 7.17(b)). 仅保留 ϑ,γ 的一阶微量, $\boldsymbol{L}_1$ 在 $(O - xyz)$ 中的投影为

$$L_{1x} = -K\vartheta,\quad L_{1y} = 0,\quad L_{1z} = -K\gamma \tag{7.4.10}$$

变换到 $(O - x_0y_0z_0)$ 轴系, 得到

$$\begin{aligned}L_{1x_0} &= -K\left(\vartheta\cos\beta + \gamma\sin\beta\right) \\ L_{1y_0} &= 0 \\ L_{1z_0} &= K\left(\vartheta\sin\beta - \gamma\cos\beta\right)\end{aligned} \tag{7.4.11}$$

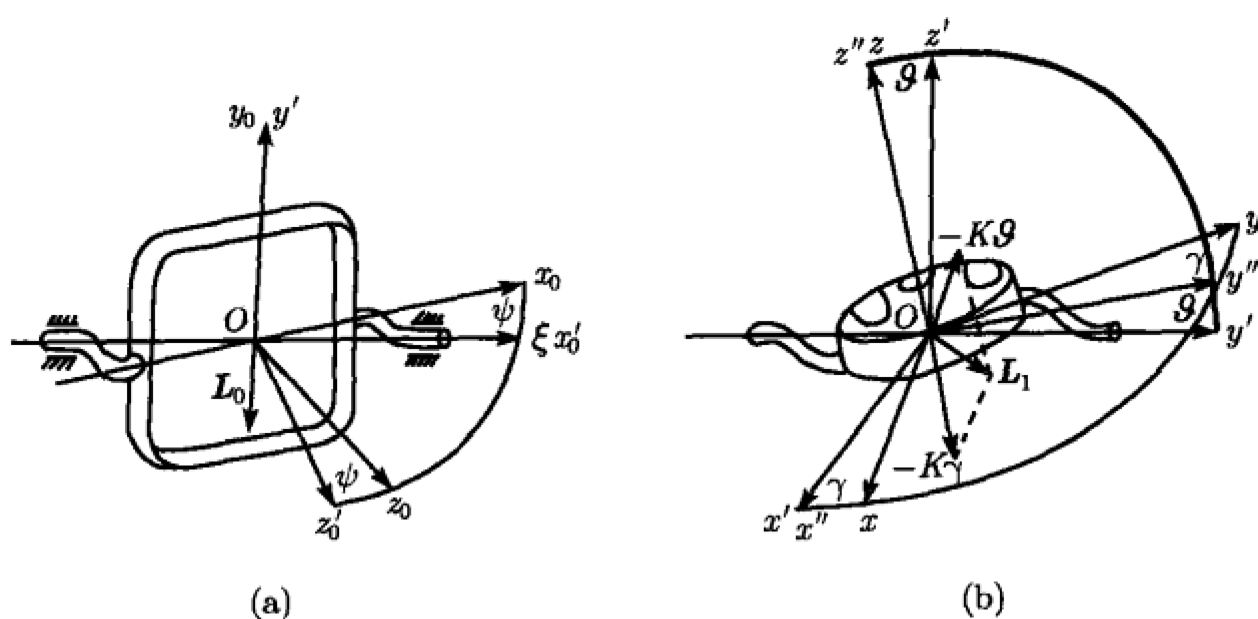


图 7.17 内外环转轴的弹性变形

列出外环在约束力矩 $\boldsymbol{L}_0$ 和 $-\boldsymbol{L}_1$ 作用下相对 x_0 轴和 y_0 轴, 和内环在约束力矩 $\boldsymbol{L}_1$ 作用下相对 z 轴的线性化欧拉方程

$$A_0\ddot{\alpha} - K(\vartheta\cos\beta + \gamma\sin\beta) = 0 \tag{7.4.12a}$$

$$B_0\ddot{\psi} + K\psi = 0 \tag{7.4.12b}$$

$$B(\ddot{\alpha}\sin\beta + \ddot{\gamma}) + K\gamma = 0 \tag{7.4.12c}$$

封闭的动力学方程组 (7.4.8),(7.4.12) 确定 5 个未知变量: $\alpha, \beta, \psi, \vartheta, \gamma$.

7.4.2 支架弹性对章动频率的影响

上述动力学方程组中解耦的方程 (7.4.12b) 可独立确定外环绕 y_0 轴的运动规律

$$\ddot{\psi} + k_1^2\psi = 0 \tag{7.4.13}$$

表明外环绕 y_0 轴做角频率为 k_1 的自由振动

$$k_1 = \sqrt{\frac{K}{B_0}} \tag{7.4.14}$$

设各变量的初始条件为

$$\begin{gathered}\alpha(0) = 0,\ \ \beta(0) = \beta_0,\ \ \dot{\alpha}(0) = \dot{\alpha}_0,\ \dot{\beta}(0) = 0 \\ \psi(0) = \vartheta(0) = \gamma(0) = 0,\ \dot{\psi}(0) = \dot{\vartheta}(0) = \dot{\gamma}(0) = 0\end{gathered} \tag{7.4.15}$$

作以下变量置换

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{B}{A}}\,\beta, \quad \psi_1 = \sqrt{\frac{B}{A}}\,\psi \tag{7.4.16}$$

从方程 (7.4.8b) 可导出初积分

$$\dot{\beta}_1 + \dot{\psi}_1 = \nu(\alpha + \sec\beta_0\vartheta) \tag{7.4.17}$$

其中 ν 为绝对刚性陀螺的章动频率

$$\nu = \frac{H}{\sqrt{AB}} \tag{7.4.18}$$

将上式代入方程 (7.4.8a), 考虑式 (7.4.7), 略去 $\vartheta, \gamma, \beta - \beta_0$ 的二阶以上小量, 化作

$$\rho\ddot{\alpha} + \cos\beta_0\ddot{\vartheta} + \sin\beta_0\ddot{\gamma} + \rho\nu^2\left(\alpha + \sec\beta_0\vartheta\right) = 0 \tag{7.4.19a}$$

将方程 (7.4.12a), (7.4.12c) 写作

$$(\rho - 1)\ddot{\alpha} - k^2\left(\cos\beta_0\vartheta + \sin\beta_0\gamma\right) = 0 \tag{7.4.19b}$$

$$\sin\beta_0\ddot{\alpha} + \ddot{\gamma} + k^2\gamma = 0 \tag{7.4.19c}$$

其中 k 为内环绕极轴扭转振动的固有角频率, ρ 为惯性矩比

$$k = \sqrt{\frac{K}{C_1}}, \quad \rho = \frac{A}{B} \tag{7.4.20}$$

封闭的方程组 (7.4.19) 确定 3 个未知变量: $\alpha, \vartheta, \gamma$. 将此方程组的特征值写作 $\pm\mathrm{i}\omega$, ω 为弹性支承陀螺的固有频率. 定义量纲为一的参数 s 和 μ

$$s = \left(\frac{\omega}{\nu}\right)^2, \quad \mu = \left(\frac{k}{\nu}\right)^2 \tag{7.4.21}$$

则方程组 (7.4.19) 的特征方程写作

$$a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0 \tag{7.4.22}$$

其中

$$\begin{aligned} a_0 &= \rho - 1 \\ a_1 &= -\mu(2\rho - 1) - \rho(\rho - 1)\sec^2\beta_0 \\ a_2 &= \mu\rho\left(\mu + \rho\sec^2\beta_0\right) \\ a_3 &= -\rho\mu^2 \end{aligned} \tag{7.4.23}$$

s 可能存在的 3 个正实根 $s_i\,(i = 1, 2, 3)$ 对应于陀螺的 3 个固有频率 $\omega_i = \nu\sqrt{s_i}(i = 1, 2, 3)$.

如万向支架虽有弹性但仍足够刚硬, $\mu \gg 1$, 将方程 (7.4.22) 各项除以 μ^2, 以 $\varepsilon = \mu^{-1}$ 为小参数, 略去 ε 的二阶以上微量, 简化为

$$(2\rho - 1)\varepsilon s^2 - \rho\left(1 + \varepsilon\rho\sec^2\beta_0\right)s + \rho = 0 \tag{7.4.24}$$

如支架绝对刚硬, 则 $\varepsilon = 0$, 解出 $s = 1$, 即 $\omega = \nu$, 陀螺的固有角频率等于绝对刚硬支架的章动频率. 一般情况下, 方程 (7.4.23) 的两个根中存在一个与 1 接近的根 s_1

$$s_1 = 1 - \left(1 - 2\rho + \rho^2\sec^2\beta_0\right)\rho^{-1}\varepsilon \tag{7.4.25}$$

在 $|\beta_0| < \pi/2$ 范围内, 上式中的括号为正值. 证明如下

$$1 - 2\rho + \rho^2 \sec^2 \beta_0 > (1 - \rho \sec \beta_0)^2 > 0 \tag{7.4.26}$$

s_1 所对应的固有频率 $\omega_1 = \nu\sqrt{s_1}$ 即受框架弹性影响的自由陀螺章动频率. 式 (7.4.25) 表明, 考虑支架弹性时 $s_1 < 1$, 即 $\omega_1 < \nu$. 由于 ε 为陀螺转速的增函数, 实践中观察到的自由陀螺章动频率随转速升高而降低的现象可由此得到解释 (见图 7.18).

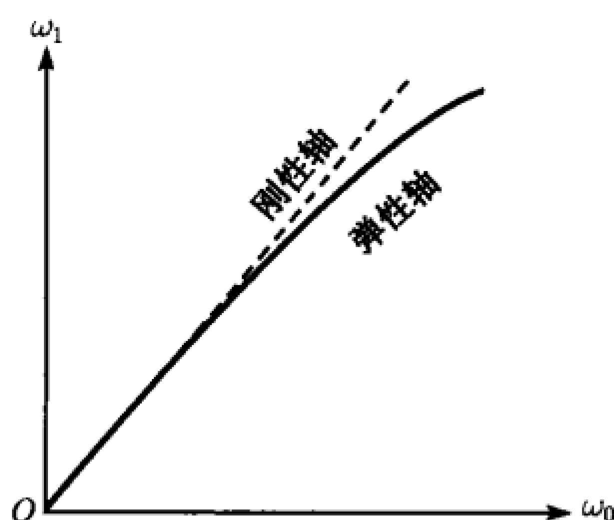


图 7.18　陀螺章动频率与转速的关系

除章动频率以外, 陀螺还存在与弹性扭振频率 k 接近的固有频率. 设方程 (7.4.22) 的另两个根 $s_{2,3}$ 与 μ 同数量级, 写作级数形式

$$s_{2,3} = \mu\left(l_0 + l_1\varepsilon + l_2\varepsilon^2 + \cdots\right) \tag{7.4.27}$$

将上式代入方程 (7.4.22), 依次令 μ 的自高至低的各次幂系数为零, 解出 $l_0, l_1, \cdots$ 等系数, 得到 $s_{2,3}$ 的近似式

$$s_2 = \mu\left[1 + \left(\rho \tan^2 \beta_0\right)\varepsilon + \cdots\right]$$
$$s_3 = \frac{\rho\mu}{\rho - 1}\left[1 + \frac{(\rho - 1)^2}{\rho}\varepsilon + \cdots\right] \tag{7.4.28}$$

此近似式当刚度系数 μ 足够大时成立. 刚度无限增大时令 $\varepsilon = 0$, 则 $\omega_2 = \nu\sqrt{s_2}$ 接近内环绕极轴扭转振动固有频率 $\sqrt{K/C_1}$, 考虑 $C_1 = A_1 + A_R$ 条件, ω_2 也是内环组合体绕外环轴扭转振动固有频率, $\omega_3 = \nu\sqrt{s_3}$ 接近 $\sqrt{KA/A_0C_1}$. 图 7.19 为三种固有频率 $\omega_i\,(i = 1, 2, 3)$ 随刚度系数 μ 变化的示意图.

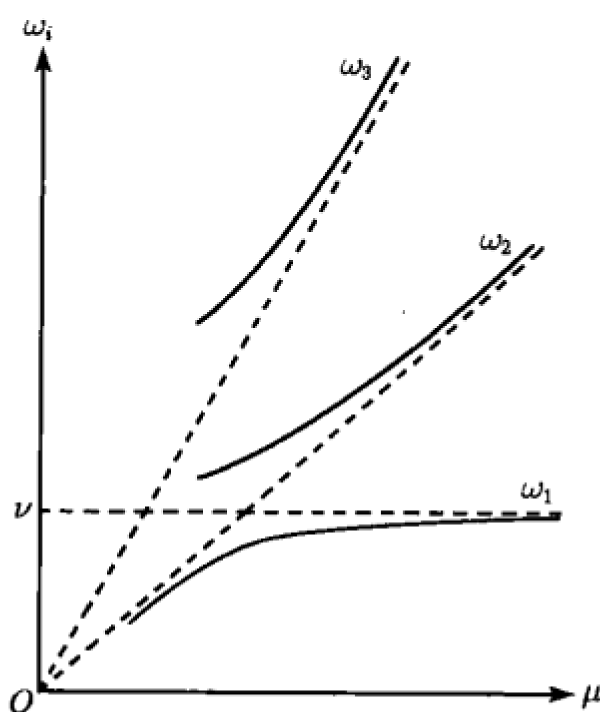


图 7.19　陀螺固有频率 ω_i 随刚度系数 μ 的变化曲线

第 8 章　动力调谐陀螺

万向支架并非陀螺仪唯一的支承方式. 1852 年傅科展示的第一台陀螺仪采用的悬线支承以及 1909 年斯佩里陀螺罗经采用的钢丝悬挂支承均不同于万向支架. 20 世纪 60 年代中期出现的挠性支承可视为上述支承方式的演变. 挠性支承利用柔软的扭杆代替悬线或钢丝以减小扭矩. 与轴承约束比较, 可以完全免除轴承摩擦问题. 虽然扭杆的弹性扭矩成为新干扰源, 但与随机性的轴承摩擦相比, 有规律可循的弹性扭矩可采用各种措施予以补偿. 动力调谐陀螺是具有实际意义的挠性支承陀螺. 支承系统的结构与万向接头类似, 但各部件的连接顺序及力矩传递链均与万向支架相反, 转子置于内环之外, 通过内环支承在驱动杆上. 所有的轴承约束均被挠性扭杆代替. 陀螺运转时所有部件均参与高速旋转, 内环在旋转中产生的惯性力矩与扭杆的弹性扭矩方向相反, 适当调整转速可使二者完全抵消. 这种独特支承方式的动力学原理区别于传统的框架陀螺. 本章叙述动力调谐陀螺的进动理论和章动理论, 包括多环调谐陀螺和非理想调谐陀螺的动力学问题和章动漂移问题. 由于驱动轴与转子极轴不一致而出现的转子极轴向驱动轴跟踪的现象以及由载体二倍旋转频率振动激发的陀螺漂移和正交摆性现象为动力调谐陀螺特有的力学现象.

8.1　挠性陀螺的特点

8.1.1　挠性扭杆约束

采用**挠性扭杆约束**的陀螺称为**挠性陀螺**. 扭杆约束有以下特点:

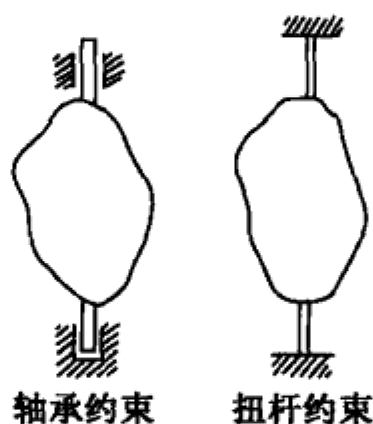


图 8.1　轴承约束与扭杆约束

1) 扭杆有极大的抗弯刚度, 它对于被支承刚体绕垂直于扭杆轴的微小转动足够刚硬, 可以传递与扭杆轴垂直的平面内任意方向的约束力矩;

2) 扭杆的抗扭刚度极小, 被支承刚体绕扭杆轴在小范围内有一个转动自由度, 但同时受到来自扭杆的弹性约束作用.

第一个特点与轴承约束的作用相同, 第二个特点则体现挠性扭杆约束与轴承约

束之间的重要区别：当被约束的刚体转动时，扭杆约束产生与转角成比例的弹性扭矩，代替了轴承约束的摩擦力矩 (见图 8.1).

8.1.2 万向接头支承

挠性陀螺采用**万向接头支承**(见图 8.2) [1]，这种特殊的支承方式有以下特点：

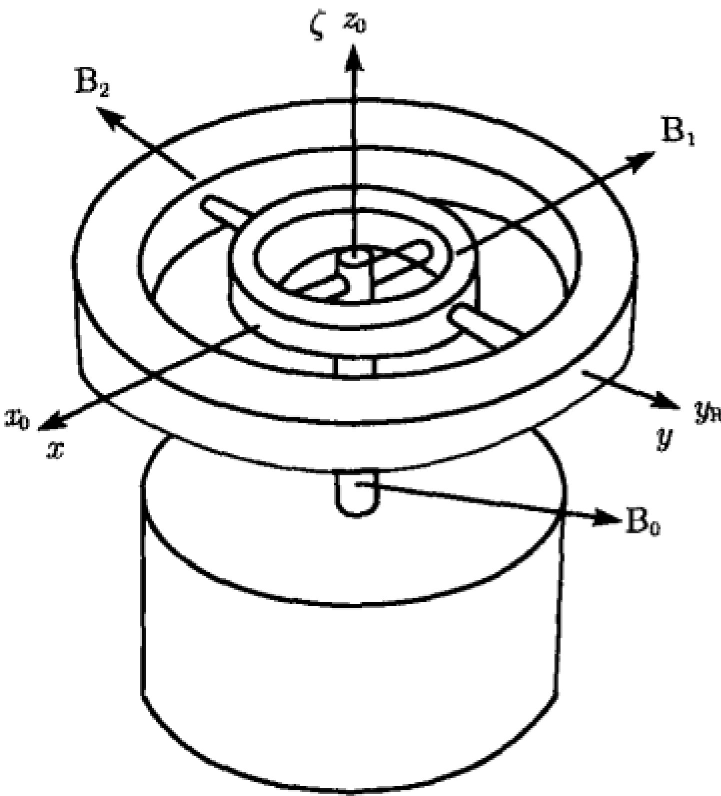


图 8.2 挠性陀螺的万向接头支承

1) 转子 B_2 置于内环 B_1 之外，通过内环支承在驱动杆 B_0 上. 所有的轴承约束均被挠性扭杆代替. 各部件的连接顺序与万向支架相反.

2) 力矩传递链如图 8.3 所示. 载体对驱动杆施加驱动力矩 $\boldsymbol{L}_0$，驱动杆通过内扭杆的扭矩和法向约束力矩 $\boldsymbol{L}_1$ 支承内环，内环通过外扭杆的扭矩和法向约束力矩 $\boldsymbol{L}_2$ 支承转子. $\boldsymbol{M}_i\,(i=0,1,2)$ 为系统外部作用于驱动杆、内环和转子的力矩.

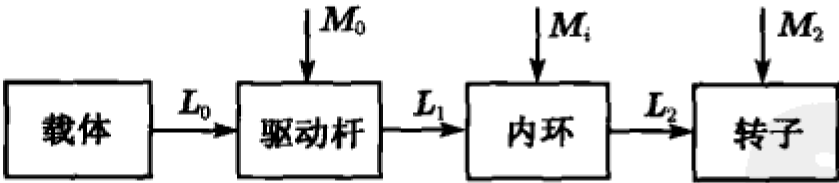


图 8.3 挠性陀螺的力矩传递链

3) 陀螺运转时所有部件都参与高速旋转，所有部件的质量均不允许忽略. 力矩 $\boldsymbol{L}_1$ 和 $\boldsymbol{L}_2$ 均随内环的运动而迅速改变方向.

4) 当转子极轴偏离驱动轴且保持定轴性时，质量远小于转子的内环被迫做一

[1] 万向接头在文献中亦称为虎克 (Hooke) 铰. 它与万向支架的结构形式类似，但支架的排列次序相反，即外侧与转子连接而内侧与基座连接.

种特殊的扭摆运动. 所产生的惯性力矩与扭杆作用于转子的弹性扭矩方向相反, 适当调整转速可使二者完全抵消. 这种起特殊作用的内环也称为**平衡环**.

8.2　单自由度挠性陀螺

8.2.1　动力学方程

单自由度挠性陀螺无内环, 轴对称的转子 B_1 由一对挠性扭杆直接支承在驱动杆 B_0 上 (见图 8.4). 扭杆轴与驱动轴的交点 O 为陀螺的支承中心. 以 O 为原点建立以下坐标系: $(O-\xi\eta\zeta)$ 固结于载体, ζ 轴沿陀螺的驱动轴. $(O-x_0y_0z_0)$ 固结于驱动杆, z_0 轴与 ζ 轴重合, x_0 轴为扭杆轴, 如驱动杆以稳态角速度 ω_0 匀速旋转且初始时 x_0 轴与 ξ 轴重合, 则 $(O-x_0y_0z_0)$ 为 $(O-\xi\eta\zeta)$ 绕 ζ 轴转过 $\omega_0 t$ 角后的位置. $(O-x_0y_0z_0)$ 绕扭杆轴 x_0 转过微小角度 γ 后的位置为转子坐标系 $(O-x_{\mathrm{R}}y_{\mathrm{R}}z_{\mathrm{R}})$, 略去下标记作 $(O-xyz)$, z 轴为转子极轴 (见图 8.5). 各坐标系之间的关系表示为

$$(O-\xi\eta\zeta)\ \underset{\zeta,z_0}{\overset{\omega_0 t}{\longrightarrow}}\ (O-x_0y_0z_0)\ \underset{x_0,x}{\overset{\gamma}{\longrightarrow}}\ (O-xyz)$$

仅保留 γ 的一次项时, $(O-xyz)$ 与 $(O-\xi\eta\zeta)$ 之间的方向余弦矩阵为

$$\boldsymbol{C}_x^\xi=\begin{pmatrix}\cos\omega_0 t & \sin\omega_0 t & 0\\ -\sin\omega_0 t & \cos\omega_0 t & \gamma\\ \gamma\sin\omega_0 t & -\gamma\cos\omega_0 t & 1\end{pmatrix}\tag{8.2.1}$$

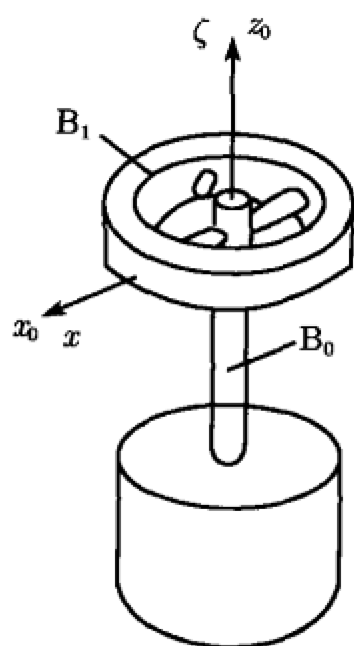


图 8.4　单自由度挠性陀螺

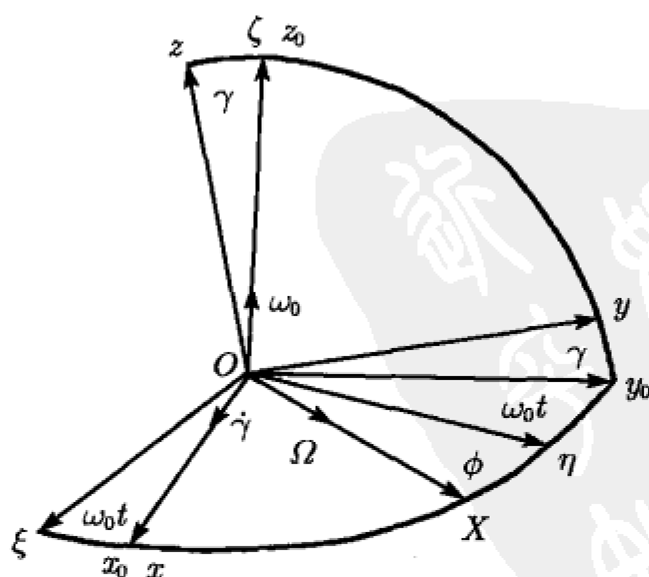


图 8.5　单自由度挠性陀螺的参考坐标系

设载体绕 (ξ,η) 平面内与 η 轴夹角为 ϕ 的任意轴 X 以角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ 转动. 忽略地球自转影响, $(O-xyz)$ 的角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 在 $(O-xyz)$ 轴系中的投影为

$$\omega_x = \dot{\gamma} + \Omega \sin(\omega_0 t + \phi) \tag{8.2.2a}$$

$$\omega_y = \omega_0 \gamma + \Omega \cos(\omega_0 t + \phi) \tag{8.2.2b}$$

$$\omega_z = \omega_0 - \Omega \gamma \cos(\omega_0 t + \phi) \tag{8.2.2c}$$

转速足够高时, 略去 (8.2.2c) 右边第二项, 认为 ω_z 与 ω_0 相等. 将转子的赤道惯性矩和极惯性矩记作 A_1, C_1, 则转子相对 O 点的动量矩的投影式为

$$\boldsymbol{H}_1 = A_1(\omega_x \boldsymbol{i} + \omega_y \boldsymbol{j}) + C_1 \omega_z \boldsymbol{k} \tag{8.2.3}$$

设 K 为扭杆的抗扭刚度系数, D 为扭杆材料内摩擦引起的阻尼力矩系数, 则扭杆对转子的约束力矩 $\boldsymbol{L}_1$ 沿 x 轴的分量 L_{1x} 为扭角 γ 及其导数的确定函数

$$L_{1x} = -K\gamma - D\dot{\gamma} \tag{8.2.4}$$

将 (8.2.2), (8.2.3), (8.2.4) 等式代入转子的欧拉方程沿 x 轴的投影式 (2.2.32a), 得到 γ 的线性化微分方程

$$\ddot{\gamma} + 2\zeta k \dot{\gamma} + k^2 \gamma = -\lambda_1 \omega_0 \Omega \cos(\omega_0 t + \phi) - \dot{\Omega} \sin(\omega_0 t + \phi) \tag{8.2.5}$$

其中

$$k = \sqrt{\frac{K + (C_1 - A_1)\omega^2}{A_1}}, \quad \zeta = \frac{D}{2A_1 k}, \quad \lambda_1 = \frac{C_1}{A_1} \tag{8.2.6}$$

8.2.2　速率陀螺

载体静止时 Ω 和 $\dot{\Omega}$ 均为零, 方程 (8.2.5) 为齐次方程, 转子绕扭杆轴做衰减的自由振动. 载体匀速转动时 Ω 为常值, 方程 (8.2.5) 的受迫振动特解为

$$\gamma = \gamma_0 \cos(\omega_0 t - \nu) \tag{8.2.7}$$

振幅 γ_0 和相位差 ν 为量纲为一的转速 $s = \omega_0 / k$ 的函数

$$\gamma_0 = \frac{\lambda_1 \Omega s}{k\sqrt{(1-s^2)^2 + (2\zeta s)^2}}$$

$$\nu = \arctan\left(\frac{2\zeta s}{1-s^2}\right) + \pi - \phi \tag{8.2.8}$$

转子绕扭杆轴作频率等于旋转角速度 ω_0 的受迫振动, 振幅 γ_0 与载体角速度 Ω 成正比, 相差 ν 随角度 ϕ 变化. 利用 γ_0 和 ν 的测量值可以推算出载体的瞬时角速度 Ω 和瞬时旋转轴的位置 ϕ, 从而确定载体相对 ξ 轴和 η 轴的转动角速度分量. 这种具有双轴速率陀螺功能的挠性陀螺称为**转子振动陀螺**.

8.2.3 积分陀螺

近似略去扭杆的阻尼项, 设陀螺的旋转频率等于自由振动频率, 载体匀速转动, 令方程 (8.2.5) 中 $\zeta=0$, $\omega_0=k$, $\dot{\Omega}=0$, 化作

$$\ddot{\gamma}+\omega_0^2\gamma=-\lambda_1\omega_0\Omega\cos(\omega_0 t+\phi) \tag{8.2.9}$$

此方程存在扭角随时间单调增长的特解

$$\gamma=-\frac{\lambda_1}{2}\Omega t\sin(\omega_0 t+\phi) \tag{8.2.10}$$

对应于陀螺的谐振状态. 由于受迫振动振幅与载体转过的角度 Ωt 成正比, 陀螺的功能从测转速转变为测角度. 这种具有积分陀螺特点的挠性陀螺称为**振荡陀螺**. 从陀螺的谐振条件 $\omega_0=k$ 导出

$$K-(2A_1-C_1)\omega_0^2=0 \tag{8.2.11}$$

即单自由度挠性陀螺的**调谐条件**.

设载体做角振动, 角速度 Ω 为频率 p 的周期函数

$$\Omega=\Omega_0\cos pt \tag{8.2.12}$$

将上式代入方程 (8.2.5), 令 $\zeta=0$, $\omega_0=k$, 得到

$$\ddot{\gamma}+\omega_0^2\gamma=\frac{\Omega_0}{2}\{(p-\lambda_1\omega_0)\cos[(p-\omega_0)t-\phi]-(p+\lambda_1\omega_0)\cos[(p+\omega_0)t+\phi]\} \tag{8.2.13}$$

两种激励频率 $p+\omega_0$ 和 $p-\omega_0$ 中任一频率等于 ω_0 时, 都可能引起振幅单调增长的久期项, 所对应的载体角振动频率为

$$p=0 \quad \text{或} \quad p=2\omega_0 \tag{8.2.14}$$

$p=0$ 即前面叙述过的载体匀速转动情形. $p=2\omega_0$ 表明, 载体做二倍旋转频率角振动时, 也能引起陀螺受迫振动无限增长的谐振现象.

8.3 调谐陀螺的进动理论

8.3.1 平衡环的扭摆运动

将图 8.4 中的转子 B_1 改为轴对称的平衡环, 平衡环上沿 y 轴用另一对扭杆与转子联结, 即构成由驱动轴 B_0、平衡环 B_1 和转子 B_2 组成的陀螺仪 (见图 8.2). 这

种支承方式完全不同于转子在内环之内的万向支架机构. 转子和平衡环在同一平面内时, 驱动轴带动平衡环和转子一同绕极轴平稳旋转, 扭杆不产生扭矩. 转子若偏转, 则夹在驱动轴和转子之间的平衡环被迫作一种特殊的扭摆运动, 产生交变的惯性力矩. 此惯性力矩通过扭杆向外传递至基座, 向内传递至转子. 适当调整陀螺的转速, 可使传递至转子的惯性力矩与弹性扭矩相互抵消. 于是转子相对驱动轴偏转所引起的干扰即被消除. 利用平衡环补偿弹性扭矩的二自由度挠性陀螺称为**动力调谐陀螺**.

设内、外扭杆轴互相垂直且与驱动轴相交于同一点 O, 即陀螺的支承中心. 平衡环和转子的质心均与 O 点重合. 设驱动过程已结束, 驱动杆以 ω_0 为角速度匀速旋转. 以 O 为原点建立与上节相同的载体坐标系 $(O-\xi\eta\zeta)$ 和驱动杆坐标系 $(O-x_0y_0z_0)$, 上节中的转子坐标系 $(O-xyz)$ 改为平衡环坐标系, x 轴和 y 轴分别为内外扭杆轴. $(O-xyz)$ 相对 $(O-\xi\eta\zeta)$ 的方向余弦矩阵与式 (8.2.1) 完全相同. $(O-xyz)$ 绕 y 轴顺时针转过 δ 角后的位置为转子坐标系 $(O-x_{\mathrm{R}}y_{\mathrm{R}}z_{\mathrm{R}})$ (见图 8.6). 各坐标系之间的关系为

$$\begin{array}{ccccccc} & \omega_0 t & & \gamma & & -\delta & \\ (O-\xi\eta\zeta) & \rightarrow & (O-x_0y_0z_0) & \rightarrow & (O-xyz) & \rightarrow & (O-x_{\mathrm{R}}y_{\mathrm{R}}z_{\mathrm{R}}) \\ & \zeta, z_0 & & x_0, x & & y, y_{\mathrm{R}} & \end{array}$$

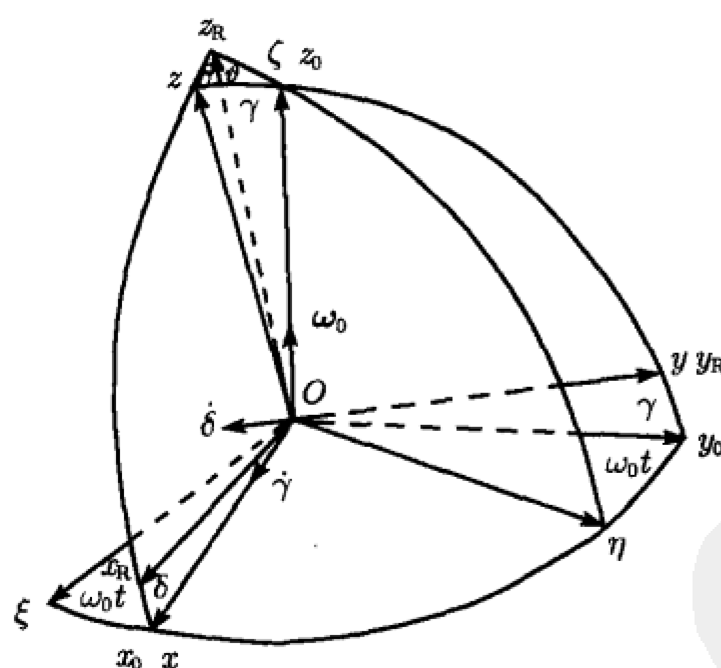


图 8.6　二自由度挠性陀螺的参考坐标系

与万向支架陀螺不同, 动力调谐陀螺的所有部件均参与高速旋转. 上述各坐标系亦随同旋转. 为便于分析, 建立能指示转子极轴和平衡环极轴的位置但不参与旋转的参考坐标系 $(O-XYZ)$ 和 $(O-X_1Y_1Z_1)$. 设 $(O-\xi\eta\zeta)$ 绕 ζ 轴转过 ψ 角后为 $(O-\xi_1\eta_1\zeta_1)$, 再绕 ξ_1 轴转动 ϑ 角后的位置为转子的莱查坐标系 $(O-XYZ)$, Z

轴沿转子极轴 z_{R} 方向. ψ, ϑ 为转子极轴相对 $(O-\xi\eta\zeta)$ 的欧拉角 (见图 8.7). 驱动杆坐标系 $(O-x_0y_0z_0)$ 的 z_0 轴与 ζ_1 轴均与驱动轴 ζ 轴一致. 设 (x_0, y_0) 平面相对 (ξ_1, η_1) 平面的转角为 φ, 如初始时 x_0 轴与 ξ 轴重合, 则有

$$\varphi = \omega_0 t - \psi \tag{8.3.1}$$

设 $(O-\xi_1\eta_1\zeta_1)$ 绕 ξ_1 轴转过 α_1 角后的位置为 $(O-\xi_2\eta_2\zeta_2)$, 再绕 η_2 轴转过 β_1 角后的位置为平衡环的莱查坐标系 $(O-X_1Y_1Z_1)$, Z_1 轴沿平衡环的极轴 z 方向. α_1, β_1 为内环极轴相对 $(O-\xi_1\eta_1\zeta_1)$ 的角度坐标 (见图 8.8). 各坐标系之间的关系为

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \overset{\vartheta}{\underset{\xi_1, X}{\longrightarrow}} & (O-XYZ) & \\
 & & & \nearrow & & & \\
(O-\xi\eta\zeta) & \overset{\psi}{\underset{\zeta,\zeta_1}{\longrightarrow}} & (O-\xi_1\eta_1\zeta_1) & & & & \\
 & & & \searrow & & & \\
 & & & & \overset{\alpha_1}{\underset{\xi_1,\xi_2}{\longrightarrow}} & (O-\xi_2\eta_2\zeta_2) & \overset{\beta_1}{\underset{\eta_2, Y_1}{\longrightarrow}} \ (O-X_1Y_1Z_1)
\end{array}$$

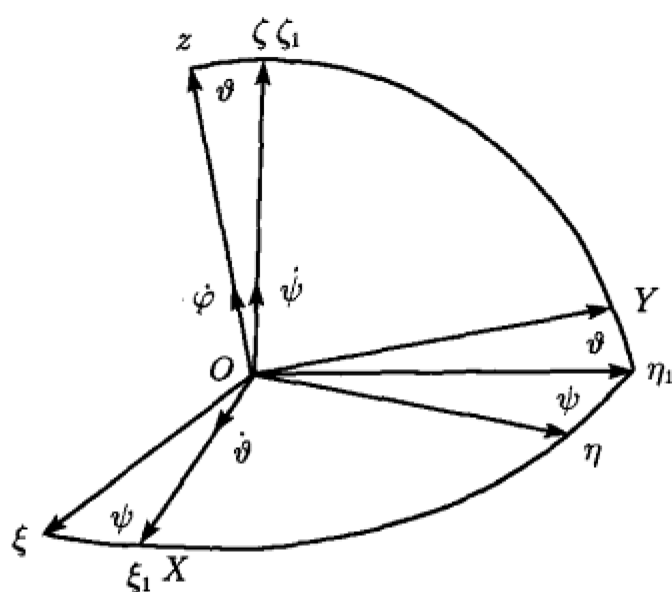


图 8.7　确定转子极轴的欧拉角

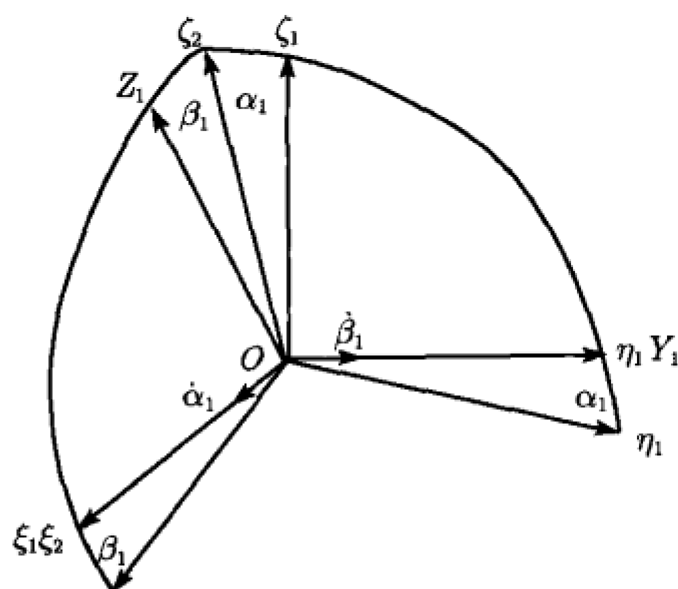


图 8.8　确定平衡环极轴的卡尔丹角

调谐陀螺的挠性扭杆不允许产生过大的扭角, 平衡环和转子的极轴均限制在驱动轴附近的小范围内运动. 除 ψ 和 φ 以外的所有角度坐标 ϑ, γ, δ, α_1, β_1 均为一阶微量. 各坐标系之间的方向余弦矩阵为

$$\boldsymbol{C}_{\xi_1}^{x} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & \gamma\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi & -\gamma\cos\varphi \\ 0 & \gamma & 1 \end{pmatrix} \tag{8.3.2}$$

$$C_{\xi_1}^{x_R} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & \gamma\sin\varphi - \delta\cos\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi & -\gamma\cos\varphi - \delta\sin\varphi \\ \delta & \gamma & 1 \end{pmatrix} \tag{8.3.3}$$

$$C_{\xi_1}^{X_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta_1 \\ 0 & 1 & -\alpha_1 \\ -\beta_1 & \alpha_1 & 1 \end{pmatrix} \tag{8.3.4}$$

$$C_{\xi_1}^{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\vartheta \\ 0 & \vartheta & 1 \end{pmatrix} \tag{8.3.5}$$

利用 z_R 轴与 Z 轴重合的条件, 令矩阵 (8.3.2) 和 (8.3.5) 的第 3 列元素一一相等, 解出内、外扭杆的扭角 γ, δ 与 φ, ϑ 之间的运动学关系

$$\gamma = \vartheta\cos\varphi, \quad \delta = \vartheta\sin\varphi \tag{8.3.6}$$

可看出, 扭角 γ 和 δ 以 90° 相位差随时间周期变化, 其幅值等于转子极轴偏离驱动轴的角度 ϑ. 利用 z 轴与 Z_1 轴重合的条件, 令矩阵 (8.3.2) 和 (8.3.4) 的第 3 列元素一一相等, 导出另一运动学关系

$$\alpha_1 = \gamma\cos\varphi, \quad \beta_1 = \gamma\sin\varphi \tag{8.3.7}$$

表明平衡环极轴相对惯性坐标系的角度坐标 α_1, β_1 以扭角 γ 为幅值, 以 90° 相位差随时间周期变化.

使用逐次近似方法, 以陀螺无力矩的自由状态为零次近似, 转子极轴 z_R 在惯性空间中保持方位不变, 角度坐标 ψ 和 ϑ 均为常值. 将式 (8.3.6) 代入式 (8.3.7), 得到以 α_1, β_1 表示的内环极轴摆动规律

$$\alpha_1 = \frac{\vartheta}{2}(1+\cos 2\psi), \quad \beta_1 = \frac{\vartheta}{2}\sin 2\psi \tag{8.3.8}$$

引入复变量 z_1

$$z_1 = \alpha_1 + \mathrm{i}\beta_1 \tag{8.3.9}$$

将式 (8.3.8) 写作复数形式

$$z_1 = \frac{\vartheta}{2}\left(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\varphi}\right) \tag{8.3.10}$$

上式在 z_1 的复数平面内确定的轨迹即平衡环的极点轨迹. 此轨迹为过驱动轴的迹点 O_1 和转子极轴的迹点 P 的半径为 $\vartheta/2$ 的偏置的圆 (见图 8.9). 式 (8.3.10) 表

明平衡环极轴以二倍旋转频率在驱动轴与转子极轴之间做顶角为 ϑ 的圆锥运动, 即平衡环的**扭摆运动**.

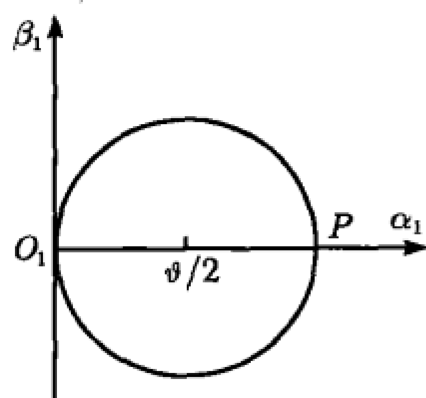


图 8.9　平衡环的极点轨迹

扭摆运动来源于万向接头独特的运动学约束条件, 它要求内扭杆轴 x 保持与驱动轴 ζ 正交, 且外扭杆轴 y 保持与转子极轴 z_R 正交. 当固结于平衡环的 (x, y) 平面被驱动轴带动高速旋转且 z_R 轴和 ζ 轴均保持惯性空间中的方位不变时, 只要 z_R 轴与 ζ 轴不重合, (x, y) 平面和与之正交的平衡环极轴必被迫做上述扭摆运动. z_R 轴偏离 ζ 轴的角度愈大, 则扭摆运动的幅度愈大. 驱动杆每转过 180° 时, 内、外扭杆均恢复原来位置, 内环极轴亦恢复原来位置, 因此扭摆运动的频率必为旋转频率的二倍.

8.3.2　调谐条件

调谐陀螺有不同于万向支架陀螺的力矩传递链, 如图 8.3 所示. 将驱动杆对平衡环、平衡环对转子作用的对 O 点的约束力矩 $\boldsymbol{L}_i\,(i=1,2)$ 向 $(O-xyz)$ 投影, 得到

$$\boldsymbol{L}_i = L_{ix}\boldsymbol{i} + L_{iy}\boldsymbol{j} + L_{iz}\boldsymbol{k} \quad (i=1,2) \tag{8.3.11}$$

各力矩分量中, L_{1x} 为内扭杆的弹性扭矩和阻尼力矩, L_{2y} 为外扭杆的弹性扭矩和阻尼力矩. 设内、外扭杆有相同的抗扭刚度 K 和阻尼系数 D, 即

$$L_{1x} = -K\gamma - D\dot{\gamma} \tag{8.3.12a}$$

$$L_{2y} = K\delta + D\dot{\delta} \tag{8.3.12b}$$

将式 (8.3.6) 代入上式, 根据零次近似假定, 计算 $\dot{\gamma}$ 和 $\dot{\delta}$ 的过程中将 ψ 和 ϑ 视为常值, 得到

$$L_{1x} = (-K\cos\varphi + D\omega_0\sin\varphi)\,\vartheta \tag{8.3.13a}$$

$$L_{2y} = (K\sin\varphi + D\omega_0\cos\varphi)\,\vartheta \tag{8.3.13b}$$

计算平衡环的角速度 $\boldsymbol{\omega}_1$

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \dot{\gamma}\boldsymbol{i} + \omega_0\boldsymbol{\zeta}^0 \tag{8.3.14}$$

$\boldsymbol{\omega}_1$ 在 $(O-xyz)$ 中的投影为

$$\omega_{1x} = -\omega_0\vartheta\sin\varphi, \quad \omega_{1y} = \omega_0\vartheta\cos\varphi, \quad \omega_{1z} = \omega_0 \tag{8.3.15}$$

设 A_1, C_1 为轴对称平衡环的赤道惯性矩和极惯性矩, 平衡环相对 O 点的动量矩 $\boldsymbol{H}_1$ 为

$$\boldsymbol{H}_1 = A_1(\omega_{1x}\boldsymbol{i} + \omega_{1y}\boldsymbol{j}) + C_1\omega_{1z}\boldsymbol{k} \tag{8.3.16}$$

列出平衡环的欧拉方程

$$\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{H}_1}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{L}_1 - \boldsymbol{L}_2 \tag{8.3.17}$$

将 (8.3.13), (8.3.15), (8.3.16) 等式代入后, 导出 $\boldsymbol{L}_1, \boldsymbol{L}_2$ 的其余分量

$$L_{2x} = -\left[K - (2A_1 - C_1)\omega_0^2\right]\vartheta\cos\varphi + D\omega_0\vartheta\sin\varphi \tag{8.3.18a}$$

$$L_{1y} = \left[K - (2A_1 - C_1)\omega_0^2\right]\vartheta\sin\varphi + D\omega_0\vartheta\cos\varphi \tag{8.3.18b}$$

$$L_{2z} = L_{1z} \tag{8.3.18c}$$

驱动杆匀速旋转时, 作用于杆上的力矩 $\boldsymbol{L}_0$ 与 $-\boldsymbol{L}_1$ 相平衡. 略去二阶微量, L_{1z} 等于 $\boldsymbol{L}_0$ 中包含的沿 ζ 轴的电机驱动力矩 M_m, 从式 (8.3.18c) 导出

$$L_{2z} = M_\mathrm{m} \tag{8.3.19}$$

式 (8.3.12b), (8.3.18a), (8.3.19) 完全确定平衡环作用于转子的约束力矩 $\boldsymbol{L}_2$, 投影到 $(O-XYZ)$ 轴系, 得到

$$L_{2X} = -K\vartheta + \left(A_1 - \frac{C_1}{2}\right)\omega_0^2\vartheta(1+\cos 2\varphi) + \frac{1}{2}M_\mathrm{m}\vartheta\sin 2\varphi \tag{8.3.20a}$$

$$L_{2Y} = D\omega_0\vartheta + \left(A_1 - \frac{C_1}{2}\right)\omega_0^2\vartheta\sin 2\varphi + \frac{1}{2}M_\mathrm{m}\vartheta(1-\cos 2\varphi) \tag{8.3.20b}$$

$$L_{2Z} = M_\mathrm{m} \tag{8.3.20c}$$

讨论调谐陀螺的进动时, 可将周期变化的力矩 (8.3.20) 对 φ 作平均化处理, 得到

$$\langle \boldsymbol{L}_2 \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \boldsymbol{L}_2 \mathrm{d}\varphi = \langle L_{2X}\rangle \boldsymbol{X}^0 + \langle L_{2Y}\rangle \boldsymbol{Y}^0 + \langle L_{2Z}\rangle \boldsymbol{Z}^0 \tag{8.3.21}$$

其中平均化的力矩投影为

$$\begin{aligned} \langle L_{2X}\rangle &= -\left[K - \left(A_1 - \frac{C_1}{2}\right)\omega_0^2\right]\vartheta \\ \langle L_{2Y}\rangle &= \left(D\omega_0 + \frac{1}{2}M_\mathrm{m}\right)\vartheta \\ \langle L_{2Z}\rangle &= M_\mathrm{m} \end{aligned} \tag{8.3.22}$$

$\langle L_{2X}\rangle$ 和 $\langle L_{2Y}\rangle$ 均与转子极轴偏离驱动轴的角度 ϑ 成正比. $\langle L_{2X}\rangle$ 为扭杆的弹性扭矩与平衡环扭摆运动产生的惯性力矩的合力矩. $\langle L_{2Y}\rangle$ 中除扭杆阻尼力矩以外, 还

包含驱动力矩成分, 这是由于平衡环只能传递沿内环极轴 z 的驱动力矩分量, 而 z 轴的平均位置相对转子极轴 Z 倾斜 $\vartheta/2$ 角所致.

如能调整 A_1, C_1, K, ω_0 等参数, 使满足以下条件

$$K-\left(A_1-\frac{C_1}{2}\right)\omega_0^2=0 \tag{8.3.23}$$

则式 (8.3.22) 中 $\langle L_{2X}\rangle=0$, 表明转子偏转引起的弹性扭矩被平衡环的惯性力矩完全补偿. 式 (8.3.23) 为二自由度挠性陀螺的调谐条件. 满足此条件的陀螺转速 ω_0 为**调谐转速**. 引入参数 ΔK, 称作扭杆的**剩余刚度**

$$\Delta K=K-\left(A_1-\frac{C_1}{2}\right)\omega_0^2 \tag{8.3.24}$$

理想调谐状态对应于 $\Delta K=0$, $\Delta K>0$ 称为**欠调谐**, $\Delta K<0$ 称为**过调谐**.

8.3.3　调谐陀螺的进动

以上在陀螺定轴性假设的零次近似基础上, 导出作用于转子的平均力矩 $\langle \boldsymbol{L}_2\rangle$. 转子在 $\langle \boldsymbol{L}_2\rangle$ 作用下的进动作为陀螺运动规律的一次近似. 零次近似中为常值的 ψ, ϑ 在一次近似中可随时间变化, 使转子极轴和 $(O-XYZ)$ 坐标系在惯性空间中转动, 表现为陀螺的漂移. 将 $(O-XYZ)$ 的转动角速度, 即漂移角速度记作 $\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{d}}$, 其投影式为

$$\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{d}}=\dot{\vartheta}\boldsymbol{X}^0+\dot{\psi}\vartheta\boldsymbol{Y}^0+\dot{\psi}\boldsymbol{Z}^0 \tag{8.3.25}$$

$\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{d}}$ 沿 X 轴和 Y 轴的投影即陀螺的漂移率. 在陀螺的进动理论中, 认为转子的动量矩 $\boldsymbol{H}$ 与极轴方向一致. 设 C 为轴对称转子的极惯性矩, 则有

$$\boldsymbol{H}=C\omega_0\boldsymbol{Z}^0 \tag{8.3.26}$$

除外扭杆的约束力矩 $\langle \boldsymbol{L}_2\rangle$ 以外, 转子上还作用有气体阻尼力矩 $\boldsymbol{M}_{\mathrm{D}}$. 仅考虑其与转速 ω_0 成正比的极轴方向分量, 即

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{D}}=-D_0\omega_0\boldsymbol{Z}^0 \tag{8.3.27}$$

将陀螺进动方程 (2.2.27) 中的 $\boldsymbol{\omega}_1$ 以 $\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{d}}$ 代替, 写作

$$\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{d}}\times\boldsymbol{H}=\langle \boldsymbol{L}_2\rangle+\boldsymbol{M}_{\mathrm{D}} \tag{8.3.28}$$

将 (8.3.21), (8.3.25), (8.3.26), (8.3.27) 等式代入上式, 导出以下方程组以确定陀螺运动的一次近似规律

$$\dot{\psi}=-\frac{\Delta K}{H} \tag{8.3.29a}$$

$$T\dot{\vartheta}+\vartheta=0 \tag{8.3.29b}$$

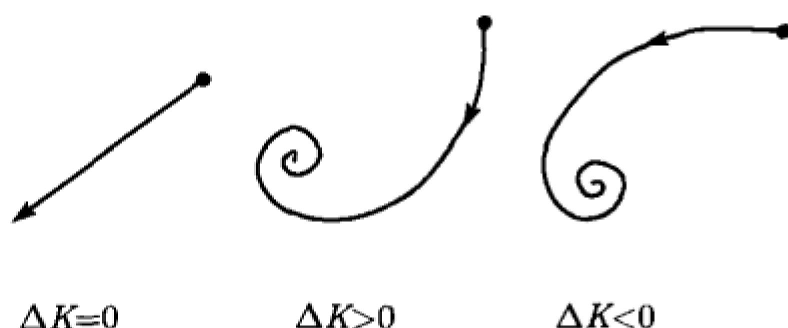
$$M_{\mathrm{m}}=D_0\omega_0 \tag{8.3.29c}$$

方程 (8.3.29a), (8.3.29b) 的解 $\psi(t),\vartheta(t)$ 以极坐标形式确定转子极点的运动. 在理想调谐状态, $\Delta K=0$, ψ 为常值, ϑ 按指数规律衰减, 极点沿直线向 ζ 轴趋近. 这种极轴向驱动轴趋近的现象称为**跟踪现象**. 产生跟踪现象的原因是驱动轴与转子极轴不一致, 是调谐陀螺区别于框架陀螺的特殊现象. 跟踪时间常数 T 为

$$T=\frac{C}{D+0.5D_0} \tag{8.3.30}$$

上式分母中 D 和 D_0 分别体现扭杆的内摩擦阻尼和与驱动力矩平衡的转子阻尼. 后者在扭杆的传递过程中, 其平均效应被降低一半. 跟踪现象也出现于第 9 章中的转子陀螺, 将在 9.4 节中讨论.

在非调谐状态, 剩余刚度 ΔK 的出现引起 ψ 的变化, 使直线极点轨迹转变为螺线, 欠调谐时为右旋螺线, 过调谐时为左旋螺线 (见图 8.10). 因此根据极点轨迹的几何特征可以判断陀螺是否正确调谐.



$\Delta K=0$　　$\Delta K>0$　　$\Delta K<0$

图 8.10　转子极点轨迹的不同类型

8.3.4　载体角振动引起的陀螺漂移

讨论载体绕 ξ_1 轴做角振动时的陀螺运动. 仍以转子保持定轴性为零次近似, 当驱动轴 ζ 由于角振动而改变方位时, 它与指向不变的转子极轴 Z 之间的角度 ϑ 为时间的周期函数. 平衡环的绝对角速度 ω_1 为式 (8.3.14) 所示的平衡环对 $(O-\xi_1\eta_1\zeta_1)$ 的相对角速度与 $(O-\xi_1\eta_1\zeta_1)$ 的牵连角速度 $-\dot{\vartheta}\boldsymbol{\xi}_1^0$ 之和

$$\boldsymbol{\omega}_1=\dot{\gamma}\boldsymbol{i}+\omega_0\boldsymbol{\zeta}_1^0-\dot{\vartheta}\boldsymbol{\xi}_1^0 \tag{8.3.31}$$

$\boldsymbol{\omega}_1$ 在 $(O-xyz)$ 轴系中的投影为

$$\omega_{1x}=-\omega_0\vartheta\sin\varphi,\ \ \omega_{1y}=\omega_0\vartheta\cos\varphi+\dot{\vartheta}\sin\varphi,\ \ \omega_{1z}=\omega_0 \tag{8.3.32}$$

将式 (8.3.32) 代替 (8.3.15), 视 ϑ 为变量, 重复前面的推导, 得到

$$L_{2X}=-K\vartheta-D\dot{\vartheta}+\left(A_1-\frac{C_1}{2}\right)\omega_0^2\vartheta\left(1+\cos2\varphi\right)$$

$$+\left[\left(A_1-\frac{C_1}{2}\right)\omega_0\dot{\vartheta}+\frac{1}{2}M_{\rm m}\vartheta\right]\sin 2\varphi \tag{8.3.33a}$$

$$L_{2Y}=D\omega_0\vartheta+\left(A_1-\frac{C_1}{2}\right)\omega_0^2\vartheta\sin 2\varphi$$
$$+\left[\left(A_1-\frac{C_1}{2}\right)\omega_0\dot{\vartheta}+\frac{1}{2}M_{\rm m}\vartheta\right](1-\cos 2\varphi) \tag{8.3.33b}$$

L_{2X}, L_{2Y} 周期性地变化, 但在 ϑ 的变化频率与陀螺的二倍旋转频率相等的特殊条件下, 可出现常值项并引起陀螺漂移.

设载体角振动的频率为 $2\omega_0$, 振幅为 $\varPhi$, 与陀螺旋转运动之间的相位差为 μ, 将 ϑ 的变化规律写作

$$\vartheta=\varPhi\cos(2\varphi-\mu) \tag{8.3.34}$$

将上式代入式 (8.3.10), 得到平衡环极轴的扭摆运动规律

$$z=\frac{\varPhi}{2}\left(1+{\rm e}^{{\rm i}2\varphi}\right)\cos(2\varphi-\mu) \tag{8.3.35}$$

平衡环极轴的极点轨迹几何形状随相位差 μ 的不同而改变 (见图 8.11). 尽管载体角振动时极轴偏角 ϑ 的平均值为零, 但平衡环极点轨迹却偏向一侧而与图 8.9 类似. 可以设想, 平衡环扭摆运动产生的惯性力矩也偏向一侧使转子产生进动.

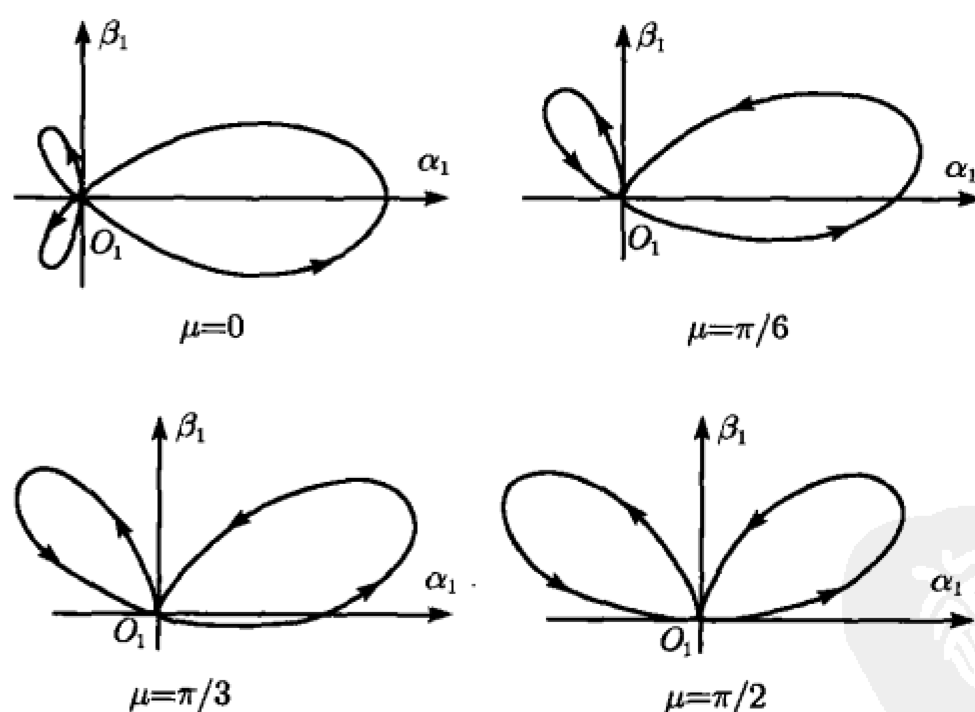


图 8.11　载体角振动时平衡环的极点轨迹

将约束力矩 L_{2X}, L_{2Y} 对周期变量 φ 作平均化处理, 以复变量 w 表示力矩的平均值

$$w=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(L_{2X}+{\rm i}L_{2Y}){\rm d}\varphi \tag{8.3.36}$$

将式 (8.3.34) 代入式 (8.3.33) 和 (8.3.36), 导出平均化约束力矩

$$w = -\frac{1}{4}\varPhi e^{i\mu}\left[(2A_1 - C_1)\,\omega_0^2 + iM_m\right] \tag{8.3.37}$$

利用进动方程 (8.3.28) 计算载体角振动导致的陀螺漂移. 将平均化约束力矩 (8.3.37) 代入后, 导出动坐标系 $(O - XYZ)$ 的转动角速度, 即陀螺的漂移角速度 $\boldsymbol{\Omega}_d$. 其投影 Ω_{dX}, Ω_{dY} 用复数 Ω_d 表示为

$$\Omega_d = \Omega_{dX} + i\Omega_{dY} \tag{8.3.38}$$

得到

$$\Omega_d = \frac{\varPhi e^{i\mu}}{4H}\left[M_m - i\omega_0^2\,(2A_1 - C_1)\right] \tag{8.3.39}$$

从而证实, 载体做二倍于旋转频率的角振动时, 平衡环扭摆运动的平均效应可引起陀螺漂移, 为调谐陀螺特有的力学现象. 漂移率与角振动的振幅成正比, 且与剩余刚度和驱动力矩有关. 漂移方向取决于相位差 μ.

8.3.5　多环调谐陀螺

设在驱动杆与转子之间独立地联结 n 个平衡环, 各环的内、外扭杆在同一平面内依次偏转 π/n 角度, 称为**多环调谐陀螺**. 以 x_j 表示第 j 环的内扭杆轴, 则第一环的内扭杆轴 x_1 与 ξ_1 轴夹角为 φ 时, x_j 轴与 ξ_1 轴的夹角为 $\varphi + (j-1)\,\pi/n$ (见图 8.12). 因此只要将前面得到的计算公式中的 φ 改成 $\varphi + (j-1)\,\pi/n$, 即适用于第 j 环.

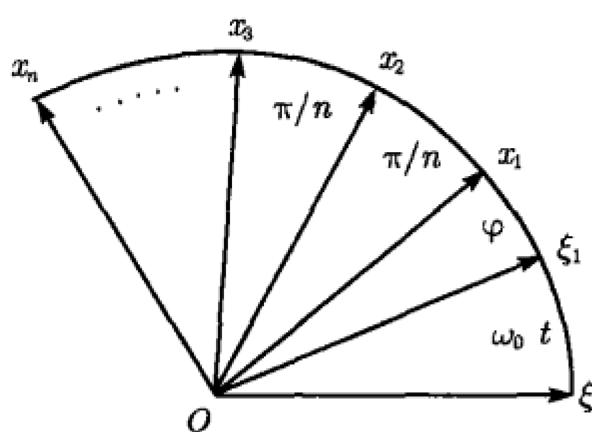


图 8.12　多平衡环的扭杆轴位置

在线性理论范畴中, n 个独立的平衡环对转子的动力学作用为各环单独作用的简单叠加. 陀螺的调谐条件 (8.3.23) 应改为

$$\sum_{j=1}^{n}\left[K_j - \left(A_j - \frac{C_j}{2}\right)\omega_0^2\right] = 0 \tag{8.3.40}$$

式中 $K_j, A_j, C_j\ (j = 1, 2, \cdots, n)$ 为第 j 环的扭杆刚度和惯性矩.

将式 (8.3.35) 中的 φ 代以 $\varphi+(j-1)\pi/n$, 等同于将 μ 代以 $\mu-(j-1)2\pi/n$, 因此可直接利用式 (8.3.39) 写出载体绕 ξ_1 轴做 $2\omega_0$ 频率角振动时, 第 j 环对转子的作用力矩引起的陀螺漂移, 用复数 $\Omega_{dj}=\Omega_{djX}+i\Omega_{djY}$ 表示为

$$\Omega_{dj}=\frac{\Phi}{4H}\left[M_{mj}-i\omega_0^2(2A_1-C_1)\right]\exp\left\{i\left[\mu-2\pi\left(\frac{j-1}{n}\right)\right]\right\}\quad(j=1,2,\cdots,n) \tag{8.3.41}$$

其中 M_{mj} 为第 j 环所分担的驱动力矩. n 个平衡环引起陀螺漂移的总效应为以上 n 式的叠加, 得到

$$\Omega_d=\frac{\Phi e^{i\mu}}{4H}\sum_{j=1}^{n}\left[M_{mj}-i\omega_0^2(2A_1-C_1)\right]\exp\left[-i2\pi\left(\frac{j-1}{n}\right)\right] \tag{8.3.42}$$

只要保证各环的质量几何满足以下条件

$$\sum_{j=1}^{n}\left[M_{mj}-i\omega_0^2(2A_1-C_1)\right]\exp\left[-i2\pi\left(\frac{j-1}{n}\right)\right]=0 \tag{8.3.43}$$

则载体的 $2\omega_0$ 频率角振动引起的总干扰作用抵消为零. 如能保证各环有相同的 $2A_j-C_j$, 且平均分担驱动力矩的传递任务, 即

$$2A_j-C_j=\text{常数},\quad M_{mj}=\frac{M_m}{n}\quad(j=1,2,\cdots,n) \tag{8.3.44}$$

则条件 (8.3.43) 简化为

$$\sum_{j=1}^{n}\exp\left[-i2\pi\left(\frac{j-1}{n}\right)\right]=0 \tag{8.3.45}$$

此条件为恒等式而自然满足, 因为它代表 n 个单位矢量的和, 它们依次接成封闭的正多边形. 因此条件 (8.3.44) 式可保证多环调谐陀螺自动消除载体二倍旋转频率角振动的干扰.

8.4 调谐陀螺的非理想情况

8.4.1 平衡环和转子质量偏心

设平衡环和转子的质心均沿轴向偏离支点 O 而带有微小摆性, $\boldsymbol{l}_1$ 和 $\boldsymbol{l}$ 分别为平衡环质心 O_1 和转子质心 O_c 至支点 O 的矢径

$$\boldsymbol{l}_1=l_1\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{l}=l\boldsymbol{Z}^0 \tag{8.4.1}$$

设 m_1 和 m 为平衡环和转子的质量, 平衡环做扭摆运动时产生的离心惯性力为 ϑ 和 l_1 的二阶微量而略去. 平衡环在质心 O_1 处作用的体积力 $m_1\boldsymbol{f}$ 对 O 点产生力矩 $\boldsymbol{M}_1$

$$\boldsymbol{M}_1=\boldsymbol{l}_1\times m_1\boldsymbol{f} \tag{8.4.2}$$

设比力 $\boldsymbol{f}$ 相对 $(O-XYZ)$ 各轴的投影为 f_X,f_Y,f_Z. 利用式 (8.4.1) 导出 $\boldsymbol{M}_1$ 相对 $(O-XYZ)$ 轴系的投影

$$\begin{aligned}
M_{1X}&=l_1\left(f_X\sin\varphi-f_Y\cos\varphi\right)\\
M_{1Y}&=l_1\left(f_X\cos\varphi+f_Y\sin\varphi\right)\\
M_{1Z}&=0
\end{aligned} \tag{8.4.3}$$

其中 M_{1Y} 经内扭杆传递至驱动轴, M_{1X} 经外扭杆传递至转子. 因此平衡环对转子的约束力矩 $\boldsymbol{L}_2$ 中除理想情况的式 (8.3.20) 以外, 应增加上述平衡环质量偏心引起的力矩增量 $\Delta\boldsymbol{L}_2$

$$\Delta\boldsymbol{L}_2=m_1l_1\left(f_X\sin\varphi-f_Y\cos\varphi\right)\left(\cos\varphi\boldsymbol{X}^0+\sin\varphi\boldsymbol{Y}^0\right) \tag{8.4.4}$$

此外, 转子在质心 O_c 处作用的体积力 $m\boldsymbol{f}$ 对 O 点产生附加力矩, 记作 $\Delta\boldsymbol{M}_2$

$$\Delta\boldsymbol{M}_2=\boldsymbol{l}\times m\boldsymbol{f}=-ml\left(f_Y\boldsymbol{X}^0-f_X\boldsymbol{Y}^0\right) \tag{8.4.5}$$

转子上作用的总附加力矩为 $\Delta\boldsymbol{L}_2$ 与 $\Delta\boldsymbol{M}_2$ 之和, 利用式 (8.4.4), (8.4.5) 计算其在 $(O-XYZ)$ 轴系中的投影, 得到

$$\begin{aligned}
\Delta\left(L_{2X}+M_{2X}\right)&=-mlf_Y+m_1l_1\left(f_X\sin\varphi-f_Y\cos\varphi\right)\cos\varphi\\
\Delta\left(L_{2Y}+M_{2Y}\right)&=mlf_X+m_1l_1\left(f_X\sin\varphi-f_Y\cos\varphi\right)\sin\varphi
\end{aligned} \tag{8.4.6}$$

将上式表示的附加力矩对 φ 平均化, 记为

$$\langle\Delta\left(\boldsymbol{L}_2+\boldsymbol{M}_2\right)\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\langle\Delta\left(\boldsymbol{L}_2+\boldsymbol{M}_2\right)\rangle\,\mathrm{d}\varphi \tag{8.4.7}$$

也可用复数 Δw 表示为

$$\Delta w=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\Delta\left(L_{2X}+M_{2X}\right)+\mathrm{i}\Delta\left(L_{2Y}+M_{2Y}\right)\right]\mathrm{d}\varphi \tag{8.4.8}$$

平均化附加力矩中的常值部分可引起陀螺漂移. 分别几种情况讨论:

1) f_X, f_Y, f_Z 均为常值

将式 (8.4.6) 代入式 (8.4.7), 得到

$$\langle\Delta(\boldsymbol{L}_2+\boldsymbol{M}_2)\rangle=\left(ml+\frac{1}{2}m_1l_1\right)\left(-f_Y\boldsymbol{X}^0+f_X\boldsymbol{Y}^0\right) \tag{8.4.9}$$

仅考虑重力作用时, $\boldsymbol{f}=-g\zeta^0$, 即

$$f_X=0,\quad f_Y=-g\vartheta,\quad f_Z=-g \tag{8.4.10}$$

代入式 (8.4.9), 得到作用于转子的摆性力矩的平均值

$$\langle\Delta(\boldsymbol{L}_2+\boldsymbol{M}_2)\rangle=\left(ml+\frac{1}{2}m_1l_1\right)g\vartheta\boldsymbol{X}^0 \tag{8.4.11}$$

其中除转子直接作用的摆性力矩以外, 平衡环的摆性力矩中有一半经内扭杆传递至驱动轴, 仅另一半能经外扭杆传递至转子. 沿 X 轴的摆性力矩垂直于重力方向.

2) 载体沿径向做 $2\omega_0$ 频率的线振动

沿 O 点沿 (X,Y) 平面做振幅为 b、相位差为 μ 的 $2\omega_0$ 频率的线振动, 振动方向相对 X 轴倾斜 ϕ 角. 将比力矢量用复数 f 表示为

$$f=f_X+\mathrm{i}f_Y=4b\omega_0^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\sin(2\phi-\mu) \tag{8.4.12}$$

将上式的实部和虚部代入式 (8.4.6) 和 (8.4.8), 得到

$$\Delta w=m_1l_1b\omega_0^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi-\mu)} \tag{8.4.13}$$

此常值力矩项是由于平衡环的交变的惯性力矩受到频率相同的扭摆运动的 "整流作用" 所形成. 陀螺漂移方向取决于振动方向 ϕ 和相位差 μ. 对于 $\mu=0$ 的特殊情形, Δw 和 f 均与 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ 成比例, 即比力矢量与所引起的附加力矩矢量共线. 这种与通常的摆性力矩方向正交的现象, 称为**正交摆性**, 是调谐陀螺的另一特殊力学现象.

对于多环调谐陀螺, 将式 (8.4.12) 中的 φ 代以 $\varphi+(j-1)\pi/n$, 等同于将 μ 代以 $\mu-(j-1)2\pi/n$, 即适用于第 j 环. 因此可直接从式 (8.4.13) 写出第 j 环作用于转子的常值附加力矩 Δw_j

$$\Delta w_j=m_jl_jb\omega_0^2\exp\left\{\mathrm{i}\left[\phi-\mu+2\pi\left(\frac{j-1}{n}\right)\right]\right\}\quad(j=1,2,\cdots,n) \tag{8.4.14}$$

n 个平衡环对转子的合力矩为

$$\Delta w=b\omega_0^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi-\mu)}\sum_{j=1}^{n}m_jl_j\exp\left[\mathrm{i}2\pi\left(\frac{j-1}{n}\right)\right] \tag{8.4.15}$$

要使多环调谐陀螺免除载体 $2\omega_0$ 频率线振动的干扰，各环的质量几何必须满足以下条件

$$\sum_{j=1}^{n} m_j l_j \exp\left[\mathrm{i}2\pi\left(\frac{j-1}{n}\right)\right] = 0 \tag{8.4.16}$$

如各环有相同的摆性，即

$$m_j l_j = \text{常数} \quad (j = 1, 2, \cdots, n) \tag{8.4.17}$$

则条件 (8.4.16) 转化为以下恒等式而自然满足

$$\sum_{j=1}^{n} \exp\left[\mathrm{i}2\pi\left(\frac{j-1}{n}\right)\right] = 0 \tag{8.4.18}$$

从而证明，多环调谐陀螺必须同时满足 (8.3.43) 和 (8.4.16) 条件，才有可能同时免除载体的二倍旋转频率的角振动和线振动的干扰.

对于内环和转子有径向偏心的情形，当载体沿轴向做 ω_0 频率线振动时，由于比力 $\boldsymbol{f}$ 与径向偏心矢径同时改变方向而产生常值力矩，引起陀螺漂移. 此问题已在第 4 章 4.3.4 节中讨论过而不再赘述.

8.4.2　扭杆轴不相交

讨论调谐陀螺的内、外扭杆轴不相交情形. 设驱动轴 z_0 与内扭杆轴 x 和平衡环极轴 z 交于一点 O_1，定义为平衡环的支承中心. 平衡环极轴 z 与外扭杆轴 y_2 和转子极轴 z_{R} 交于另一点 O，定义为转子的支承中心. 设 O_1 和 O 均在平衡环极轴上，但不重合. 驱动轴 z_0 与内扭杆轴之间，内外扭杆之间仍保持垂直.

将前面定义的以 O 为原点的部分坐标系平移至以 O_1 为原点，记作 $(O_1-\xi_1\eta_1\zeta_1)$，$(O_1-x_0y_0z_0)$ 和 (O_1-xyz)，原以 O 为原点的 $(O-xyz)$ 改记为 $(O-x'y'z')$，$(O-x'y'z')$ 绕 y' 轴顺时针转过 δ 角后为转子坐标系 $(O-x_{\mathrm{R}}y_{\mathrm{R}}z_{\mathrm{R}})$(见图 8.13). 各坐标系之间的关系为

$$\begin{array}{ccccc}
(O_1-\xi_1\eta_1\zeta_1) & \xrightarrow[\zeta_1,\, z_0]{\varphi} & (O_1-x_0y_0z_0) & \xrightarrow[x_0,\, x]{\gamma} & (O_1-xyz) \\
 & & & & \downarrow \\
 & & & & (O-x'y'z') \xrightarrow[y',\, y_{\mathrm{R}}]{-\delta} (O-x_{\mathrm{R}}y_{\mathrm{R}}z_{\mathrm{R}})
\end{array}$$

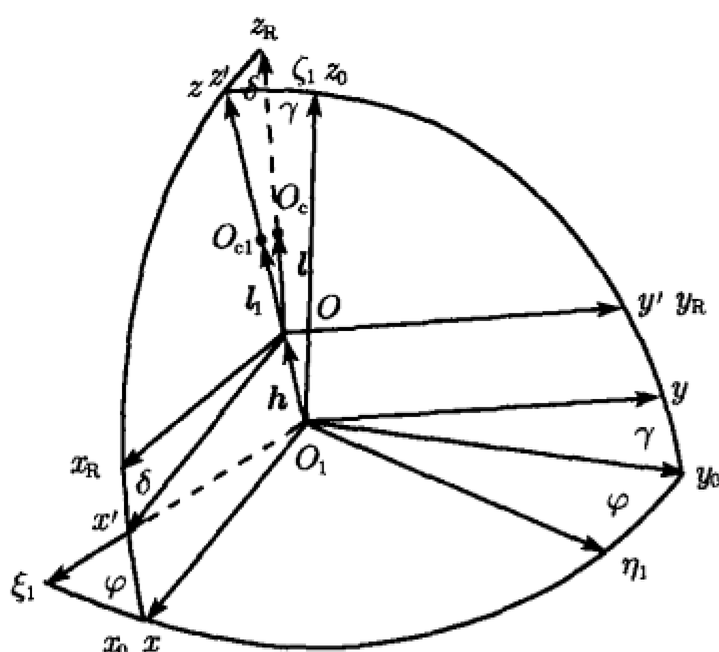


图 8.13　扭杆轴不相交情形的坐标系

仍以转子保持定轴性为零次近似, 驱动轴与转子极轴在惯性空间中的方位完全确定平衡环的扭摆运动规律, 而与内、外扭杆轴是否相交无关. 平衡环极轴以 O_1 为顶点作 $2\omega_0$ 频率的圆锥运动, O 点做圆周运动, 转子极轴随 O 点做指向不变的圆柱面运动. 设沿 z 轴的矢量 $\boldsymbol{h}$ 为 O_1 至 O 点的矢径, 平衡环和转子的质心均沿极轴偏离支点, 由式 (8.4.1) 表示的矢量 $\boldsymbol{l}_1$ 和 $\boldsymbol{l}$ 分别定义为 O_1 至 O_{c1} 点和 O_c 点的矢径. 利用矩阵 (8.3.2), (8.3.5) 导出 O_1 至 O_c 点的矢径 $\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{h}+\boldsymbol{l}$ 相对 (O_1-xyz) 轴系的投影式

$$\boldsymbol{\rho}=-l\vartheta\sin\varphi\boldsymbol{i}+(l+h)\,\boldsymbol{k} \tag{8.4.19}$$

将驱动杆作用于内环对 O_1 点的力矩 $\boldsymbol{L}_1$, 以及内环作用于转子对 O 点的力矩 $\boldsymbol{L}_2$ 在 (O_1-xyz) 中的投影式写作

$$\boldsymbol{L}_j=L_{jx}\boldsymbol{i}+L_{jy}\boldsymbol{j}+L_{jz}\boldsymbol{k}\quad(j=1,2) \tag{8.4.20}$$

其中 L_{1x} 和 L_{2y} 分别为内扭杆和外扭杆的弹性扭矩与阻尼力矩之和, 其变化规律与式 (8.3.13) 相同

$$L_{1x}=(-K\cos\varphi+D\omega_0\sin\varphi)\,\vartheta \tag{8.4.21a}$$

$$L_{2y}=(K\sin\varphi+D\omega_0\cos\varphi)\,\vartheta \tag{8.4.21b}$$

列写平衡环对 O_1 点的欧拉方程时, 必须考虑转子在 O 点处作用于平衡环的力 $\boldsymbol{F}$ 对 O_1 点的矩, 以及在质心 O_{1c} 处作用的平衡环的质量力 $m_1\boldsymbol{f}$ 对 O_1 点的矩, $\boldsymbol{f}$ 为比力. 设 $\boldsymbol{H}_1$ 为平衡环相对 O_1 点的动量矩, 列出

$$\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{H}_1}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{H}_1=\boldsymbol{L}_1-\boldsymbol{L}_2-\boldsymbol{h}\times\boldsymbol{F}+\boldsymbol{l}_1\times m_1\boldsymbol{f} \tag{8.4.22}$$

其中 $\boldsymbol{F}$ 可由转子质心运动方程导出

$$m\ddot{\boldsymbol{\rho}} = \boldsymbol{F} + m\boldsymbol{f} \tag{8.4.23}$$

将式 (8.4.19) 代入上式, 解出

$$\boldsymbol{F} = -2m\vartheta h\omega_0^2 (\sin\varphi \boldsymbol{i} - \cos\varphi \boldsymbol{j}) - m\boldsymbol{f} \tag{8.4.24}$$

将 (8.3.15), (8.4.21a), (8.4.24) 等式代入方程 (8.4.22) 沿 x 轴的投影式, 解出 L_{2x}

$$\begin{aligned} L_{2x} = & -\left[K - \left(2A_1 - C_1 + 2mh^2\right)\omega_0^2\right]\vartheta\cos\varphi + D\omega_0\vartheta\sin\varphi \\ & + (mh + m_1 l_1)(f_X \sin\varphi - f_Y \cos\varphi) \end{aligned} \tag{8.4.25}$$

其中 f_X, f_Y, f_Z 为比力 $\boldsymbol{f}$ 在 $(O-XYZ)$ 轴系中的投影.

列写转子对 O 点的欧拉方程时, 必须考虑因平衡环扭摆运动所引起的 O 点加速度 $\ddot{\boldsymbol{h}}$

$$\ddot{\boldsymbol{h}} = \boldsymbol{\omega}_1 \times (\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{h}) + \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \times \boldsymbol{h} \tag{8.4.26}$$

设 $\boldsymbol{H}$ 为转子相对 O 点的动量矩, 列出

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{L}_2 + \boldsymbol{l}_1 \times m(\boldsymbol{f} - \ddot{\boldsymbol{h}}) = \boldsymbol{L}_{20} + \Delta\boldsymbol{M} \tag{8.4.27}$$

其中 $\boldsymbol{L}_{20}$ 为式 (8.3.20) 确定的理想情况约束力矩, $\Delta\boldsymbol{M}$ 为影响转子动量矩变化率的力矩增量:

$$\Delta\boldsymbol{M} = \boldsymbol{L}_2 - \boldsymbol{L}_{20} + \boldsymbol{l}_1 \times m\left(\boldsymbol{f} - \ddot{\boldsymbol{h}}\right) \tag{8.4.28}$$

将 (8.4.21b), (8.4.25), (8.4.26) 等式代入上式, 变换到 $(O-XYZ)$ 轴系. 其中沿 Z 轴的分量与介质阻尼力矩 $D_0\omega_0$ 平衡, 沿 X, Y 轴的分量为

$$\begin{aligned} \Delta M_X = & -mlf_Y + \{(mh + m_1 l_1)\, f_X \sin\varphi + [2mh\,(2l + h)\,\omega_0^2\vartheta \\ & - (mh + m_1 l_1)\, f_Y]\cos\varphi\}\cos\varphi \\ \Delta M_Y = & \, mlf_X + \{(mh + m_1 l_1)\, f_X \sin\varphi + [2mh\,(2l + h)\,\omega_0^2\vartheta \\ & - (mh + m_1 l_1)\, f_Y]\cos\varphi\}\sin\varphi \end{aligned} \tag{8.4.29}$$

分别几种情况讨论:

1) f_X, f_Y, f_Z 均为常值

将式 (8.4.29) 对 φ 平均化后, 得到

$$\langle\Delta M_X\rangle = mh\,(2l + h)\,\omega_0^2\vartheta - \frac{1}{2}\left[m\,(2l + h) + m_1 l_1\right] f_Y$$

$$\langle \Delta M_Y \rangle = \frac{1}{2}\left[m\left(2l+h\right)+m_1 l_1\right] f_X \tag{8.4.30}$$

2) 载体沿径向做 $2\omega_0$ 频率的线振动

将式 (8.4.12) 表示的比力代入式 (8.4.29), 对 φ 平均化后得到以复数 Δw 表示的附加平均力矩矢量

$$\Delta w = \left(mh + m_1 l_1\right) b\omega_0^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi-\mu)} \tag{8.4.31}$$

上式与式 (8.4.13) 类似, 仅 $m_1 l_1$ 被 $(mh+m_1 l_1)$ 代替. 如选择 h, l_1 等参数使满足以下条件

$$l_1 = -\frac{mh}{m_1} \tag{8.4.32}$$

则陀螺可免除载体沿径向 $2\omega_0$ 频率的线振动干扰. 但由于 $m_1 \ll m$, 此条件要求平衡环的偏心距极大, 实际上难以实现.

8.4.3 扭杆轴不相交的双环调谐陀螺

讨论带有内、外扭杆轴不相交的双平衡环的调谐陀螺. 为不影响转子自由转动, 二平衡环中第一环的内扭杆必须与第二环的外扭杆共轴, 第一环的外扭杆必须与第二环的内扭杆共轴. 以 m_j, l_j, h_j $(j=1,2)$ 表示第 j 环的质量、偏心距和不相交距离. 上述运动学条件要求满足

$$h_1 = -h_2 \tag{8.4.33}$$

载体沿径向做 $2\omega_0$ 频率的线振动时, 利用式 (8.4.31) 导出双平衡环对转子的合力矩

$$\Delta w = \sum_{j=1}^{2} \Delta w_j = b\omega_0^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi-\mu)} \sum_{j=1}^{2} (-1)^{j+1}\left(mh_j + m_j l_j\right) \tag{8.4.34}$$

从而得到双环调谐陀螺免除载体 $2\omega_0$ 频率线振动影响的无干扰条件

$$\sum_{j=1}^{2} (-1)^{j+1}\left(mh_j + m_j l_j\right) = 0 \tag{8.4.35}$$

将式 (8.4.33) 代入后, 此条件化作

$$m_2 l_2 - m_1 l_1 = 2mh_1 \tag{8.4.36}$$

设双环调谐陀螺的二平衡环外形和质量相同, 且上下对称配置, 转子质心位于两环质心连线的中点 (见图 8.14), 则有

$$m_1 = m_2, \quad l_1 = -l_2 \tag{8.4.37}$$

只要选择内、外扭杆的不相交距离 h_1, 使满足

$$h_1 = \frac{m_1 l_1}{m} \tag{8.4.38}$$

则条件 (8.4.36) 自然满足. 如二平衡环的其他参数同时满足条件 (8.3.44), 则此双环调谐陀螺可同时免除载体的二倍旋转频率的角振动和线振动的干扰.

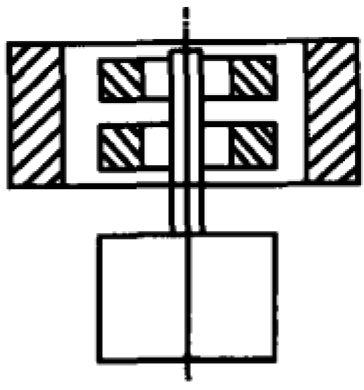


图 8.14　外扭杆轴不相交的双环调谐陀螺

8.5　调谐陀螺的章动理论

8.5.1　动力学方程

讨论调谐陀螺的章动理论时宜改用卡尔丹角 α, β, 代替进动理论中使用过的欧拉角 ϑ 和 ψ 作为转子极轴相对 $(O-\xi\eta\zeta)$ 的角度坐标. 设 $(O-\xi\eta\zeta)$ 绕 ξ 轴转动 α 角后的位置为 $(O-\xi_1\eta_1\zeta_1)$, 再绕 η_1 轴转动 β 角后的位置为转子的莱查坐标系 $(O-XYZ)$, Z 轴与转子极轴 z_{R} 重合 (见图 8.15). 坐标系之间的关系为

$$(O-\xi\eta\zeta) \underset{\xi,\xi_1}{\overset{\alpha}{\longrightarrow}} (O-\xi_1\eta_1\zeta_1) \underset{\eta_1,Y}{\overset{\beta}{\longrightarrow}} (O-XYZ)$$

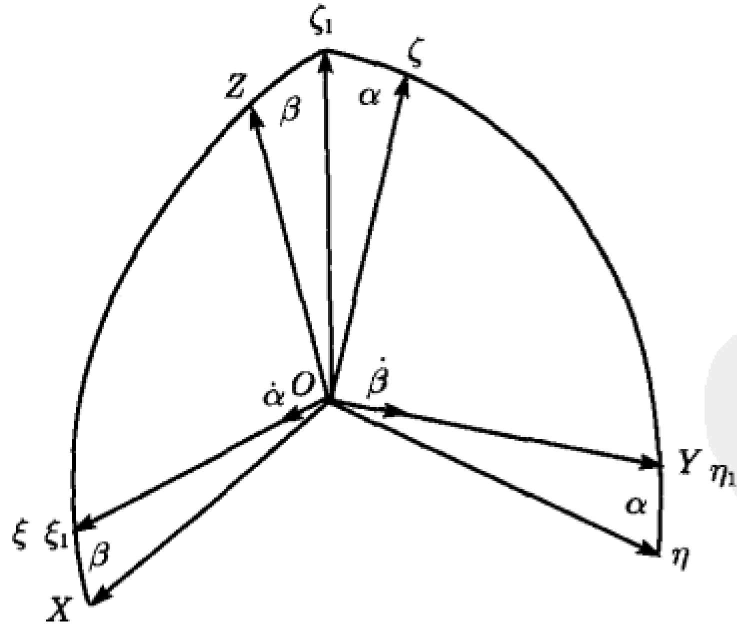


图 8.15　确定转子极轴的卡尔丹角

讨论小偏角运动时, 仅保留 α, β 的一次项, $(O-XYZ)$ 与 $(O-\xi\eta\zeta)$ 之间的方向余弦矩阵简化为

$$C_\xi^X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 1 \end{pmatrix} \tag{8.5.1}$$

为推导角度坐标 α, β 与扭角 γ, δ 之间的关系, 将相对 $(O-\xi_1\eta_1\zeta_1)$ 的方向余弦矩阵 (8.3.3) 变换为相对 $(O-\xi\eta\zeta)$ 坐标系. 设基座静止, $(O-\xi\eta\zeta)$ 为惯性坐标系, 转子的绝对转角为 $\omega_0 t$, 得到

$$C_\xi^{x_R} = \begin{pmatrix} \cos\omega_0 t & -\sin\omega_0 t & \gamma\sin\omega_0 t - \delta\cos\omega_0 t \\ \sin\omega_0 t & \cos\omega_0 t & -\gamma\cos\omega_0 t - \delta\sin\omega_0 t \\ \delta & \gamma & 1 \end{pmatrix} \tag{8.5.2}$$

利用 z_R 轴与 Z 轴重合条件, 令矩阵 (8.5.1) 与 (8.5.2) 的第三列元素一一相等, 导出内、外扭杆的扭角杆的扭角 γ, δ 与 α, β 之间的运动学关系

$$\begin{aligned} \gamma &= \alpha\cos\omega_0 t + \beta\sin\omega_0 t \\ \delta &= \alpha\sin\omega_0 t - \beta\cos\omega_0 t \end{aligned} \tag{8.5.3}$$

将上式代入式 (8.3.14), 导出平衡环角速度 $\boldsymbol{\omega}_1$ 在 $(O-xyz)$ 轴系中的投影

$$\begin{aligned} \omega_{1x} &= (\dot\alpha + \omega_0\beta)\cos\omega_0 t + \left(\dot\beta - \omega_0\alpha\right)\sin\omega_0 t \\ \omega_{1y} &= \omega_0\left(\alpha\cos\omega_0 t + \beta\sin\omega_0 t\right) \\ \omega_{1z} &= \omega_0 \end{aligned} \tag{8.5.4}$$

重复上一节的推导, 得到平衡环作用于转子的约束力矩 $\boldsymbol{L}_2$ 在 $(O-XYZ)$ 轴系中的投影

$$\begin{aligned} L_{2X} &= -\Delta K\alpha - D\left(\dot\alpha + \omega_0\beta\right) - \frac{1}{2}A_1\left(\ddot\alpha + \omega_0\dot\beta\right) - \frac{1}{2}M_m\beta \\ &\quad + E\cos 2\omega_0 t + F\sin 2\omega_0 t \\ L_{2Y} &= -\Delta K\beta - D\left(\dot\beta - \omega_0\alpha\right) - \frac{1}{2}A_1\left(\ddot\beta - \omega_0\dot\alpha\right) + \frac{1}{2}M_m\alpha \\ &\quad + E\sin 2\omega_0 t - F\cos 2\omega_0 t \\ L_{2Z} &= M_m \end{aligned} \tag{8.5.5}$$

其中 ΔK 定义同式 (8.3.24), 函数 E, F 定义为

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\left[-A_1\left(\ddot\alpha + \omega_0\dot\beta\right) + (2A_1 - C_1)\,\omega_0^2\alpha - M_m\beta\right] \\ F &= \frac{1}{2}\left[-A_1\left(\ddot\beta - \omega_0\dot\alpha\right) + (2A_1 - C_1)\,\omega_0^2\beta + M_m\alpha\right] \end{aligned} \tag{8.5.6}$$

仍以 $\boldsymbol{\Omega}_\mathrm{d}$ 表示 $(O-XYZ)$ 坐标系的角速度, 即陀螺的漂移角速度

$$\boldsymbol{\Omega}_\mathrm{d} = \dot{\alpha}\boldsymbol{X}^0 + \dot{\beta}\boldsymbol{Y}^0 \tag{8.5.7}$$

在章动理论中, 转子相对 O 点的动量矩 $\boldsymbol{H}$ 必须计入进动理论中被忽略的赤道惯性矩 A, 写作

$$\boldsymbol{H} = A\dot{\alpha}\boldsymbol{X}^0 + A\dot{\beta}\boldsymbol{Y}^0 + C\omega_0\boldsymbol{Z}^0 \tag{8.5.8}$$

气体阻尼力矩 $\boldsymbol{M}_\mathrm{d}$ 中必须考虑进动理论中忽略了的转子绕赤道轴转动的阻尼效应. 设 D_0 和 D_1 为绕极轴和赤道轴的阻尼力矩系数, $\boldsymbol{M}_\mathrm{d}$ 在 $(O-XYZ)$ 轴系中的投影为

$$\boldsymbol{M}_\mathrm{d} = -D_1\left(\dot{\alpha}\boldsymbol{X}^0 + \dot{\beta}\boldsymbol{Y}^0\right) - D_0\omega_0\boldsymbol{Z}^0 \tag{8.5.9}$$

将 (8.5.7), (8.5.8), (8.5.9) 等式代入转子的欧拉方程

$$\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\Omega}_\mathrm{d} \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{M}_\mathrm{d} \tag{8.5.10}$$

导出转子的动力学方程组

$$\begin{aligned} A\ddot{\alpha} + C\omega_0\dot{\beta} = & -\Delta K\alpha - D_1\dot{\alpha} - D\left(\dot{\alpha} + \omega_0\beta\right) - \frac{1}{2}A_1\left(\ddot{\alpha} + 2\omega_0\dot{\beta}\right) - \frac{1}{2}M_\mathrm{m}\beta \\ & + E\cos 2\omega_0 t + F\sin 2\omega_0 t \end{aligned} \tag{8.5.11a}$$

$$\begin{aligned} A\ddot{\beta} - C\omega_0\dot{\alpha} = & -\Delta K\beta - D_1\dot{\beta} - D\left(\dot{\beta} - \omega_0\alpha\right) - \frac{1}{2}A_1\left(\ddot{\beta} - 2\omega_0\dot{\alpha}\right) + \frac{1}{2}M_\mathrm{m}\alpha \\ & + E\sin 2\omega_0 t - F\cos 2\omega_0 t \end{aligned} \tag{8.5.11b}$$

$$D_0\omega_0 = M_\mathrm{m} \tag{8.5.11c}$$

将式 (8.5.11c) 代入方程 (8.5.11a)(8.5.11b), 引入复变量 z

$$z = \alpha + \mathrm{i}\beta \tag{8.5.12}$$

改造为复数形式的周期变系数线性方程

$$\begin{aligned} A\ddot{z} - \mathrm{i}C\omega_0\dot{z} = & -\frac{1}{2}A_1\ddot{z} - \left(D + D_1 - \mathrm{i}A_1\omega_0\right)\dot{z} - \left[\Delta K - \mathrm{i}\omega_0\left(D + \frac{D_0}{2}\right)\right]z \\ & - \frac{1}{2}\left\{A_1\ddot{\bar{z}} + \mathrm{i}2A_1\omega_0\dot{\bar{z}} - \left[\left(2A_1 - C_1\right)\omega_0 - \mathrm{i}D_0\right]\omega_0\bar{z}\right\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\omega_0 t} \end{aligned} \tag{8.5.13}$$

式中 $\bar{z}$ 为 z 的共轭复数.

8.5.2 渐近解基本方程

用渐近法计算方程 (8.5.13) 的近似解. 将平衡环与转子的赤道惯性矩之比取作小参数 ε

$$\varepsilon = \frac{A_1}{A} \tag{8.5.14}$$

设陀螺的阻尼系数和剩余刚度都很小, D, D_0, D_1 与 $A_1\omega_0$ 同数量级, ΔK 与 $A_1\omega_0^2$ 同数量级. 定义以下量纲为一的量

$$\begin{gathered}\lambda = \frac{C}{A}, \quad \lambda_1 = \frac{C_1}{A_1}, \quad \Delta\kappa = \frac{\Delta K}{A_1\omega_0^2} \\ \delta = \frac{D}{A_1\omega_0}, \quad \delta_0 = \frac{D_0}{A_1\omega_0}, \quad \delta_1 = \frac{D_1}{A_1\omega_0}\end{gathered} \tag{8.5.15}$$

方程 (8.5.13) 改写为

$$\begin{aligned}\ddot{z} - \mathrm{i}\nu\dot{z} = -\varepsilon\bigg\{&\frac{1}{2}\,\ddot{z} + (\delta + \delta_1 - \mathrm{i})\,\omega_0\dot{z} + \left[\Delta\kappa - \mathrm{i}\left(\delta + \frac{\delta_0}{2}\right)\right]\omega_0^2 z \\ &+ \frac{1}{2}\left[\ddot{\bar{z}} + \mathrm{i}2\omega_0\dot{\bar{z}} - (2 - \lambda_1 - \mathrm{i}\delta_0)\,\omega_0^2\bar{z}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\omega_0 t}\bigg\}\end{aligned} \tag{8.5.16}$$

其中 ν 为转子的章动频率

$$\nu = \frac{C\omega_0}{A} \tag{8.5.17}$$

第 7 章中叙述了高速旋转陀螺仪的普遍运动规律是进动与章动的叠加, 前者缓慢变化, 后者是高频微幅振动. 此结论不仅适合于万向支架陀螺, 也符合对调谐陀螺的观测结果. 为便于分析两种速度相差悬殊的过程同时发生的运动规律, 应用**双重时间尺度概念**. 定义 τ 为尺度缩小的时间变量

$$\tau = \varepsilon t \tag{8.5.18}$$

将 τ 和 t 视为独立变量, 分别为慢变过程和快变过程的自变量. 渐近解的一般形式规定为进动解 z_p 和章动解 z_n 之和, 前者为慢变过程, 写作 τ 的函数, 后者为快变过程, 由于章动振幅也可能缓慢变化而视为 τ 和 t 的二元函数

$$z = z_\mathrm{p}(\tau) + z_\mathrm{n}(\tau, t) \tag{8.5.19}$$

将上式代入方程 (8.5.16), 将 z_n 对时间的导数写作全微分形式

$$\frac{\mathrm{d}z_\mathrm{n}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial z_\mathrm{n}}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial z_\mathrm{n}}{\partial \tau} \tag{8.5.20}$$

导出以下渐近解基本方程

$$\left(\frac{\partial^2 z_\mathrm{n}}{\partial \tau^2}\ddot{z} - \mathrm{i}\nu\frac{\partial z_\mathrm{n}}{\partial t}\right) - \mathrm{i}\nu\varepsilon\left[\frac{\mathrm{d}z_\mathrm{p}}{\mathrm{d}\tau} + \frac{\omega_0}{\lambda}\left(\delta + \frac{\delta_0}{2} + \mathrm{i}\Delta\kappa\right)z_\mathrm{p}\right]$$

$$= -\varepsilon\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 z_{\rm n}}{\partial t^2} + \frac{2\partial^2 z_{\rm n}}{\partial\tau\partial t} + [\delta + \delta_1 - {\rm i}(1+\lambda)]\,\omega_0\frac{\partial z_{\rm n}}{\partial\tau} + \left[\Delta\kappa - {\rm i}\left(\delta + \frac{\delta_0}{2}\right)\right]\omega_0^2 z_{\rm n}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2\bar{z}_{\rm n}}{\partial t^2} + {\rm i}2\omega_0\frac{\partial\bar{z}_{\rm n}}{\partial t} - (2-\lambda_1-{\rm i}\delta_0)\,\omega_0^2(\bar{z}_{\rm p}+\bar{z}_{\rm n})\,{\rm e}^{{\rm i}2\omega_0 t}\right]\right\} + \cdots \tag{8.5.21}$$

省略号表示 ε^2 以上的高次项.

8.5.3　快变过程与章动稳定性

方程 (8.5.21) 包含时间尺度相差悬殊的章动和进动两种过程. 讨论由快变量 $z_{\rm n}$ 描述的章动过程时, 可以近似忽略慢变量 $z_{\rm p}$ 的进动过程. 仅保留 ε 的一次项, 其动力学方程为

$$\frac{\partial^2 z_{\rm n}}{\partial\tau^2}\ddot{z} - {\rm i}\nu\frac{\partial z_{\rm n}}{\partial t} = -\varepsilon\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 z_{\rm n}}{\partial t^2} + \frac{2\partial^2 z_{\rm n}}{\partial\tau\partial t} + [\delta+\delta_1-{\rm i}(1+\lambda)]\,\omega_0\frac{\partial z_{\rm n}}{\partial\tau}\right.$$
$$+\left[\Delta\kappa - {\rm i}\left(\delta+\frac{\delta_0}{2}\right)\right]\omega_0^2 z_{\rm n} + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2\bar{z}_{\rm n}}{\partial t^2} + {\rm i}2\omega_0\frac{\partial\bar{z}_{\rm n}}{\partial t}\right.$$
$$\left.\left. - (2-\lambda_1-{\rm i}\delta_0)\,\omega_0^2(\bar{z}_{\rm p}+\bar{z}_{\rm n})\,{\rm e}^{{\rm i}2\omega_0 t}\right]\right\} \tag{8.5.22}$$

将 $\varepsilon = 0$ 情形作为零次近似, 即陀螺免除平衡环约束和介质阻尼的理想自由状态. 从方程 (8.5.21) 派生出零次近似方程

$$\frac{{\rm d}^2 z_{\rm n}}{{\rm d}\tau^2}\ddot{z} - {\rm i}\nu\frac{{\rm d}z_{\rm n}}{{\rm d}t} = 0 \tag{8.5.23}$$

解出零次近似解 $z_{\rm n}(0,t)$ 为频率 ν 的等幅振动

$$z_{\rm n}(0,t) = Z{\rm e}^{{\rm i}\nu t} \tag{8.5.24}$$

此零次近似运动规律表示陀螺极轴在指向不变的平均位置附近章动.

将零次近似解 (8.5.24) 代入方程 (8.5.22) 的右边, 得到一次近似方程

$$\frac{\partial^2 z_{\rm n}}{\partial t^2} - {\rm i}\nu\frac{\partial z_{\rm n}}{\partial t} = \varepsilon\left\{-{\rm i}\nu\left[\frac{{\rm d}Z}{{\rm d}\tau} + (M+{\rm i}N)\,Z\right]{\rm e}^{{\rm i}\nu t} + \frac{1}{2}(2-\lambda_1-{\rm i}\delta_0)\,\omega_0^2\bar{z}_{\rm p}{\rm e}^{{\rm i}2\omega_0 t}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}[\lambda(\lambda-2)+2-\lambda_1-{\rm i}\delta_0]\,\omega_0^2\bar{Z}{\rm e}^{{\rm i}(2\omega_0-\nu)t}\right\} \tag{8.5.25}$$

式中 M, N 定义为

$$\begin{aligned} M &= \frac{\omega_0}{\lambda}\left[(\lambda-1)\,\delta + \lambda\delta_1 - \frac{\delta_0}{2}\right] \\ N &= \frac{\omega_0}{2\lambda}[\lambda(\lambda-2)\,\delta - 2\Delta\kappa] \end{aligned} \tag{8.5.26}$$

章动方程 (8.5.25) 右边第一项频率为 ν 的周期激励项的存在, 可使解中出现随时间不断增长的久期项. 为消除此久期项, 必须令上述非齐次项的系数为零, 导致以下微分方程

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}\tau}+(M+\mathrm{i}N)\,Z=0 \tag{8.5.27}$$

此方程确定章动振幅 Z 随 τ 的慢变规律

$$Z(\tau)=Z(0)\,\mathrm{e}^{-(M+\mathrm{i}N)\tau} \tag{8.5.28}$$

解的稳定性取决于实指数 M 的符号. $M>0$ 时 Z 按指数规律向零趋近. 此时章动运动在扭杆内摩擦和气体阻尼的共同作用下逐渐衰减而消失, 随后转子绕极轴匀速自转, 同时极轴按式 (8.5.28) 确定的规律在惯性空间中进动. 章动阻尼的时间常数 T_n 为 εM 的倒数, 即

$$T_n=\frac{C}{\lambda(D+D_1)-(D+0.5D_0)} \tag{8.5.29}$$

与进动的阻尼过程不同, 章动阻尼时间常数不仅取决于转子的极惯性矩 C 和阻尼系数 D, D_0, D_1, 而且与转子的赤道惯性矩 A 有关. 如 $M<0$, 则扭杆和气体的阻尼作用使章动振幅不断增长, 转子将逐渐倾覆.

引入符号 ρ, σ 表示各阻尼系数的相对比值

$$\rho=\frac{D_1}{D_0},\quad \sigma=\frac{D_0}{D} \tag{8.5.30}$$

则章动稳定性判据可写作

$$\lambda-1+(\lambda\rho-0.5)\,\sigma \begin{array}{ll} >0 & \text{渐进稳定} \\ <0 & \text{不稳定} \end{array} \tag{8.5.31}$$

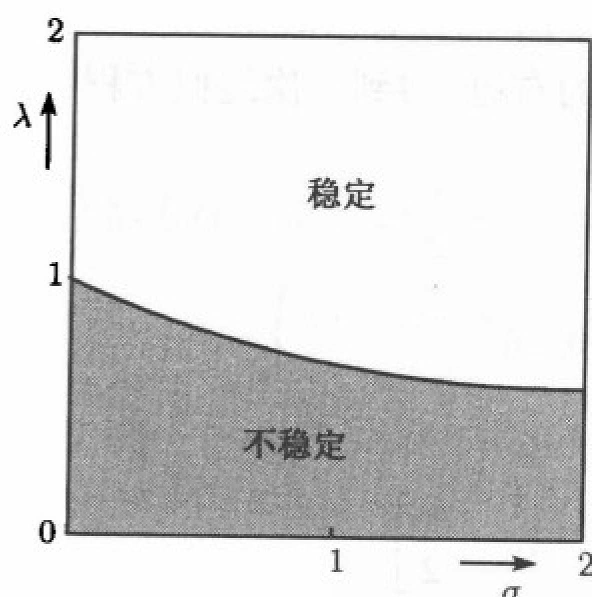


图 8.16　(σ,λ) 参数平面中的稳定域

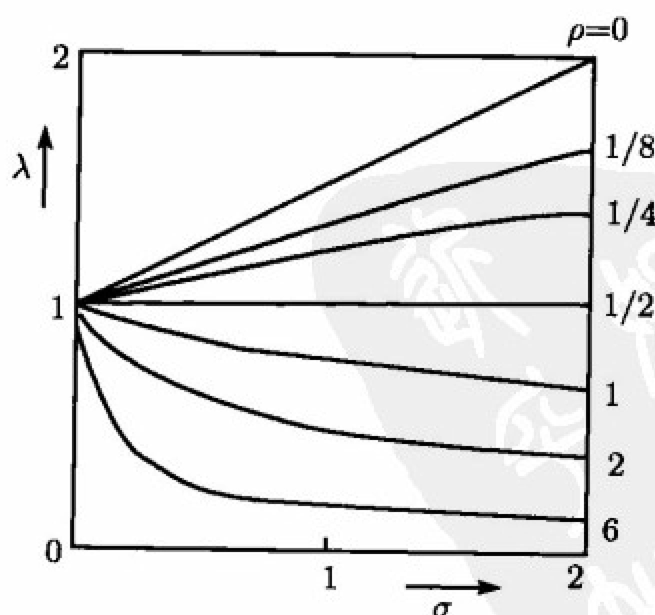


图 8.17　稳定域的边界曲线族

图 8.16 给出 $\rho=1$ 时 (σ,λ) 参数平面上按判据 (8.5.31) 划分的稳定域. 图 8.17 是以 ρ 为参变量的稳定域边界曲线族. 陀螺在真空中运转, 仅考虑扭杆的内阻尼时, $\sigma=\rho=0$, 条件 (8.5.31) 简化为

$$\lambda \begin{matrix} >1 \\ <1 \end{matrix} \quad 即 \quad \begin{matrix} C>A & 渐进稳定 \\ C<A & 不稳定 \end{matrix} \tag{8.5.32}$$

随着气体介质阻尼作用的增大, 稳定区也逐渐扩大, 参数 a 愈大稳定域的扩大愈显著.

章动方程 (8.5.25) 右边第三项为 $2\omega_0-\nu$ 频率的激励, 幅值与复数 $\bar{Z}$ 成正比. 此项激励随自由振动的衰减而消失. 陀螺仅受到第二项 $2\omega_0$ 频率的持续激励, 所激起的 $2\omega_0$ 频率受迫振动特解所描述的运动为不随时间衰减的持续章动

$$z_n=\varepsilon\left[\frac{2-\lambda_1-\mathrm{i}\delta_0}{4(\lambda-2)}\right]\omega_0^2\bar{z}_{\mathrm{p}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\omega_0 t} \tag{8.5.33}$$

其有量纲形式为

$$z_n=-\frac{\bar{z}_{\mathrm{p}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\omega_0 t}}{4\omega_0^2(2A-C)}\left[(2A_1-C_1)\omega_0^2-\mathrm{i}M_{\mathrm{m}}\right] \tag{8.5.34}$$

8.5.4 慢变过程与章动漂移

方程 (8.5.21) 左边第二项为确定 z_{p} 变化规律的进动方程, 其有量纲形式为

$$\frac{\mathrm{d}z_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}t}+\left(\frac{1}{T}+\frac{\mathrm{i}\Delta K}{H}\right)z_{\mathrm{p}}=0 \tag{8.5.35}$$

参数 T 和 ΔK 的定义见式 (8.3.24) 和 (8.3.30). 方程 (8.5.35) 存在指数函数解

$$z_{\mathrm{p}}=z_{\mathrm{p}}(0)\exp\left[-\left(\frac{1}{T}+\frac{\mathrm{i}\Delta K}{H}\right)t\right] \tag{8.5.36}$$

与进动理论中的式 (8.3.29a), (8.3.29b) 比较, 式 (8.5.36) 所确定的运动即调谐陀螺的进动规律.

讨论快变量 z_{n} 描述的章动对慢变量 z_{p} 描述的进动的影响时, 仅须考虑快变过程的平均效应. 为此将已解出的 z_{n} 的快变过程解 (8.5.34) 代入方程 (8.5.22) 的右项. 在每个振动周期 $T_{\mathrm{n}}=\pi/\omega_0$ 内平均化. 则陀螺的进动方程 (8.5.35) 的右边出现附加项, 变为

$$\frac{\mathrm{d}z_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}t}+\left\{\frac{1}{T}+\frac{\mathrm{i}\Delta K}{H}+\frac{\mathrm{i}}{H}\left[\frac{(2A_1-C_1)^2\omega_0^2+D_0^2}{8(2A-C)}\right]\right\}z_{\mathrm{p}}=0 \tag{8.5.37}$$

此方程的解确定二次近似的陀螺进动规律

$$z_{\mathrm{p}}=z_{\mathrm{p}}(0)\exp\left\{-\left(\frac{1}{T}+\frac{\mathrm{i}\Delta K}{H}\right)t-\frac{\mathrm{i}}{H}\left[\frac{(2A_1-C_1)^2\omega_0^2+D_0^2}{8(2A-C)}\right]t\right\} \tag{8.5.38}$$

增加的部分是由 $2\omega_0$ 频率受迫振动所引起的附加进动, 进动角速度即陀螺的漂移率, 其最大值记作 Ω_{d}, 即调谐陀螺的章动漂移率

$$\Omega_{\mathrm{d}}=|\dot{z}_{\mathrm{p}}(0)|=\left[\frac{(2A_1-C_1)^2\omega_0^2+D_0^2}{8H(2A-C)}\right]z_{\mathrm{p}}(0) \tag{8.5.39}$$

产生章动漂移现象的物理原因是转子做二倍旋转频率受迫振动时带动平衡环一同运动, 使平衡环产生附加惯性力矩, 此力矩受到扭摆运动相同频率的 "整流" 作用而形成常值平均力矩作用在转子上所引起. 它类似于 7.3.2 节中叙述的万向支架陀螺的章动漂移, 但不完全相同. 后者来源于频率为 ν 的自由振动, 漂移率是起始偏角及其导数的三阶微量, 其效果比上述调谐陀螺章动漂移微弱.

考虑上述章动漂移因素, 调谐条件应改为

$$K-\left(A_1-\frac{C_1}{2}\right)\omega_0^2+\frac{(2A_1-C_1)^2\omega_0^2+D_0^2}{8(2A-C)}=0 \tag{8.5.40}$$

一般情况下, 章动漂移附加项极小. 但如不恰当地使转子的固有频率接近 $2\omega_0$, 使 $2\omega_0$ 频率受迫振动的振幅急剧增大, 则章动漂移附加项亦随之增大.

对于多环调谐陀螺, 仅须将式 (8.5.34) 中的 $\omega_0 t$ 改为 $\omega_0 t+(j-1)\pi/n$, M_{m} 改为 $M_{\mathrm{m}j}$, 即适用于第 j 环. n 个平衡环同时作用时, 转子的受迫振动为各环单独作用的叠加

$$z_{\mathrm{n}}=-\frac{\bar{z}_{\mathrm{p}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\omega_0 t}}{4\omega_0^2(2A-C)}\sum_{j=1}^{n}\left[(2A_j-C_j)\omega_0^2-\mathrm{i}M_{mj}\right]\exp\left[\mathrm{i}2\pi\left(\frac{j-1}{n}\right)\right] \tag{8.5.41}$$

如果条件 (8.3.44) 满足, 上式表示的受迫振动亦抵消为零. 因此多环调谐陀螺不仅能消除载体二倍旋转频率角振动引起的受迫振动, 而且能同时消除由于受迫振动与平衡环扭摆运动耦合产生的章动漂移现象.

第9章　转子陀螺

陀螺仪的传统支承方式为万向支架的内外环装置. 随着对陀螺仪精度要求的不断提高, 为克服内外环轴承中的摩擦而采取的各种措施构成陀螺仪技术的发展史. 如利用液体浮力或气体润滑减小轴承压力, 形成液浮或气浮陀螺仪, 利用磁轴承代替滚珠轴承形成磁浮陀螺仪等. 但只要有轴承存在, 摩擦力就不可能完全消除. 而且内外环的惯性和弹性也是导致陀螺漂移的重要因素. 第 8 章讨论的挠性陀螺用扭杆代替轴承, 仍不能完全免除支承的弹性约束. 转子陀螺是仅由转子单独构成的陀螺仪. 初期的支承方案为尖点接触或球铰支承, 最理想的转子陀螺采用免除任何约束的无接触支承方式. 随着技术的发展, 这种支承方式已从理想转变为现实, 支承的动力来自静电场或磁场. 静电支承陀螺是已用于惯性导航系统的最高精度陀螺仪. 转子陀螺的力学模型是理想的绕定点转动刚体, 其理论分析不同于此前针对框架陀螺的进动理论和章动理论. 本章首先讨论接近球形的刚体转子受静电引力场作用的支承力和干扰力矩的计算. 引入适合描述转子陀螺运动的正则变量概念, 以代替传统使用的欧拉方程. 然后讨论转子陀螺的稳态运动和各种非稳态运动. 分析各种干扰引起的陀螺漂移以及转子陀螺特有的阻尼问题和跟踪问题.

9.1　转子陀螺的特点

无万向支架, 仅由转子单独构成的陀螺仪称为**转子陀螺**. 转子陀螺初期的支承方式为尖点接触 (图 9.1(a)) 或线接触 (图 9.1(b)), 1866 年的弗勒里埃陀螺地平仪就采用了尖点接触支承. 球铰支承为尖点接触的改进, 即利用气体或液体润滑膜将转子支承在球轴承上 (图 9.1(c)). 第 8 章中叙述的万向接头支承如忽略零件质量, 也可近似地视为球铰支承的转子陀螺 (图 9.1(d)). 无接触支承, 即利用静电场或磁场使球形转子悬浮在真空球腔内是转子陀螺最理想的支承方式 (图 9.1(e)). 静电支承的转子陀螺是目前实际应用的最高精度的陀螺仪.

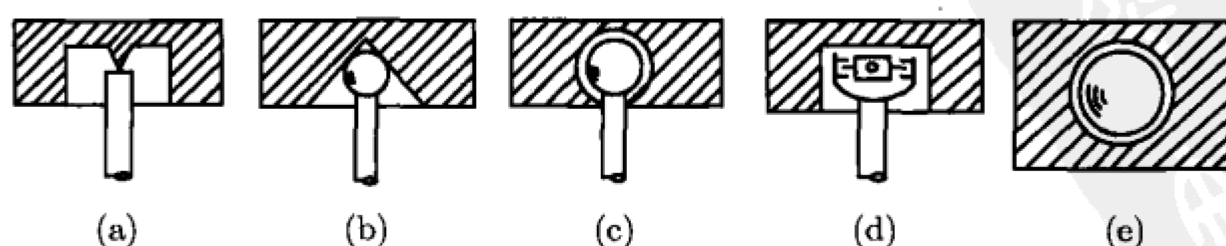


图 9.1　转子陀螺的各种支承方式

转子陀螺具有以下特点:

1) 力矩直接作用于转子而不须通过万向支架的力矩传递链, 不存在由于万向支架约束所引起的运动和动力学误差.

2) 驱动力矩不能保证与极轴方向一致. 驱动后的转子做复杂的定点运动, 必须依靠特殊的阻尼措施过渡为绕极轴旋转的稳态运动.

3) 转子无确定的旋转轴, 仅在绕极轴旋转的稳态运动状态下, 方有可能利用进动方程分析转子的运动. 一般情况下, 不能根据进动理论判断力矩对转子的作用效果.

4) 无约束转子的转动不受限制. 极轴偏转的幅度很大时不允许对动力学方程作线性化处理.

5) 静电场或磁场对球形转子的引力沿转子表面的法线, 对于理想球形转子不构成对球心的力矩. 转子表面对球面的偏离是导致干扰力矩发生的根本原因.

6) 理想状态下转子的质心与球心重合. 质心对球心的轴向偏移产生陀螺摆效应, 径向偏移迫使质心在垂直极轴的平面内做侧摆运动. 这种运动可被用于检测极轴的方位.

7) 如壳体持续对转子施加驱动力矩, 则出现转子跟踪壳体的特殊现象.

9.2　转子陀螺的支承力和干扰力矩

9.2.1　准球形转子的表面力和力矩

转子陀螺的支承力是由引力场对转子产生的表面力实现的. 理想的转子陀螺具有球形外表面, 但由于加工工艺误差和高速旋转时的离心变形, 转子陀螺的实际外形可能偏离球面. 将这种与球形有微小差别的转子称作**准球形转子**. 设准球形转子为相对极轴对称的旋转体, $(O-xyz)$ 为转子的以几何中心 O 为原点的主轴坐标系, z 轴为极轴, 基矢量为 $\boldsymbol{k}$. 转子表面任意点 P 在 $(O-xyz)$ 中的位置以相对 O 点的矢径 $\boldsymbol{r}$ 和球坐标 θ,ϕ,r 表示. 以 P 为原点建立与球坐标对应的坐标系 $(P-\theta\phi r)$, ϕ 轴和 r 轴分别沿 P 点的纬线和矢径方向 (见图 9.2). 再以子午线的切线、主法线和次法线为坐标轴, 建立 P 点处子午线的弗莱纳 (Frenet) 坐标系 $(P-t\phi n)$, 其中 t 轴和 n 轴分别为切线轴和主法线轴, 次法线轴 ϕ 与球坐标轴相同. 转子为理想球形时, $(P-t\phi n)$ 与 $(P-\theta\phi r)$ 完全重合. 准球形转子与球面稍有偏离, $(P-t\phi n)$ 相对 $(P-\theta\phi r)$ 在 P 点的子午面内绕 ϕ 轴转过微小角度 ε(见图 9.3). 以 $\boldsymbol{\theta}^0,\boldsymbol{\phi}^0,\boldsymbol{r}^0,\boldsymbol{t}^0,\boldsymbol{n}^0$ 表示各坐标轴的基矢量, 由于矢量 $\boldsymbol{r}^0\times\boldsymbol{n}^0$ 与 $\boldsymbol{r}^0\times\boldsymbol{k}$ 均沿纬线方向, 有

$$\frac{\boldsymbol{r}^0\times\boldsymbol{n}^0}{|\boldsymbol{r}^0\times\boldsymbol{n}^0|}=\frac{\boldsymbol{r}^0\times\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{r}^0\times\boldsymbol{k}|} \tag{9.2.1}$$

其中

$$\left|\boldsymbol{r}^0 \times \boldsymbol{n}^0\right| = \sin\varepsilon, \quad \left|\boldsymbol{r}^0 \times \boldsymbol{k}\right| = \sin\theta \tag{9.2.2}$$

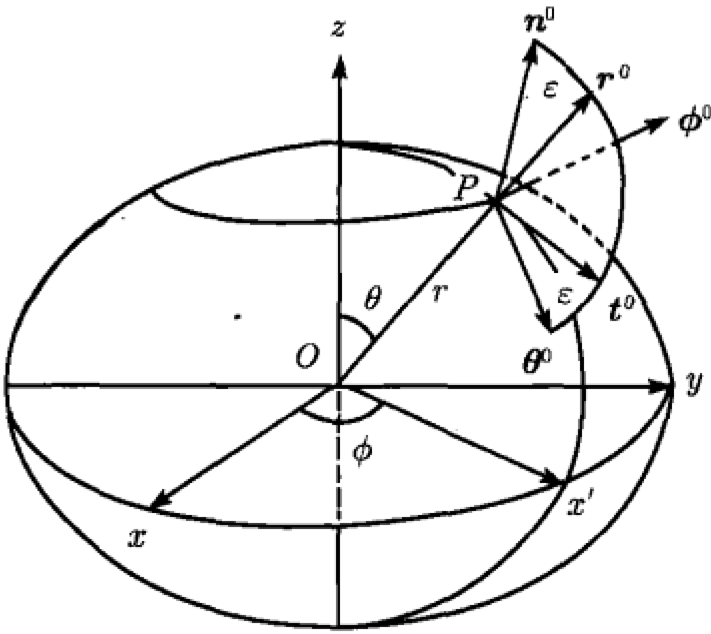


图 9.2　转子表面各点的球坐标

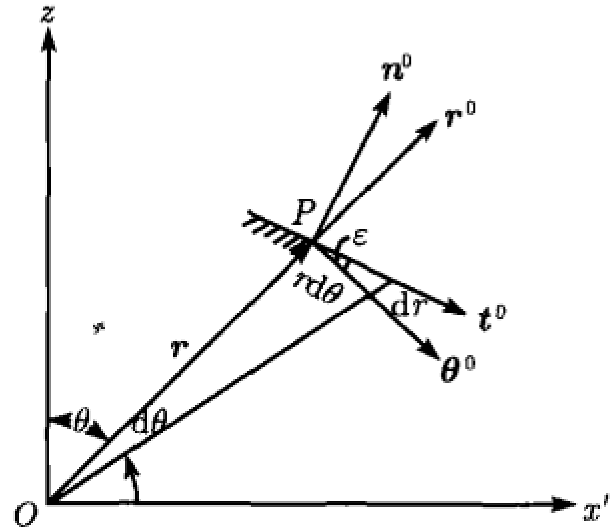


图 9.3　弗莱纳坐标轴相对球坐标轴的偏转

ε 极小时, $\sin\varepsilon$ 近似等于 $\tan\varepsilon = \mathrm{d}r/r\mathrm{d}\theta$, 导出

$$\boldsymbol{r}^0 \times \boldsymbol{n}^0 = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)\boldsymbol{r}^0 \times \boldsymbol{k} \tag{9.2.3}$$

设 $p(\theta,\phi)$ 为转子表面的支承力场强度, 沿曲面的法线方向, P 点处微元面积 $\mathrm{d}\sigma$ 上作用的支承力 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ 和对 O 点的力矩 $\mathrm{d}\boldsymbol{M}$ 分别为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = p\boldsymbol{n}^0\mathrm{d}\sigma, \quad \mathrm{d}\boldsymbol{M} = \left(r\boldsymbol{r}^0 \times p\boldsymbol{n}^0\right)\mathrm{d}\sigma \tag{9.2.4}$$

计算支承力 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ 时可忽略转子的非球形, 近似以 $\boldsymbol{r}^0$ 代替 $\boldsymbol{n}^0$. 力矩 $\mathrm{d}\boldsymbol{M}$ 中的 $\boldsymbol{r}^0\times\boldsymbol{n}^0$ 以式 (9.2.3) 代入, 得到

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = p\boldsymbol{r}^0\mathrm{d}\sigma \tag{9.2.5a}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{M} = \frac{p}{\sin\theta}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)\left(\boldsymbol{r}^0 \times \boldsymbol{k}\right)\mathrm{d}\sigma \tag{9.2.5b}$$

设腔体是以 O_0 为球心的理想球形, $(O_0-\xi\eta\zeta)$ 是以 O_0 为原点固结于球腔的参考坐标系, 以 $\boldsymbol{\xi}^0,\boldsymbol{\eta}^0,\boldsymbol{\zeta}^0$ 为基矢量. 将 $(O_0-\xi\eta\zeta)$ 的原点移至 O 点, 利用 1.1.4 节定义的卡尔丹角 α,β 表示 z 轴在 $(O-\xi\eta\zeta)$ 中的姿态 (见图 9.4). 转动次序为

$$(O-\xi\eta\zeta) \underset{\xi,x_0}{\overset{\alpha}{\longrightarrow}} (O-x_0y_0z_0) \underset{y_0,y}{\overset{\beta}{\longrightarrow}} (O-xyz)$$

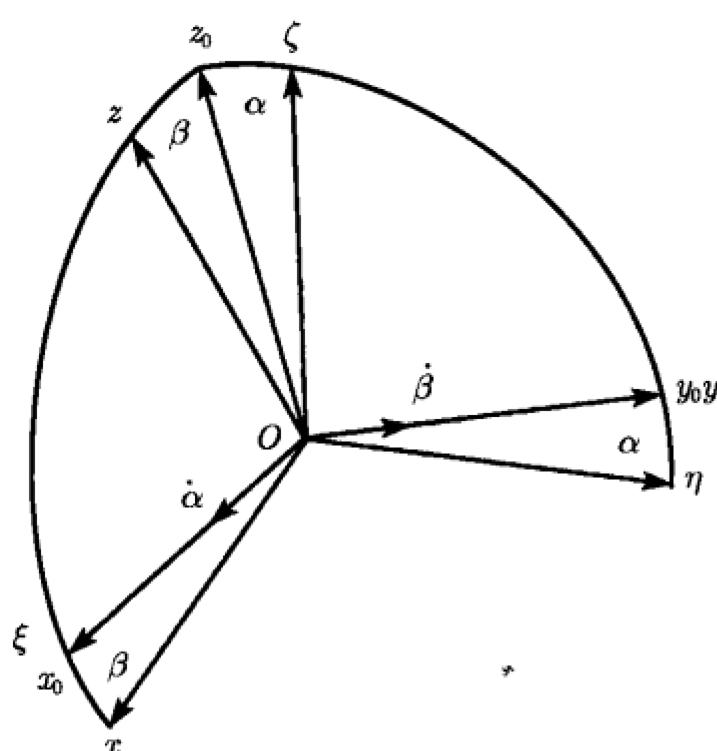


图 9.4　转子极轴相对球腔的卡尔丹角

z 轴的基矢量 $\boldsymbol{k}$ 在 $(O-\xi\eta\zeta)$ 中的投影式由矩阵 (1.1.18) 的第 3 列确定

$$\boldsymbol{k}=\sin\beta\boldsymbol{\xi}^0-\cos\beta\left(\sin\alpha\boldsymbol{\eta}^0-\cos\alpha\boldsymbol{\zeta}^0\right) \tag{9.2.6}$$

设 P 点在球腔坐标系 $(O-\xi\eta\zeta)$ 中的位置以球坐标 ϑ,φ,r 表示 (见图 9.5)①, 则矢径方向的基矢量 $\boldsymbol{r}^0$ 在 $(O-\xi\eta\zeta)$ 中的投影式为

$$\boldsymbol{r}^0=\sin\vartheta\left(\cos\varphi\boldsymbol{\xi}^0+\sin\varphi\boldsymbol{\eta}^0\right)+\cos\vartheta\boldsymbol{\zeta}^0 \tag{9.2.7}$$

将上式代入式 (9.2.5a), 在转子表面的支承力场 S 的范围内积分, 得到总支承力 $\boldsymbol{F}$ 在 $(O-\xi\eta\zeta)$ 中的投影

$$\left.\begin{aligned}F_\xi&=\iint\limits_{\mathrm{S}}p\sin\vartheta\cos\varphi\mathrm{d}\sigma\\F_\eta&=\iint\limits_{\mathrm{S}}p\sin\vartheta\sin\varphi\mathrm{d}\sigma\\F_\zeta&=\iint\limits_{\mathrm{S}}p\cos\vartheta\mathrm{d}\sigma\end{aligned}\right\} \tag{9.2.8}$$

转子表面 S 的几何形状由函数 $r(\theta)$ 确定 (见图 9.6), 将 $r(\theta)$ 展成 θ 的余弦级数, 得到

$$r(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos n\theta \tag{9.2.9}$$

---

① P 点在球腔坐标系 $(O_0-\xi\eta\zeta)$ 中的球坐标以 ϑ,φ,r 表示, 区别于在转子坐标系 $(O-xyz)$ 中的球坐标 θ,ϕ,r.

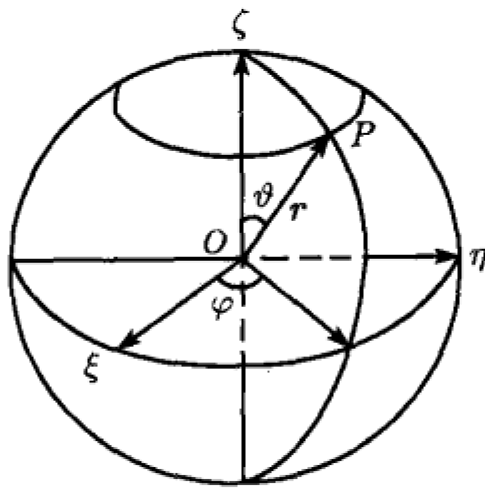


图 9.5　P 点相对球腔的球坐标

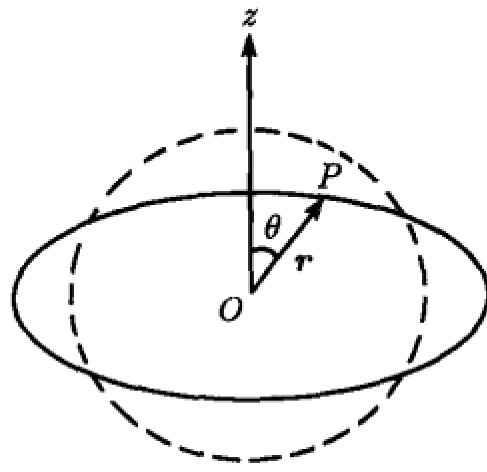


图 9.6　转子表面的几何形状

在级数的各次谐波中, 一次谐波对应于转子沿极轴方向的刚体位移, 二次谐波由转子的离心变形引起, 三次以上的谐波来源于加工工艺误差. 若仅考虑影响较大的离心变形, 式 (9.2.8) 简化为

$$r(\theta) = r_0 + a\cos 2\theta \tag{9.2.10}$$

其中 r_0 为变形前的转子半径, a 为最大离心变形. 将式 (9.2.6), (9.2.7), (9.2.10) 代入式 (9.2.5b), 在支承力场 S 的范围内积分, 得到转子的表面力对 O 点的合力矩在 $(O-\xi\eta\zeta)$ 中的投影

$$M_\xi = -4a\iint\limits_{\mathrm{S}} p\gamma\cos\beta\,(\sin\alpha\cos\vartheta + \cos\alpha\sin\vartheta\sin\varphi)\mathrm{d}\sigma \tag{9.2.11a}$$

$$M_\eta = 4a\iint\limits_{\mathrm{S}} p\gamma\,(\cos\alpha\cos\beta\sin\vartheta\cos\varphi - \sin\beta\cos\vartheta)\mathrm{d}\sigma \tag{9.2.11b}$$

$$M_\zeta = 4a\iint\limits_{\mathrm{S}} p\gamma\sin\vartheta\,(\sin\beta\sin\varphi + \sin\alpha\cos\beta\cos\varphi)\mathrm{d}\sigma \tag{9.2.11c}$$

其中 $\gamma = \cos\theta$ 为 r 轴与 z 轴之间的方向余弦

$$\gamma = \boldsymbol{r}^0\cdot\boldsymbol{k} = \sin\vartheta\,(\sin\beta\cos\varphi - \sin\alpha\cos\beta\sin\varphi) + \cos\alpha\cos\beta\cos\vartheta \tag{9.2.12}$$

支承力场强度 p 随球面上各点的位置变化, 可写作 $\alpha, \beta, \vartheta, \varphi$ 的函数. 其变化规律确定以后, 代入式 (9.2.8) 和 (9.2.11), 以 ϑ, φ 为积分变量, 积分得到的合力和合力矩为 α 和 β 的函数. 从而确定准球形转子的支承力和干扰力矩与极轴相对球腔位置之间的对应关系.

9.2.2　静电支承的控制规律

利用静电场引力支承的转子陀螺称为**静电陀螺**, 由悬浮在金属球腔内的薄壁或实心金属球形转子构成. 球腔作为正多面体的外接球面划分为相互绝缘的金属

电极, 如正六面体或正八面体. 以正六面体电极为例, 共有 6 块电极, 记作 $S_i(i=1,2,\cdots,6)$, 其中沿 ζ 轴的一对电极记作 $S_{1,2}$. 正六面体的电极坐标系 $(O_0-\xi\eta\zeta)$ 的各坐标轴指向各电极的几何中心 (见图 9.7, S_4 在图背面). 转子依靠与电极之间的静电引力悬浮在腔体的中央.

设转子几何中心 O 相对 O_0 的位移为 $\boldsymbol{e}$, 在 $(O-\xi\eta\zeta)$ 中的投影式为

$$\boldsymbol{e}=e_1\boldsymbol{\xi}^0+e_2\boldsymbol{\eta}^0+e_3\boldsymbol{\zeta}^0 \tag{9.2.13}$$

将转子表面任意点 P 相对 O 点的矢径 $\boldsymbol{r}$ 延长与腔体表面交于 Q 点, 将 P 至 Q 点的长度定义为 P 点处转子与腔体的间隙, 以 h 表示. 设 $\boldsymbol{R}$ 为 Q 点相对 O_0 的矢径, 根据图 9.8 可看出

$$h=(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}-\boldsymbol{e})\cdot\boldsymbol{r}^0 \tag{9.2.14}$$

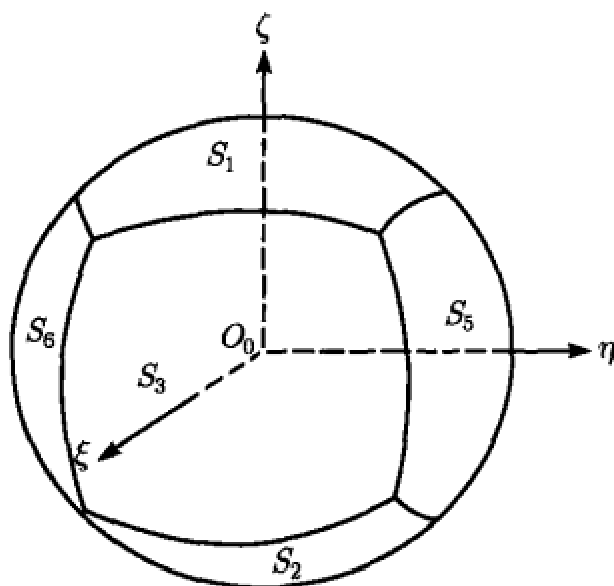


图 9.7　正六面体电极

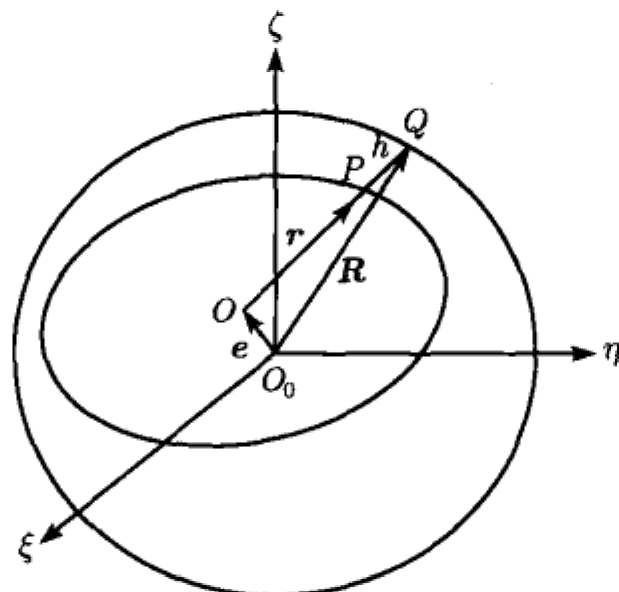


图 9.8　电极腔体中的准球形转子

转子位移极小时, 可近似认为 $\boldsymbol{R}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 方向一致. 将 (9.2.7), (9.2.10), (9.2.13) 等式代入上式, 导出

$$h=R-r_0-a\left(2\gamma^2-1\right)-(e_1\cos\varphi+e_2\sin\varphi)\sin\vartheta-e_3\cos\vartheta \tag{9.2.15}$$

令 $h_0=R-r_0$ 为转子的居中状态, 即无位移和变形时的间隙值, 定义以下量纲为一的量

$$\delta=\frac{a}{h_0},\quad \varepsilon_i=\frac{e_i}{h_0}\quad (i=1,2,3) \tag{9.2.16}$$

将式 (9.2.15) 改写为

$$h=h_0\left[1-\delta\left(2\gamma^2-1\right)-(\varepsilon_1\cos\varphi+\varepsilon_2\sin\varphi)\sin\vartheta-\varepsilon_3\cos\vartheta\right] \tag{9.2.17}$$

金属转子与 6 块电极构成 6 个球面电容器, 二者之间的静电引力取决于电容器的电压. 设第 j 块电极 S_j 与转子之间的电压为 V_j, 介电常数为 ε_0, 近似利用平板电容器公式描述球面电容器的静电引力, 导出电极 S_j 的支承力场强度 p_j

$$p_j = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{V_j}{h}\right)^2 \tag{9.2.18}$$

由于 p_j 与间隙 h 的平方成反比, 静电引力随间隙的减小而增大, 因此转子在电极腔内不可能有稳定的平衡状态存在. 转子的稳定悬浮状态必须依靠支承控制系统保证. 此支承系统随间隙的变化调整电极的电压, 使静电引力随间隙的减小而减小. 方能使静电支承具备与机械弹簧相同的功能.

设电极 S_j 的电容为 C_j, 其计算公式为

$$C_j = \iint\limits_{\mathrm{S}_j} \frac{\mathrm{d}\sigma}{4\pi h} \tag{9.2.19}$$

将间隙变化规律 (9.2.17) 代入上式, 只保留 δ, ε_i 的一阶微量, 导出

$$C_j = C_0\left[1 + \frac{1}{S_0}\iint\limits_{\mathrm{S}_j} E(\alpha, \beta, \vartheta, \varphi)\mathrm{d}\sigma\right] \tag{9.2.20}$$

其中 C_0 为转子居中状态的电极电容. 设 S_0 为电极面积, p_0 为转子居中时的引力场强度, 则有

$$C_0 = \frac{S_0}{4\pi h_0}, \quad p_0 = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{V_0}{h_0}\right)^2 \tag{9.2.21}$$

式 (9.2.20) 中的被积函数定义为

$$E = \delta\left(2\gamma^2 - 1\right) + (\varepsilon_1\cos\varphi + \varepsilon_2\sin\varphi)\sin\vartheta + \varepsilon_3\cos\vartheta \tag{9.2.22}$$

将检测到的电容变化 $\Delta C_j = C_j - C_0$ 输入控制系统, 产生电压增量 ΔV_j, 控制规律为

$$\frac{\Delta V_j}{V_0} = -k\left(\frac{\Delta C_j}{C_0}\right) = -\frac{k}{S_0}\left(\iint\limits_{\mathrm{S}_j} E(\alpha, \beta, \vartheta, \varphi)\,\mathrm{d}\sigma\right) \tag{9.2.23}$$

其中 k 为控制系统的放大系数. 以电极 $S_{1,2}$ 为例, 图 9.9 为控制系统的示意图, 其中 $\Delta C_{1,2} = \pm\Delta C$, $\Delta V_{1,2} = \mp\Delta V$. 利用上述电压值计算引力场强度 p, 再代入式 (9.2.8) 和 (9.2.11), 即得到引力的合力和对 O 点的合力矩.

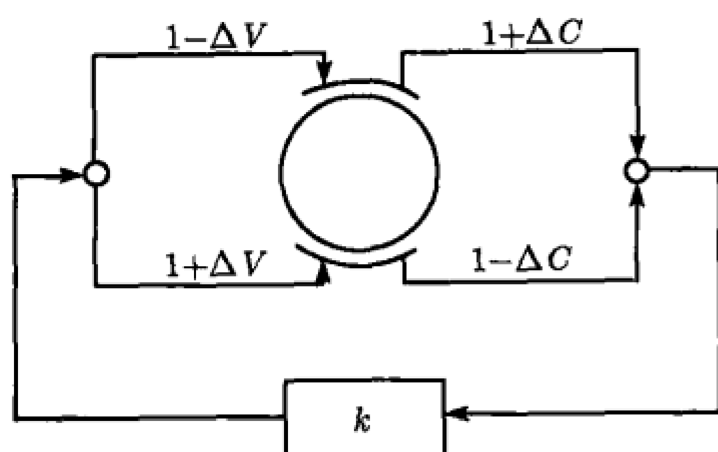


图 9.9　支承控制系统

9.2.3　静电支承刚度

将式 (9.2.17), (9.2.23) 代入式 (9.2.18) 计算各电极的引力场强度, 得到

$$p_j = p_0\,(1+2E)\left(1-\frac{2k}{S_0}\iint\limits_{S_j} E\mathrm{d}\sigma\right) \quad (j=1,2,\cdots,6) \tag{9.2.24}$$

代入式 (9.2.8) 计算各电极的支承力, 相加后得到总支承力

$$\begin{aligned} F_\xi &= p_0\sum_{j=1}^{6}\left(\frac{V_j}{V_0}\right)^2\iint\limits_{S_j}(1+2E)\sin\vartheta\cos\varphi\mathrm{d}\sigma \\ F_\eta &= p_0\sum_{j=1}^{6}\left(\frac{V_j}{V_0}\right)^2\iint\limits_{S_j}(1+2E)\sin\vartheta\sin\varphi\mathrm{d}\sigma \\ F_\zeta &= p_0\sum_{j=1}^{6}\left(\frac{V_j}{V_0}\right)^2\iint\limits_{S_j}(1+2E)\cos\vartheta\mathrm{d}\sigma \end{aligned} \tag{9.2.25}$$

将式 (9.2.23) 代入上式, 忽略转子非球形对支承力的微小影响, 令 $\delta=0$, 积分得到①

$$\boldsymbol{F} = -K\boldsymbol{e} \tag{9.2.26}$$

其中 K 为静电支承的刚度系数

$$K = 2.76\,(k-1.45)\left(\frac{p_0 S_0}{h_0}\right) \tag{9.2.27}$$

① 一般情况下电极范围内的曲面积分应采用数值方法, 此处引用文献 [31] 中用近似解析方法得出的积分结果.

9.2.4　静电场干扰力矩

9.2.1 节中已说明, 理想球形转子由于沿表面法线方向的静电引力均通过球心, 不构成对球心的力矩. 因此转子对球形的偏离是产生静电场干扰力矩的根本原因. 设转子的质心与几何中心 O 重合, 将式 (9.2.24) 代入 (9.2.11) 式计算引力对 O 点的合力矩, 保留 δ, ε_i 的二阶微量, 相加后得到

$$\begin{aligned}
M_\xi &= -4\delta p_0 h_0 \sum_{j=1}^{6} \left(\frac{V_j}{V_0}\right)^2 \iint_{S_j} \gamma(1+2E)(\sin\alpha\cos\vartheta + \cos\alpha\sin\vartheta\sin\varphi)\cos\beta \mathrm{d}\sigma \\
M_\eta &= 4\delta p_0 h_0 \sum_{j=1}^{6} \left(\frac{V_j}{V_0}\right)^2 \iint_{S_j} \gamma(1+2E)(\cos\alpha\cos\beta\sin\vartheta\cos\varphi - \sin\beta\cos\vartheta) \mathrm{d}\sigma \\
M_\zeta &= 4\delta p_0 h_0 \sum_{j=1}^{6} \left(\frac{V_j}{V_0}\right)^2 \iint_{S_j} \gamma(1+2E)(\sin\beta\sin\varphi + \sin\alpha\cos\beta\cos\varphi)\sin\vartheta \mathrm{d}\sigma
\end{aligned} \tag{9.2.28}$$

将式 (9.2.23) 代入上式, 仅考虑转子离心变形引起的非球形, 令 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$, 从上式积分得到

$$\begin{aligned}
M_\xi &= 2.42a^2 \left(\frac{p_0 S_0}{h_0}\right) \sin 4\alpha \cos^4\beta \\
M_\eta &= 4.84a^2 \left(\frac{p_0 S_0}{h_0}\right) \left(\cos^2\alpha\cos^2\beta - \sin^2\beta\right) \cos\alpha \sin 2\beta \\
M_\zeta &= 4.84a^2 \left(\frac{p_0 S_0}{h_0}\right) \left(\cos^2\alpha\cos^2\beta - \sin^2\beta\right) \sin\alpha \sin 2\beta
\end{aligned} \tag{9.2.29}$$

变换到 $(O-xyz)$ 坐标系, 得到

$$\begin{aligned}
M_x &= 2.42a^2 \left(\frac{p_0 S_0}{h_0}\right) \sin 4\alpha \cos^3\beta \\
M_y &= 4.84a^2 \left(\frac{p_0 S_0}{h_0}\right) \left[\left(\cos^4\alpha + \sin^4\alpha\right)\cos^2\beta - \sin^2\beta\right] \sin 2\beta \\
M_z &= 0
\end{aligned} \tag{9.2.30}$$

其中 M_x, M_y 是引起陀螺漂移的静电场干扰力矩, 与转子最大离心变形 a 的平方成比例.

9.2.5　电极误差引起的附加力矩

静电陀螺的电极为两个半球腔的组合, 在装配过程中可能出现错位或高度误差, 对电极-转子间隙产生影响, 形成附加的静电场干扰力矩. 分别讨论如下:

1) 电极错位误差

设两个半球电极的球心 O' 和 O'' 沿 η 轴朝相反方向有 $\varDelta_\eta$ 距离的错位 (见图 9.10), 使上下电极与转子的间隙改变为

$$h', h'' = h_0 (1 \pm \delta_\eta \sin\vartheta \sin\varphi) \tag{9.2.31}$$

其中 h', h'' 分别为上半球和下半球与转子的间隙, h_0 为无电极错位时转子居中的间隙值, δ_η 为 $\varDelta_\eta$ 的量纲为一的参数

$$\delta_\eta = \frac{\varDelta_\eta}{h_0} \tag{9.2.32}$$

代入式 (9.2.19) 计算积分增量, 得到

$$\Delta C_j', \Delta C_j'' = \mp \frac{C_0}{S_0} \iint\limits_{S_j} \delta_\eta \sin\vartheta \sin\varphi \mathrm{d}\sigma \tag{9.2.33}$$

以分属上半球和下半球的电极 1 和电极 2 为例, 其积分值为零, 对电极电压的影响可予忽略. 将力矩公式 (9.2.28) 中的函数 E 以 $\pm\delta_\eta \sin\vartheta \sin\varphi$ 代替, 可计算间隙变化引起的静电场干扰力矩附加项. 仍以电极 1、2 为例, 导出

$$\begin{aligned}
(\Delta M_{1,2})_\xi &= \pm 4\delta p_0 h_0 \left(\frac{V_{1,2}}{V_0}\right)^2 \iint\limits_{S_{1,2}} 2\gamma\delta_\eta \sin\vartheta \sin\varphi (\sin\alpha\cos\vartheta + \cos\alpha\sin\vartheta\sin\varphi)\cos\beta \mathrm{d}\sigma \\
(\Delta M_{1,2})_\eta &= \mp 4\delta p_0 h_0 \left(\frac{V_{1,2}}{V_0}\right)^2 \iint\limits_{S_{1,2}} 2\gamma\delta_\eta \sin\vartheta \sin\varphi (\cos\alpha\cos\beta\sin\vartheta\cos\varphi - \sin\beta\cos\vartheta) \mathrm{d}\sigma \\
(\Delta M_{1,2})_\zeta &= \mp 4\delta p_0 h_0 \left(\frac{V_{1,2}}{V_0}\right)^2 \iint\limits_{S_{1,2}} 2\gamma\delta_\eta \sin\vartheta \sin\varphi (\sin\beta\sin\varphi + \sin\alpha\cos\beta\cos\varphi)\sin\vartheta \mathrm{d}\sigma
\end{aligned} \tag{9.2.34}$$

其他电极被上下半球一分为二, 力矩附加项为被分割两部分的力矩积分之和.

2) 电极半球高误差

设两个半球电极的球心 O' 和 O'' 沿 ζ 轴距分割面的高度产生 $\varDelta_\zeta'$ 和 $\varDelta_\zeta''$ 误差 (见图 9.11), 间隙变化规律变为

$$\begin{aligned}
h' &= h_0 \left(1 + \delta_\zeta' \cos\vartheta\right) \\
h'' &= h_0 \left(1 - \delta_\zeta'' \cos\vartheta\right)
\end{aligned} \tag{9.2.35}$$

其中 δ_ζ', δ_ζ'' 为 $\varDelta_\zeta'$, $\varDelta_\zeta''$ 的量纲为一的参数

$$\delta_\zeta' = \frac{\varDelta_\zeta'}{h_0}, \quad \delta_\zeta'' = \frac{\varDelta_\zeta''}{h_0} \tag{9.2.36}$$

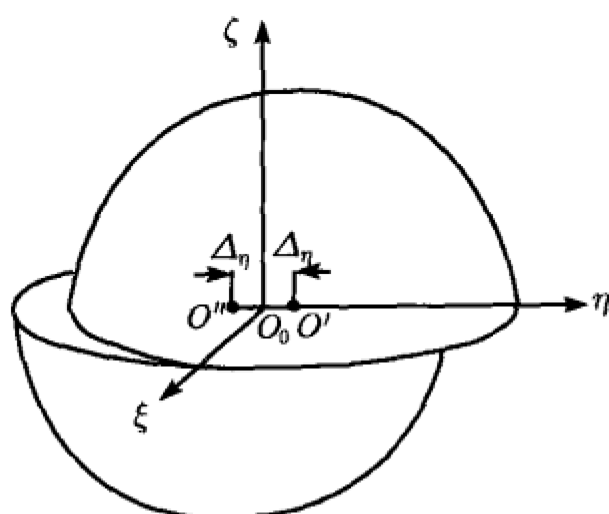


图 9.10　电极错位误差

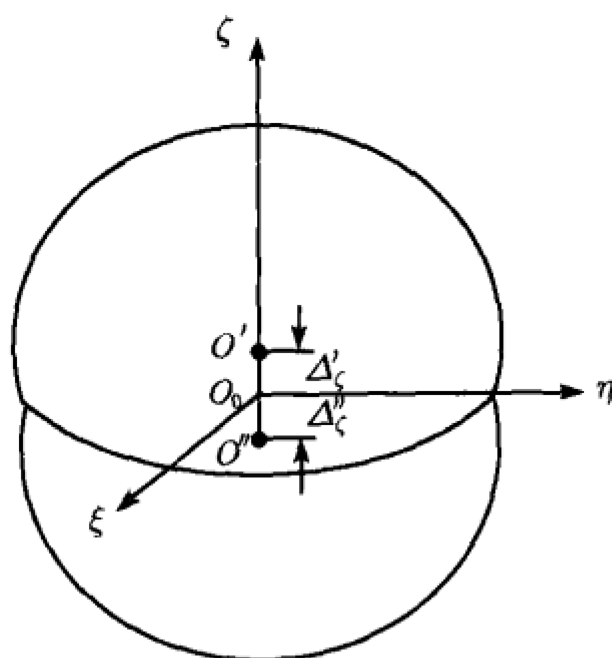


图 9.11　电极半球高误差

代入式 (9.2.19) 计算积分增量, 以电极 1 和电极 2 为例, 得出

$$\begin{aligned}\Delta C_1 &= -\frac{C_0}{S_0}\iint\limits_{S_1}\delta'_\zeta\cos\vartheta\mathrm{d}\sigma \approx -0.83\delta'_\zeta \quad (i=1,2)\\ \Delta C_2 &= \frac{C_0}{S_0}\iint\limits_{S_2}\delta''_\zeta\cos\vartheta\mathrm{d}\sigma \approx -0.83\delta''_\zeta \quad (i=1,2)\end{aligned} \tag{9.2.37}$$

半球高正误差使电极 1、2 的间隙增大, 电容随之减小. 反之, 负误差使间隙减小, 电容增大. 一般情况下, 电极高度误差对电容的影响导致电极电压的变化. 将力矩公式 (9.2.28) 中的函数 E 以 $\delta'_\zeta\cos\vartheta$ 或 $\delta''_\zeta\cos\vartheta$ 代替, 且考虑由于电容变化对电极电压的影响, 可导出电极 1、2 的静电场干扰力矩附加项. 其余电极的力矩附加项为被分割两部分的力矩积分之和.

9.3　刚体定点运动的状态变量描述

9.3.1　状态变量方程组

欧拉方程并非描述刚体绕定点运动的唯一数学形式. 法国数学家塞莱 (J.A. Serret) 和安道耶 (H.Andoyer) 分别于 1866 年和 1923 年提出, 在刚体坐标系和惯性坐标系之间建立与动量矩矢量相关联的坐标系, 刚体的姿态由刚体相对动量矩坐标系的角度坐标和动量矩矢量相对惯性坐标系的角度坐标表示. 所定义的角度坐标与动量矩模组成描述刚体运动状态的**状态变量**[1]. 塞莱–安道耶定义的状态变量

① 关于状态变量的更普遍定义在第 13 章的 13.1.2 节中给出.

用于受微弱力矩作用的刚体或高速旋转刚体, 可使分析过程明显简化. 如 1967 年德普里 (A. Deprit) 利用状态变量将欧拉情形刚体定点运动简化为单自由度保守系统. 状态变量在工程中的应用始于 1938 年布尔加可夫对陀螺仪运动的分析. 1965 年别列斯基 (V. V. Beletsky) 利用状态变量分析航天器绕质心的转动.

设轴对称刚体绕固定点 O 运动. 以 O 为原点建立惯性坐标系 $(O-\xi\eta\zeta)$ 和动量矩坐标系 $(O-XYZ)$, 后者以刚体相对 O 点的动量矩矢量 $\boldsymbol{H}$ 的方向为 Z 轴. 设 $(O-\xi\eta\zeta)$ 绕 ξ 轴转动 α 角后的位置为 $(O-\xi_1\eta_1\zeta_1)$, 再绕 η_1 轴转动 β 角后的位置为 $(O-XYZ)$. α,β 为动量矩矢量 $\boldsymbol{H}$ 相对 $(O-\xi\eta\zeta)$ 位置的角度坐标 (图 9.12). 坐标系之间的关系为

$$(O-\xi\eta\zeta)\ \underset{\xi,\xi_1}{\overset{\alpha}{\longrightarrow}}\ (O-\xi_1\eta_1\zeta_1)\ \underset{\eta_1,Y}{\overset{\beta}{\longrightarrow}}\ (O-XYZ)$$

$(O-XYZ)$ 相对 $(O-\xi\eta\zeta)$ 的方向余弦矩阵与式 (3.2.2) 相同

$$\boldsymbol{C}_\xi^X=\begin{pmatrix}\cos\beta & 0 & \sin\beta\\ \sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha & -\sin\alpha\cos\beta\\ -\cos\alpha\sin\beta & \sin\alpha & \cos\alpha\cos\beta\end{pmatrix}\tag{9.3.1}$$

刚体相对 O 点的动量矩矢量 $\boldsymbol{H}$ 记为

$$\boldsymbol{H}=H\boldsymbol{Z}^0\tag{9.3.2}$$

$\boldsymbol{H}$ 改变方位时 $(O-XYZ)$ 坐标系随之转动, 其角速度记为 $\boldsymbol{\omega}_H$

$$\boldsymbol{\omega}_H=\dot{\alpha}\cos\beta\boldsymbol{X}^0+\dot{\beta}\boldsymbol{Y}^0+\dot{\alpha}\sin\beta\boldsymbol{Z}^0\tag{9.3.3}$$

设刚体上作用的相对 O 点的合力矩 $\boldsymbol{M}$ 对 $(O-XYZ)$ 轴系的投影式为

$$\boldsymbol{M}=M_X\boldsymbol{X}^0+M_Y\boldsymbol{Y}^0+M_Z\boldsymbol{Z}^0\tag{9.3.4}$$

将 (9.3.2), (9.3.3), (9.3.4) 各式代入动量矩定理 (2.2.23), 得到以下方程

$$H\dot{\beta}=M_X\tag{9.3.5a}$$

$$-H\dot{\alpha}\cos\beta=M_Y\tag{9.3.5b}$$

$$\dot{H}=M_Z\tag{9.3.5c}$$

将轴对称刚体相对动量矩坐标系 $(O-XYZ)$ 的姿态用欧拉角 ψ,ϑ,φ 表示. 设

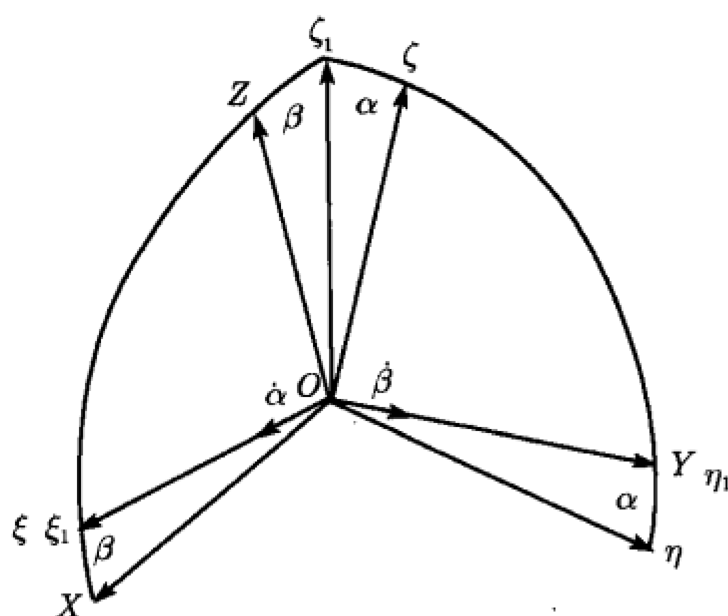


图 9.12　确定动量矩矢量位置的角度坐标

$(O-XYZ)$ 先绕 Z 轴转动 ψ 角到达 $(O-X_1Y_1Z_1)$ 位置, 然后绕 X_1 轴转动 ϑ 角为莱查坐标系 $(O-xyz)$ 位置, z 轴为极轴, 最后绕 z 轴转动 φ 角到达与刚体固结的 $(O-x_{\mathrm{R}}y_{\mathrm{R}}z_{\mathrm{R}})$ 位置 (图 9.13). 各坐标系之间的关系为

$$(O-XYZ) \underset{Z,Z_1}{\overset{\psi}{\rightarrow}} (O-X_1Y_1Z_1) \underset{X_1,x}{\overset{\vartheta}{\rightarrow}} (O-xyz) \underset{z,z_{\mathrm{R}}}{\overset{\varphi}{\rightarrow}} (O-x_{\mathrm{R}}y_{\mathrm{R}}z_{\mathrm{R}})$$

$(O-xyz)$ 相对 $(O-XYZ)$ 的方向余弦矩阵与式 (1.1.14) 相同

$$\boldsymbol{C}_X^x = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\cos\vartheta\sin\psi & \sin\vartheta\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\vartheta\cos\psi & -\sin\vartheta\cos\psi \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \tag{9.3.6}$$

利用上式将动量矩矢量 $\boldsymbol{H}$ 变换到 $(O-xyz)$ 轴系, 得到

$$\boldsymbol{H} = H(\sin\vartheta\boldsymbol{j} + \cos\vartheta\boldsymbol{k}) \tag{9.3.7}$$

设 A, C 为刚体相对 O 点的赤道惯性矩和极惯性矩, 动量矩 $\boldsymbol{H}$ 可表示为

$$\boldsymbol{H} = A(\omega_x\boldsymbol{i} + \omega_y\boldsymbol{j}) + C\omega_z\boldsymbol{k} \tag{9.3.8}$$

式中 ω_x, ω_y, ω_z 为刚体的绝对角速度 $\boldsymbol{\omega}$, 即刚体在 $(O-XYZ)$ 中的相对角速度与 $(O-XYZ)$ 的牵连角速度 ω_H 之和, 在主轴坐标系 $(O-xyz)$ 中的投影. 导出

$$\omega_x = \dot{\vartheta} + \dot{\alpha}\cos\beta\cos\psi + \dot{\beta}\sin\psi$$

$$\omega_y = \dot{\psi}\sin\vartheta + \dot{\alpha}\left(\sin\beta\sin\vartheta - \cos\beta\cos\vartheta\sin\psi\right) + \dot{\beta}\cos\vartheta\cos\psi$$
$$\omega_z = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\vartheta + \dot{\alpha}\left(\sin\beta\cos\vartheta + \cos\beta\sin\vartheta\sin\psi\right) - \dot{\beta}\sin\vartheta\cos\psi \qquad (9.3.9)$$

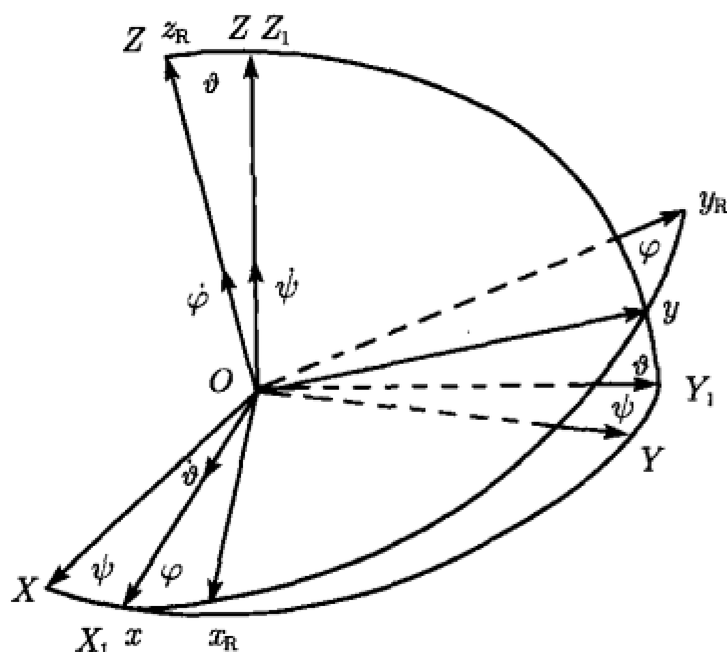


图 9.13　刚体相对动量矩坐标系的欧拉角

令式 (9.3.8) 与式 (9.3.7) 的各投影一一相等, 将式 (9.3.9) 代入后导出以下方程

$$\dot{\vartheta} + \dot{\alpha}\cos\beta\cos\psi + \dot{\beta}\sin\psi = 0 \qquad (9.3.10a)$$
$$\dot{\psi}\sin\vartheta + \dot{\alpha}\left(\sin\beta\sin\vartheta - \cos\beta\cos\vartheta\sin\psi\right) + \dot{\beta}\cos\vartheta\cos\psi = \left(\frac{H}{A}\right)\sin\vartheta \qquad (9.3.10b)$$
$$\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\vartheta + \dot{\alpha}\left(\sin\beta\cos\vartheta + \cos\beta\sin\vartheta\sin\psi\right) - \dot{\beta}\sin\vartheta\cos\psi = \left(\frac{H}{C}\right)\cos\vartheta \qquad (9.3.10c)$$

将动量矩的模 H 和角度坐标 $\alpha, \beta, \psi, \vartheta, \varphi$ 做为确定刚体运动状态的六维相空间中的**状态变量**①. 6 个状态变量中只有 3 个独立变量, 式 (9.3.10) 可看作是限制状态变量的 3 个非完整约束条件.

将式 (8.3.5) 代入 (8.3.10) 各式, 解出 $\dot{\psi}, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}$ 后与式 (8.3.5) 联立, 得到的一阶方程组称为轴对称刚体的**状态变量方程组**

$$\dot{H} = M_Z \qquad (9.3.11a)$$
$$\dot{\alpha} = -\frac{M_Y}{H\cos\beta} \qquad (9.3.11b)$$
$$\dot{\beta} = \frac{M_X}{H} \qquad (9.3.11c)$$
$$\dot{\vartheta} = -\frac{1}{H}\left(M_X\sin\psi - M_Y\cos\psi\right) \qquad (9.3.11d)$$

① 此处定义的状态变量与塞莱–安道耶变量的定义均基于动量矩坐标系. 但为适应本节分析转子陀螺动力学问题的需要, 上述状态变量与塞莱–安道耶变量的原始定义略有区别. 详见文献 [44] 中的说明.

$$\dot{\psi} = \nu - \frac{1}{H}\left[M_X \cot\vartheta \cos\psi + M_Y \left(\cot\vartheta \sin\psi - \tan\beta\right)\right] \tag{9.3.11e}$$

$$\dot{\varphi} = n + \frac{1}{H\sin\vartheta}\left(M_X \cos\psi + M_Y \sin\psi\right) \tag{9.3.11f}$$

其中常数 ν 和 n 定义如式 (2.3.15) 和 (2.3.31)

$$\nu = \frac{H}{A}, \quad n = -\frac{\nu}{\lambda}(\lambda - 1)\cos\vartheta \tag{9.3.12}$$

$\lambda = C/A$ 为刚体的惯性矩比. 角度坐标 β 和 ϑ 存在奇异位置 $\beta_s = \pi/2$ 和 $\vartheta_s = 0$, 在此位置上方程 (9.3.11b) 和 (9.3.11f) 无意义, 必须另行选择新的角度坐标.

第 2 章中为讨论欧拉情形刚体定点运动而建立的方程组 (2.3.16) 可视为非轴对称刚体在无力矩条件下的状态变量方程组.

9.3.2 拟自由规则进动

免除一切力矩作用的刚体, 即欧拉情形刚体, 其定点运动规律已在 2.3 节中作了充分讨论. 令状态变量方程组 (9.3.11) 中的力矩项 M_X, M_Y, M_Z 为零, 得到状态变量 H, α, β, ϑ, $\dot{\psi}$, $\dot{\varphi}$ 的常值特解

$$\begin{aligned} &H = 常数, \ \alpha = 常数, \ \beta = 常数 \\ &\vartheta = 常数, \ \dot{\psi} = \nu, \quad \dot{\varphi} = n \end{aligned} \tag{9.3.13}$$

与式 (2.3.30) 对照, 此常值特解所描述的运动正是轴对称刚体围绕守恒的动量矩矢量 $\boldsymbol{H}$ 的自由规则进动, 是无力矩条件下转子陀螺的普遍运动形态.

将特解 (9.3.13) 代入式 (9.3.9), 计算自由规则进动的刚体角速度

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = \nu\sin\vartheta, \quad \omega_z = \left(\frac{\nu}{\lambda}\right)\cos\vartheta \tag{9.3.14}$$

角速度的模为

$$\omega = \frac{\nu}{\lambda}\sqrt{1 + (\lambda^2 - 1)\sin^2\vartheta} \tag{9.3.15}$$

如转子接近球对称, $\lambda \approx 1$, 则 n 为小量, $\omega \approx \nu$, 刚体的转速由参数 ν 体现. 刚体做自由规则进动时的动量矩模 H 和动能 T 均保持常值

$$H = A\nu \tag{9.3.16}$$

$$T = \frac{A\nu^2}{2\lambda}\left[1 + (\lambda - 1)\sin^2\vartheta\right] \tag{9.3.17}$$

如刚体上虽有力矩作用但十分微弱, 则在短暂时间间隔内可以认为刚体的运动仍接近自由规则进动, 对于较长的时间尺度, H, α, β, ϑ, ν, n, T 等参数可能缓慢发生变化. 这种与自然规则进动十分接近的运动形态称为轴对称刚体的**拟自由规则进动**. 将状态变量方程组 (9.3.11) 右边的力矩项视为摄动因素, 也可称为**状态变量摄动方程**.

9.3.3 稳态运动方程

在刚体处于无力矩状态且章动角 ϑ 为零的特殊条件下, 动量矩矢量 $\boldsymbol{H}$ 守恒且与极轴方向保持一致, 这种特殊的自由规则进动即刚体绕极轴的永久转动. 刚体有力矩作用时, 只要动量矩足够大, 则略去方程 (9.3.11e) 右边第二项, $\dot{\psi}$ 仍接近于常数 ν. 如力矩变化十分平缓, 则方程 (9.3.11d) 确定的章动角 ϑ 变化规律为接近频率 ν 的微幅振动, 其平均值仍保持为零. 因此刚体极轴的平均位置仍接近与动量矩 $\boldsymbol{H}$ 方向一致, 且按方程 (9.3.11b) 和 (9.3.11c) 所确定的规律在惯性空间中缓慢进动. 在此情况下, 可认为 $(O-xyz)$ 与 $(O-XYZ)$ 完全重合, 则 α, β 成为刚体极轴相对惯性坐标系 $(O-\xi\eta\zeta)$ 的角度坐标. 方程 (9.3.11b), (9.3.11c) 可改写为

$$\dot{\alpha} = -\frac{M_y}{H\cos\beta} \tag{9.3.18a}$$

$$\dot{\beta} = \frac{M_x}{H} \tag{9.3.18b}$$

如沿 Z 轴的力矩处于平衡状态, $M_Z = 0$, 从方程 (9.3.11a) 确定动量矩模 H 为常值. 方程组 (9.3.18) 与万向支架陀螺的进动方程 (3.2.25) 几乎完全相同, 区别仅在于 α, β 并非万向支架转角, 而是表示动量矩矢量位置的抽象坐标, 且力矩项 M_x, M_y 均与极轴正交, 并非沿外环轴和内环轴. 方程组 (9.3.18) 所确定的运动为刚体的稳态运动.

如刚体上作用有 ω 频率的周期变化力矩, 则方程 (9.3.11d) 的右项中出现 $\omega, \nu, \omega\pm\nu$ 等频率的周期分量, 使章动角 ϑ 做相应的受迫振动. 如 ω 远离 ν, 则大动量矩 H 能使此受迫振动振幅维持小量. 如 ω 等于 ν, 则方程 (9.3.11d) 的右项产生常值分量使章动角 ϑ 单调增长, 极轴不断偏离动量矩矢量. 从而表明, 如刚体上作用有接近章动频率 ν 的周期变化力矩, 稳态运动即不可能实现.

9.4 陀螺的非稳态运动

9.4.1 章动的内部阻尼

陀螺仪是以转子绕极轴高速旋转为特征的惯性仪表. 而无力矩状态下转子陀螺的普遍运动形态为自由规则进动, 因此必须采取措施使转子的自由规则进动向绕极轴的稳态转动转化. 这种转化过程称为**章动阻尼**. 章动阻尼可借助陀螺内部或外部因素实现, 先讨论内部阻尼作用.

绝对刚性转子的内部不存在能量耗散, 能产生阻尼效应的转子陀螺内部必须包含弹性体或黏性流体等非刚体成分. 对于由刚体转子和非刚体附加成分组成的复杂系统, 如非刚体附加成分在系统内占据的比例极小, 则可认为陀螺的运动仍接近

自由规则进动, 即拟自由规则进动. 系统的总动量矩和总动能的计算公式仍可利用式 (9.3.16) 和 (9.3.17) 表达, 但其中的参数 ϑ 和 ν 不再为常值, 而是随时间缓慢变化.

转子运动过程中附加成分的能量耗散作用, 例如, 弹性体的内摩擦或流体与刚体之间的黏性摩擦, 使系统总动能中的一部分转换为热能. 因此无外力矩作用时系统的总动量矩仍保持恒定, 但总动能却不断减小, 即

$$\dot{H} = 0, \quad \dot{T} < 0 \tag{9.4.1}$$

利用式 (9.3.16), (9.3.17), 导出

$$\nu = \text{常数}, \quad (\lambda - 1)\,\dot{\vartheta}\sin 2\vartheta < 0 \tag{9.4.2}$$

即陀螺的章动频率对较长的时间尺度仍保持不变, 但章动角 ϑ 按以下趋势缓慢变化

$$\begin{aligned} \lambda > 1 : & \begin{cases} \pi/2 > \vartheta > 0 & : \quad \dot{\vartheta} < 0, \quad \vartheta \to 0 \\ \pi > \vartheta > \pi/2 & : \quad \dot{\vartheta} > 0, \quad \vartheta \to \pi \end{cases} \\ \lambda < 1 : & \begin{cases} \pi/2 > \vartheta > 0 & : \quad \dot{\vartheta} > 0, \quad \vartheta \to \pi/2 \\ \pi > \vartheta > \pi/2 & : \quad \dot{\vartheta} < 0, \quad \vartheta \to \pi/2 \end{cases} \end{aligned} \tag{9.4.3}$$

一般情况下转子极轴为刚体的最大惯性矩主轴 ($\lambda > 1$), 当章动角 ϑ 趋近零或 π 时, 极轴趋向与 Z 轴重合, 陀螺的规则进动转变为绕极轴的永久转动. 不过极轴的正端还是负端与 Z 轴重合则取决于阻尼开始时转子的初始位置 (见图 9.14(a)). 如极轴为最小惯性矩主轴 ($\lambda < 1$), 则 ϑ 向 $\pi/2$ 趋近, 即趋向与 Z 轴正交, 陀螺转变为绕赤道面内的某个惯性主轴做永久转动 (见图 9.14(b)). 两种情况的最终阻尼结果都是使转子自动选择最大惯性矩主轴作为永久转动轴. 要实现章动阻尼的最终目标, 即实现转子绕极轴的永久转动, 转子极轴必须为最大惯性矩主轴. 上述现象也可用于判断陀螺稳态运动的稳定性. 当有内部能量耗散存在时, 陀螺稳态运动的稳定性条件为

$$\lambda \begin{array}{l} > 1 \\ < 1 \end{array} \text{即} \quad \begin{array}{ll} C > A & \text{渐近稳定} \\ C < A & \text{不稳定} \end{array} \tag{9.4.4}$$

8.5.3 节中对动力调谐陀螺导出的考虑扭杆内阻尼影响的稳定性条件 (8.5.32) 与条件 (9.4.4) 完全相同, 后者因适用于任意能量耗散因素而更具普遍性.

相反, 如果刚体转子上的附加成分能将其他形式能量转换为动能, 例如, 在自由转子内部增加一用电机驱动的小转子, 则系统的总动量矩不变但总动能不断增大. 条件 (9.4.2) 改为

$$\nu = \text{常数}, \quad (\lambda - 1)\,\dot{\vartheta}\sin 2\vartheta > 0 \tag{9.4.5}$$

则章动角 ϑ 的变化趋势与式 (9.4.3) 相反, 章动阻尼最终使转子自动选择最小惯性矩主轴作为永久转动轴. 陀螺稳态运动的稳定性条件亦与式 (9.4.4) 相反.

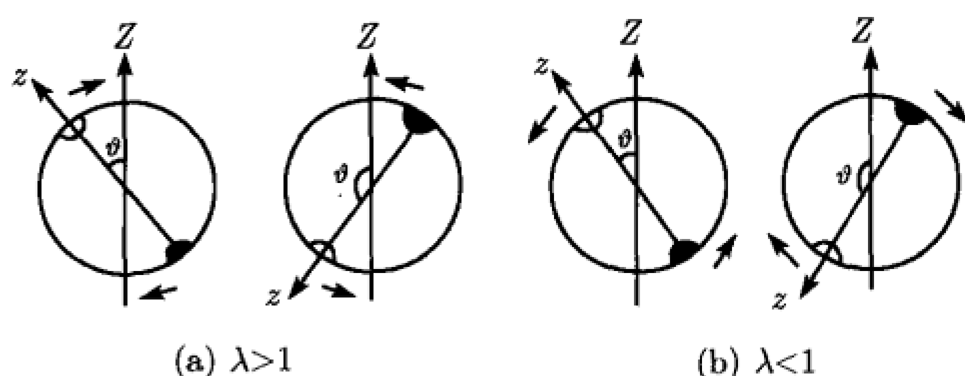


图 9.14　阻尼引起章动角的变化趋势

上述结论也可从动能表达式 (9.3.17) 直接看出. $\lambda > 1$ 时, 转子动能在 $\vartheta = 0$ 处为最小值. $\lambda < 1$ 时相反, $\vartheta = 0$ 时动能为最大值. 因此要促使转子的自由规则进动转变为绕极轴的永久转动, $\lambda > 1$ 时必须减小系统的动能, $\lambda < 1$ 时必须增大系统的动能.

从能量观点讨论章动阻尼问题十分简明且物理概念清晰, 它可以解释带水银环的转子陀螺的章动阻尼现象. 能量方法的缺陷在于动量矩和动能公式的近似性, 一个包含刚体和非刚体成分的复杂系统的实际动量矩和动能远比刚体动能公式复杂得多. 但能量方法仍不失为一种定性判断转子陀螺运动趋势的简便方法.

9.4.2　利用气体的章动阻尼

章动阻尼也可借助外部的阻尼因素, 如气体介质阻尼或磁场阻尼实现. 设陀螺处于气体介质中, 气体的黏性阻尼力矩 $\boldsymbol{M}_\mathrm{d}$ 沿转子极轴和赤道轴的分量与相应的角速度分量成正比, 设 D_0 和 D_1 为比例系数. $\boldsymbol{M}_\mathrm{d}$ 的变化规律为

$$\boldsymbol{M}_\mathrm{d} = -D_1(\omega_x\boldsymbol{i} + \omega_y\boldsymbol{j}) - D_0\omega_z\boldsymbol{k} \tag{9.4.6}$$

对于接近球形的转子, 可忽略 D_1 与 D_0 的差别, 简化为

$$\boldsymbol{M}_\mathrm{d} = -D_0\boldsymbol{\omega} \tag{9.4.7}$$

将式 (9.2.14) 表示的转子角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 变换到 $(O-XYZ)$ 坐标系, 得到

$$\begin{aligned}
\omega_X &= -\frac{\nu}{2\lambda}(\lambda-1)\sin 2\vartheta\sin\psi \\
\omega_Y &= \frac{\nu}{2\lambda}(\lambda-1)\sin 2\vartheta\cos\psi \\
\omega_Z &= \frac{\nu}{\lambda}\left[1+(\lambda-1)\sin^2\vartheta\right]
\end{aligned} \tag{9.4.8}$$

将上式代入式 (9.4.7), 计算阻尼力矩 $\boldsymbol{M}_\mathrm{d}$ 相对 $(O-XYZ)$ 轴系的投影, 得到

$$M_{\mathrm{d}X} = \frac{D_0\nu}{2\lambda}(\lambda-1)\sin 2\vartheta\sin\psi \tag{9.4.9a}$$

$$M_{dY} = -\frac{D_0\nu}{2\lambda}(\lambda - 1)\sin 2\vartheta\cos\psi \tag{9.4.9b}$$

$$M_{dZ} = -\frac{D_0\nu}{\lambda}\left[1 + (\lambda - 1)\sin^2\vartheta\right] \tag{9.4.9c}$$

如转子上作用的唯一外力矩 $\boldsymbol{M}_d$ 十分微弱, 陀螺做拟自由规则进动. 采用逐次近似方法, 将动量矩 $\boldsymbol{H}$ 在惯性空间中指向不变作为零次近似, 设惯性坐标轴 ζ 沿零次近似的 $\boldsymbol{H}$ 矢量方向, $(O-XYZ)$ 的零次近似位置与 $(O-\xi\eta\zeta)$ 重合. 令方程组 (9.3.11) 中 $\alpha=\beta=0$, 各力矩分量以式 (9.4.9) 代入, 并利用 $\nu = H/A$ 将正则变量 H 以 ν 代替, 得到气体阻尼作用下陀螺的正则变量方程组

$$\dot{\nu} = -\frac{D_0\nu}{C}\left[1 + (\lambda - 1)\sin^2\vartheta\right] \tag{9.4.10a}$$

$$\dot{\alpha} = \frac{D_0}{2C}(\lambda - 1)\sin 2\vartheta\cos\psi \tag{9.4.10b}$$

$$\dot{\beta} = \frac{D_0}{2C}(\lambda - 1)\sin 2\vartheta\sin\psi \tag{9.4.10c}$$

$$\dot{\vartheta} = -\frac{D_0}{2C}(\lambda - 1)\sin 2\vartheta \tag{9.4.10d}$$

$$\dot{\psi} = \nu \tag{9.4.10e}$$

$$\dot{\varphi} = n \tag{9.4.10f}$$

其中方程 (9.4.10b), (9.4.10c) 右边的力矩为 ψ 的周期函数, 其变化速度远远超过正则变量的变化速度. 将方程的右项对 ψ 进行平均化, 近似认为 ϑ 在 ψ 的每个变化周期内保持不变, 得到

$$\begin{aligned}\langle\dot{\alpha}\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\dot{\alpha}(\psi)\mathrm{d}\psi = 0\\ \langle\dot{\beta}\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\dot{\beta}(\psi)\mathrm{d}\psi = 0\end{aligned} \tag{9.4.11}$$

表明动量矩矢量 $\boldsymbol{H}$ 的平均位置仍保持 ζ 轴方向不变. 方程 (9.4.10e), (9.4.10f) 形式上与式 (9.3.13) 相同. 表明在阻尼力矩影响下, 缓慢变化的进动角速度 $\dot{\psi}$、自转角速度 $\dot{\varphi}$ 与章动角 ϑ 之间仍遵循与自由规则进动相同的关系式. 利用方程 (9.4.10d) 判断章动角 ϑ 的变化趋势, 可得出与章动内部阻尼规律 (9.4.3) 完全相同的结论 (见图 9.14). 阻尼的最终结果也是使转子绕最大惯性矩主轴做永久转动. 将方程 (9.4.10d) 分离变量, 积分得到章动角 ϑ 的变化规律

$$\tan\vartheta = (\tan\vartheta_0)\mathrm{e}^{-t/T_0} \tag{9.4.12}$$

T_0 为章动阻尼时间常数, 定义为

$$T_0 = \frac{C}{D_0(\lambda - 1)} \tag{9.4.13}$$

转子接近球对称时, $\lambda \approx 1$, 可近似以 ν 表示陀螺转速. 略去方程 (9.4.10a) 右边第二项, 简化为

$$T_1\dot{\nu} + \nu = 0 \tag{9.4.14}$$

转速 ν 按指数规律衰减, 衰减时间常数 T_1 为

$$T_1 = \frac{C}{D_0} \tag{9.4.15}$$

对于以上分析得到的陀螺运动规律, 可补充以下物理解释: 陀螺做零次近似的自由规则进动时, $\boldsymbol{\omega}$ 矢量随 (z, Z) 平面以角速度 ν 绕 Z 轴旋转, 沿 $-\boldsymbol{\omega}$ 方向的阻尼力矩矢量 $\boldsymbol{M}_{\rm d}$ 亦随同高速旋转. 将 $\boldsymbol{M}_{\rm d}$ 沿 Z 轴和垂直 Z 轴方向分解为两个分量 $\boldsymbol{M}'_{\rm d}$ 和 $\boldsymbol{M}''_{\rm d}$, 前者使 $\boldsymbol{H}$ 的模减小而引起陀螺转速衰减, 后者使 $\boldsymbol{H}$ 的矢量端点朝 $\boldsymbol{M}''_{\rm d}$ 方向运动. 转子的章动角 ϑ 如发生变化, 必产生动量矩增量 $A\dot{\vartheta}$ 与 (z, Z) 平面正交. 因此动量矩矢量的瞬时位置必稍稍偏离 Z 轴并绕 Z 轴做圆锥运动, 由进动角速度 $\dot{\psi}$ 引起的 $\boldsymbol{H}$ 矢量的端点速度 $A\dot{\vartheta}\dot{\psi}$ 恰好与 $\boldsymbol{M}''_{\rm d}$ 相等, 且共同随 (z, Z) 平面改变方位, 从而满足动量矩定理 (见图 9.15, 图 9.16). 值得注意的是, 转子极轴的运动方向与力矩 $\boldsymbol{M}''_{\rm d}$ 的指向恰好相反, 说明转子陀螺的章动阻尼过程与进动过程是两种截然不同的力学现象.

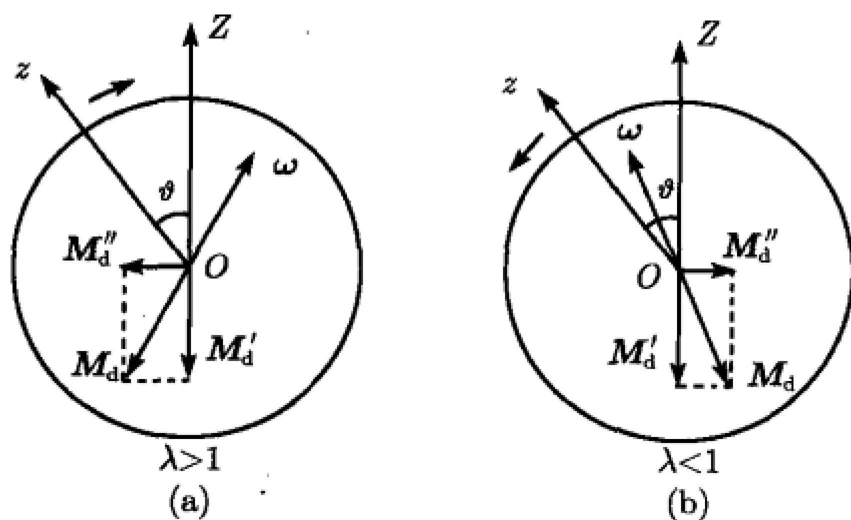


图 9.15 阻尼力矩的分解

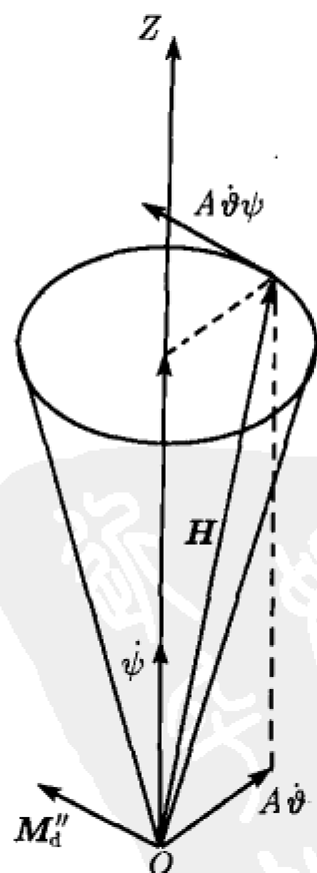


图 9.16 动量矩矢量的圆锥运动

9.4.3　利用磁场的章动阻尼

转子陀螺的章动阻尼也能利用磁场实现. 沿 ζ 轴设置一对直流线圈, 在转子内产生磁感应强度为 $\boldsymbol{B}$ 的均匀磁场 (见图 9.17). 当金属转子以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 旋转时, 因切割磁力线而产生感应涡流力矩 $\boldsymbol{M}_{\mathrm{B}}$, 计算公式为

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{B}} = k\,(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{B} \tag{9.4.16}$$

转子为球体时, 比例系数 k 为常数①. 力矩 $\boldsymbol{M}_{\mathrm{B}}$ 与图 9.16 中的 $\boldsymbol{M}_{\mathrm{d}}''$ 方向相同, 可产生同样的阻尼效果.

设 $\boldsymbol{B}$ 沿 ζ 轴方向且保持常值

$$\boldsymbol{B} = B\zeta^0 \tag{9.4.17}$$

陀螺做拟自由规则进动, 初始动量矩方向沿 ζ 轴. 以动量矩守恒作为零次近似, 认为 $(O-XYZ)$ 的零次近似位置与 $(O-\xi\eta\zeta)$ 重合. 将式 (9.3.14), (9.4.17) 代入式 (9.4.16), 得到感应涡流力矩 $\boldsymbol{M}_{\mathrm{B}}$ 相对 $(O-XYZ)$ 轴系的投影

$$M_{\mathrm{B}X} = \frac{D_{\mathrm{B}}\nu}{2\lambda}\,(\lambda-1)\sin 2\vartheta \sin\psi \tag{9.4.18a}$$

$$M_{\mathrm{B}Y} = -\frac{D_{\mathrm{B}}\nu}{2\lambda}\,(\lambda-1)\sin 2\vartheta \cos\psi \tag{9.4.18b}$$

$$M_{\mathrm{B}Z} = 0 \tag{9.4.18c}$$

D_{B} 为磁场阻尼系数, 定义为

$$D_{\mathrm{B}} = kB^2 \tag{9.4.19}$$

将式 (9.4.18) 表示的力矩与式 (9.4.9) 表示的气体阻尼力矩比较, 除沿 Z 轴的分量为零以外, 沿 X 和 Y 轴分量的变化规律完全相同, 仅须将系数 D 换为 D_{B}. 因此将式 (9.4.18) 代入陀螺的正则变量方程组时, 除参数 v 或动量矩模 H 维持常数以外, 其他运动规律都与利用气体的章动阻尼情形相同. 章动角 ϑ 也按式 (9.4.10d) 规律变化, 仅须将阻尼时间常数 T_0 计算公式 (9.4.13) 中的 D_0 改为 D_{B}.

此结论也可从感应涡流力矩 $\boldsymbol{M}_{\mathrm{B}}$ 的计算公式 (8.4.16) 直接看出. 将此公式展开为

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{B}} = k\left[(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{B})\,\boldsymbol{B} - B^2\boldsymbol{\omega}\right] \tag{9.4.20}$$

上式右边第一项沿与 $\boldsymbol{B}$ 矢量平行的 Z 轴, 其沿 X 轴和 Y 轴的投影为零. 因此力矩 $\boldsymbol{M}_{\mathrm{B}}$ 在 X 轴和 Y 轴上的投影仅来自第二项, 即 $-kB^2\omega$, 与气体阻尼力矩的规律 (9.4.7) 相同. 其阻尼效果也必然相同.

---

① $k = 2\pi r^4 b/3\rho$, r 为转子半径, b 为壳体厚度, ρ 为转子材料的电阻率. 详细说明见文献 [31].

9.4.4 陀螺的驱动

转子陀螺通常利用旋转磁场驱动. 围绕 ζ 轴放置数对线圈产生在 (ξ,η) 平面内绕 ζ 轴匀速旋转的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$(见图 9.18). 磁力线旋转角速度 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{B}}$ 为

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{B}} = \omega_{\mathrm{B}}\boldsymbol{\zeta}^0 \tag{9.4.21}$$

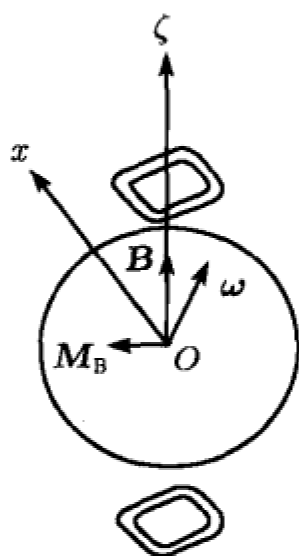


图 9.17　利用磁场的章动阻尼

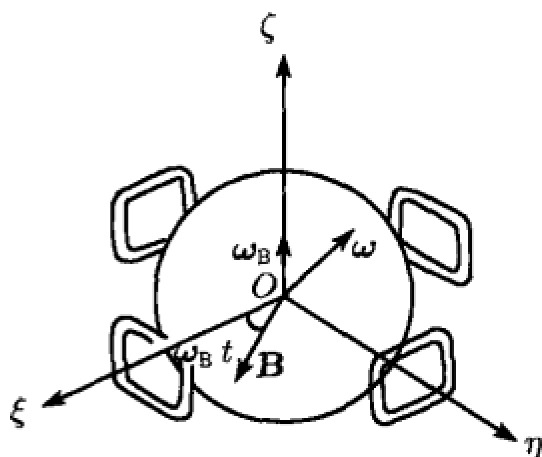


图 9.18　利用磁场的转子驱动

如初始时 $\boldsymbol{B}$ 与 ξ 轴重合, 则 $\boldsymbol{B}$ 在 $(O-\xi\eta\zeta)$ 中的投影式为

$$\boldsymbol{B} = B\left(\cos\omega_{\mathrm{B}}t\boldsymbol{\xi}^0 + \sin\omega_{\mathrm{B}}t\boldsymbol{\eta}^0\right) \tag{9.4.22}$$

仍认为 $(O-XYZ)$ 的零次近似位置与 $(O-\xi\eta\zeta)$ 重合, 将公式 (9.4.16) 中的 $\boldsymbol{\omega}$ 以转子切割磁力线的相对角速度 $\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{B}}$ 代替, 产生的感应涡流力矩为驱动力矩 $\boldsymbol{M}_{\mathrm{m}}$

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{m}} = k\left[(\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{B}})\times\boldsymbol{B}\right]\times\boldsymbol{B} \tag{9.4.23}$$

驱动力矩 $\boldsymbol{M}_{\mathrm{m}}$ 中由于磁力线快速旋转产生的周期分量变化速度远超过正则变量的变化速度, 计算 $\boldsymbol{M}_{\mathrm{m}}$ 在旋转周期 $T_{\mathrm{B}} = 2\pi/\omega_{\mathrm{B}}$ 内的平均值

$$\langle\boldsymbol{M}_{\mathrm{m}}\rangle = \frac{1}{T_{\mathrm{B}}}\int_0^{T_{\mathrm{B}}}\boldsymbol{M}_{\mathrm{m}}\mathrm{d}t \tag{9.4.24}$$

导出 $\langle\boldsymbol{M}_{\mathrm{m}}\rangle$ 沿 $(O-XYZ)$ 各轴的投影

$$\langle M_{\mathrm{m}X}\rangle = \frac{D_{\mathrm{B}}\nu}{4\lambda}(\lambda-1)\sin 2\vartheta\sin\psi \tag{9.4.25a}$$

$$\langle M_{\mathrm{m}Y}\rangle = -\frac{D_{\mathrm{B}}\nu}{4\lambda}(\lambda-1)\sin 2\vartheta\cos\psi \tag{9.4.25b}$$

$$\langle M_{\mathrm{m}Z}\rangle = D_{\mathrm{B}}\left\{\omega_{\mathrm{B}} - \frac{\nu}{\lambda}\left[1+(\lambda-1)\sin^2\vartheta\right]\right\} \tag{9.4.25c}$$

将平均化的驱动力矩 $\langle \boldsymbol{M}_{\mathrm{m}} \rangle$ 代入陀螺的正则变量方程组 (9.3.11) 的力矩项, 得到

$$\dot{\nu} = \frac{D_{\mathrm{B}}}{A}\left\{\omega_{\mathrm{B}} - \frac{\nu}{\lambda}\left[1 + (\lambda - 1)\sin^2\vartheta\right]\right\} \tag{9.4.26a}$$

$$\dot{\alpha} = \frac{D_{\mathrm{B}}}{4C}(\lambda - 1)\sin 2\vartheta\cos\psi \tag{9.4.26b}$$

$$\dot{\beta} = \frac{D_{\mathrm{B}}}{4C}(\lambda - 1)\sin 2\vartheta\sin\psi \tag{9.4.26c}$$

$$\dot{\vartheta} = -\frac{D_{\mathrm{B}}}{4C}(\lambda - 1)\sin 2\vartheta \tag{9.4.26d}$$

$$\dot{\psi} = \nu \tag{9.4.26e}$$

$$\dot{\varphi} = n \tag{9.4.26f}$$

其中参数 D_{B} 的定义见式 (9.4.19). 如陀螺在气体介质中驱动, 则方程 (9.3.11a) 的右边还应增加气体阻尼力矩沿 Z 轴的分量 (9.4.9c), 方程 (9.4.26a) 改为

$$\dot{\nu} = \frac{D_{\mathrm{B}}}{A}\left\{\omega_{\mathrm{B}} - \frac{\nu}{\lambda}\left(1 + \frac{D_0}{D_{\mathrm{B}}}\right)\left[1 + (\lambda - 1)\sin^2\vartheta\right]\right\} \tag{9.4.27}$$

对于接近球对称的转子, $\lambda \approx 1$, ν 近似为陀螺转速, 方程 (9.4.27) 化作

$$T_1\dot{\nu} + \nu = \omega_{\mathrm{B}}\left(1 + \frac{D_0}{D_{\mathrm{B}}}\right)^{-1} \tag{9.4.28}$$

转速 ν 按指数规律增长, 时间常数 T_1 为

$$T_1 = \frac{C}{D_{\mathrm{B}} + D_0} \tag{9.4.29}$$

驱动过程无限延长时转速的极限值为

$$\lim_{t\to\infty}\nu = \omega_{\mathrm{B}}\left(1 + \frac{D_0}{D_{\mathrm{B}}}\right)^{-1} \tag{9.4.30}$$

如陀螺在真空中驱动, 则转速的极限值与磁力线旋转角速度 ω_{B} 相等. 方程 (9.4.26d) 与方程 (9.4.10d) 类似, 表明在驱动过程中也有章动阻尼现象伴随发生. 方程 (9.4.26e), (9.4.26f) 表明转子运动的平均效应仍遵循与自由规则进动相同的规律. 方程 (9.4.26b), (9.4.26c) 表明动量矩矢量 $\boldsymbol{H}$ 在 ζ 轴附近做微辐摆动, 其平均位置维持 ζ 轴方向不变.

9.4.5 转子的质量偏心扰动

转子的质量偏心可来源于工艺误差, 也可人为制造偏心用于姿态角量测. 在重力场中沿极轴的轴向偏心问题属于拉格朗日情形的刚体定点运动, 已在 2.4 节中详

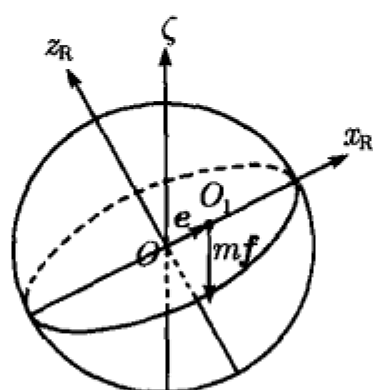


图 9.19　带径向偏心的转子

细讨论. 沿赤道面的径向偏心则引起转子的侧摆运动, 也在 4.3.1 节中作了分析. 此外, 径向偏心产生的重力矩随转子高速旋转而迅速改变方向, 其平均效应可对转子的姿态运动产生影响.

设在转子赤道平面上的 O_1 点处附加一微小的质量 m, O_1 相对支点的偏心矩矢量为 $\overrightarrow{OO_1}=\boldsymbol{e}$(见图 9.19). 不失一般性, 设 $\boldsymbol{e}$ 沿 x_R 轴, 其相对 $(O-XYZ)$ 轴系的投影为

$$\begin{aligned} e_X &= e\,(\cos\psi\,\cos\varphi - \cos\vartheta\,\sin\psi\,\sin\varphi) \\ e_Y &= e\,(\sin\psi\,\cos\varphi + \cos\vartheta\,\cos\psi\,\sin\varphi) \\ e_Z &= e\sin\vartheta\,\sin\varphi \end{aligned} \tag{9.4.31}$$

设 $(O-\xi\eta\zeta)$ 中的 ζ 轴沿地垂线向上, 将比力 $\boldsymbol{f}=-g\boldsymbol{\zeta}^0$ 变换到 $(O-XYZ)$, 得到

$$\boldsymbol{f}=g\left(\cos\alpha\sin\beta\boldsymbol{X}^0-\sin\alpha\boldsymbol{Y}^0-\cos\alpha\cos\beta\boldsymbol{Z}^0\right) \tag{9.4.32}$$

采用逐次近似方法, 将动量矩 $\boldsymbol{H}$ 在惯性空间中指向不变, 陀螺做自然规则进动作为零次近似. 除 H,ϑ 保持常值以外, 各参数的零次近似值为

$$\alpha=0,\quad \beta=\beta_0,\quad \dot{\psi}=\nu,\quad \dot{\varphi}=n \tag{9.4.33}$$

利用式 (9.4.31), (9.4.32), 导出零次近似意义下重力对 O 点的矩 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{e}\times m\boldsymbol{f}$ 在 $(O-XYZ)$ 中的投影

$$\begin{aligned} M_X &= -mge\cos\beta_0\,(\sin\psi\;\cos\varphi+\cos\vartheta\,\cos\psi\,\sin\varphi) \\ M_Y &= mge\,[(\sin\beta_0\sin\vartheta-\cos\beta_0\cos\vartheta\,\sin\psi)\sin\varphi+\cos\beta_0\cos\psi\,\cos\varphi] \\ M_Z &= -mge\sin\beta_0\,(\sin\psi\,\cos\varphi+\cos\vartheta\,\cos\psi\,\sin\varphi) \end{aligned} \tag{9.4.34}$$

将上式代入正则变量方程组 (9.3.11b), (9.3.11c), 令 $\psi=\nu t$, $\varphi=nt$, 引入参数 ε

$$\varepsilon=\frac{mge}{H} \tag{9.4.35}$$

得到

$$\dot{\alpha}=-\varepsilon\left[(\tan\beta_0\sin\vartheta-\cos\vartheta\,\sin\nu t)\sin nt+\cos\nu t\;\cos nt\right] \tag{9.4.36a}$$

$$\dot{\beta}=-\varepsilon\cos\beta_0\,(\sin\nu t\;\cos nt+\cos\vartheta\,\cos\nu t\,\sin nt) \tag{9.4.36b}$$

计算其在章动周期 $T=2\pi/\nu$ 内的平均值, 令

$$\langle\dot{\alpha}\rangle=\frac{1}{T}\int_0^T\dot{\alpha}\mathrm{d}t,\quad \left\langle\dot{\beta}\right\rangle=\frac{1}{T}\int_0^T\dot{\beta}\mathrm{d}t \tag{9.4.37}$$

展开化简后得到

$$\begin{aligned}\langle\dot{\alpha}\rangle=&\frac{\varepsilon}{nT}\left\{\tan\beta_0\sin\vartheta\,(1-\cos nT)-\frac{n}{\nu^2-n^2}\left[(\nu\cos\vartheta-n)\cos\nu T\sin nT\right.\right.\\&\left.\left.+(\nu-n\cos\vartheta)\sin\nu T\cos nT\right]\right\}\end{aligned} \tag{9.4.38a}$$

$$\begin{aligned}\langle\dot{\beta}\rangle=&-\frac{\varepsilon\cos\beta_0}{(\nu^2-n^2)\,T}\left[(\nu-n\cos\vartheta)\,(1-\cos\nu T\cos nT)\right.\\&\left.+\,(\nu\cos\vartheta-n)\sin\nu T\sin nT\right]\end{aligned} \tag{9.4.38b}$$

阻尼过程结束后, $\vartheta=0$, 利用式 (9.3.12) 将上式简化为

$$\langle\dot{\alpha}\rangle=-\frac{\varepsilon\lambda}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) \tag{9.4.39a}$$

$$\langle\dot{\beta}\rangle=-\frac{\varepsilon\lambda\cos\beta_0}{2\pi}\left[1-\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)\right] \tag{9.4.39b}$$

$\langle\dot{\alpha}\rangle,\langle\dot{\beta}\rangle$ 的非零结果表明, 转子有径向质量偏心时, 虽然重力对 O 点的矩随转子旋转迅速改变方向, 但动量矩矢量的方向也同步改变, 其耦合效应可产生不为零的平均效果, 导致极轴在惯性空间中进动. 转子为球对称时, $\lambda=1,\langle\dot{\alpha}\rangle=\langle\dot{\beta}\rangle=0$, 可见径向质量偏心对球对称转子无影响.

9.5　陀螺的稳态运动

9.5.1　大范围运动的奇点

根据 9.3.3 节的说明, 稳态运动是指驱动和阻尼过程结束, 动量矩矢量与转子极轴保持一致, 在力矩作用下的缓慢进动. 第 5 章、第 6 章中讨论的陀螺进动理论完全忽略万向支架的质量, 其主要结论也适用于转子陀螺的稳态运动. 只是力矩项 M_x,M_y 均与极轴正交, 一般情况下, 由极轴相对壳体的位置完全确定, 即 M_x,M_y 为 α,β 的函数. 与框架陀螺比较, 不受约束的转子陀螺可能作大幅度进动, 不允许对稳态运动方程 (9.3.18) 作线性化处理.

将方程 (9.3.18a) 和 (9.3.18b) 相除, 消去时间的微分, 得到

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\alpha}=-\frac{M_x\,(\alpha,\beta)\cos\beta}{M_y\,(\alpha,\beta)} \tag{9.5.1}$$

此方程完全确定陀螺极轴的极点轨迹. 除坐标系的奇点 $\beta=\pi/2$ 以外, 奇点 α_s,β_s 表示极轴相对惯性坐标系 $(O-\xi\eta\zeta)$ 的平衡位置, 满足

$$M_x(\alpha_s,\beta_s)=0,\quad M_y(\alpha_s,\beta_s)=0 \tag{9.5.2}$$

将 M_x, M_y 在奇点附近展开, 令

$$\alpha=\alpha_s+x,\quad \beta=\beta_s+y \tag{9.5.3}$$

扰动 x,y 为无限小量时, 方程 (9.5.1) 的一次近似式为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{cx+dy}{ax+by} \tag{9.5.4}$$

系数 a,b,c,d 定义为

$$\begin{aligned} a&=-\left(\frac{\partial M_y}{\partial \alpha}\right)_{\alpha_s,\beta_s}, \qquad b=-\left(\frac{\partial M_y}{\partial \beta}\right)_{\alpha_s,\beta_s} \\ c&=\left(\frac{\partial M_x}{\partial \alpha}\cos\beta\right)_{\alpha_s,\beta_s}, \quad d=\left(\frac{\partial M_x}{\partial \beta}\cos\beta-M_x\sin\beta\right)_{\alpha_s,\beta_s} \end{aligned} \tag{9.5.5}$$

找出方程 (9.5.1) 在大范围内的全部奇点, 且根据表 A.3 逐个判断各个奇点的类型, 就能定性地确定奇点附近极点轨迹的几何特征, 描绘出全局范围内转子陀螺的运动情景.

9.5.2　重力场中的陀螺漂移

设转子陀螺的质心沿极轴向下偏离支点 O, m,l 为转子的质量和偏心距, ζ 轴沿地垂线方向且基座静止, 将 $\boldsymbol{l}=-l\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{f}=-g\boldsymbol{\zeta}^0$ 代入式 (4.1.54) 计算重力对 O 点的矩 $\boldsymbol{M}$, 仍利用摆性系数符号 $\mu=mgl$, 得到 $\boldsymbol{M}$ 相对 x 和 y 轴的投影

$$M_x=-\mu\sin\alpha,\quad M_y=-\mu\cos\alpha\sin\beta \tag{9.5.6}$$

根据式 (9.5.2), 奇点 α_s,β_s 为以下方程的解

$$\sin\alpha_s=0,\qquad \cos\alpha_s\sin\beta_s=0 \tag{9.5.7}$$

满足此方程的奇点分别沿 ζ 轴的正、负方向, 以 S_1, S_2 表示

$$\begin{aligned} &S_1:\alpha_s=0,\ \beta_s=0\ \text{或}\ \alpha_s=\pi,\ \beta_s=\pi \\ &S_2:\alpha_s=0,\ \beta_s=\pi\ \text{或}\ \alpha_s=\pi,\ \beta_s=0 \end{aligned} \tag{9.5.8}$$

将式 (9.5.8) 代入 (9.5.5), 利用表 A.3 判断出 S_1 和 S_2 均为中心, 全局范围内的极点轨迹为围绕 ζ 轴的纬度圆族 (见图 9.20). 即 2.4.3 节中叙述的拉格朗日情形刚体的受迫规则进动.

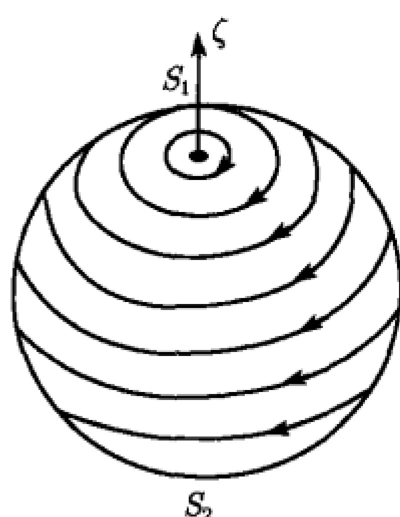


图 9.20 重力场中的极点轨迹

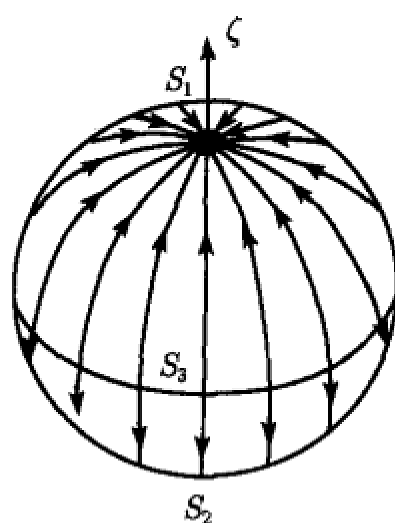


图 9.21 阻尼磁场中的极点轨迹

9.5.3 磁场中的陀螺漂移

设转子陀螺处于沿 ζ 轴方向的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 产生的均匀磁场中. 作为零次近似, 认为转子绕极轴以角速度 ω_0 做永久转动

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_0 \boldsymbol{k} \tag{9.5.9}$$

将式 (9.4.17), (9.5.9) 代入式 (9.4.16) 计算感应涡流力矩 $\boldsymbol{M}$, 仍定义 $D_{\mathrm{B}} = kB^2$, 得到 $\boldsymbol{M}$ 沿 x 和 y 轴的投影为

$$\begin{aligned} M_x &= -D_{\mathrm{B}}\omega_0 \cos^2\alpha \cos\beta \sin\beta \\ M_y &= D_{\mathrm{B}}\omega_0 \cos\alpha \sin\alpha \cos\beta \end{aligned} \tag{9.5.10}$$

奇点方程为

$$\begin{aligned} &\cos^2\alpha_{\mathrm{s}} \cos\beta_{\mathrm{s}} \sin\beta_{\mathrm{s}} = 0 \\ &\cos\alpha_{\mathrm{s}} \sin\alpha_{\mathrm{s}} \cos\beta_{\mathrm{s}} = 0 \end{aligned} \tag{9.5.11}$$

除存在与式 (9.5.8) 位置相同的奇点 S_1, S_2 以外, 还存在奇点 S_3

$$S_3: \quad \begin{aligned} &\alpha_{\mathrm{s}} = \pi/2, \quad \beta_{\mathrm{s}} = \text{任意值} \\ &\beta_{\mathrm{s}} = \pi/2, \quad \alpha_{\mathrm{s}} = \text{任意值} \end{aligned} \tag{9.5.12}$$

利用表 A.3 判断, S_1 和 S_2 均为稳定结点, S_3 分布在 (ξ,η) 坐标面上, 是从鞍点过渡为不稳定结点的临界情形. 极点轨迹为子午线族 (见图 9.21). 在磁场力矩作用下, 陀螺极轴沿最捷途径向磁感应强度矢量 $\boldsymbol{B}$ 的正端或负端趋近. 极轴沿 ζ 轴时处于稳定平衡位置, 而垂直于 ζ 轴的平衡位置不稳定.

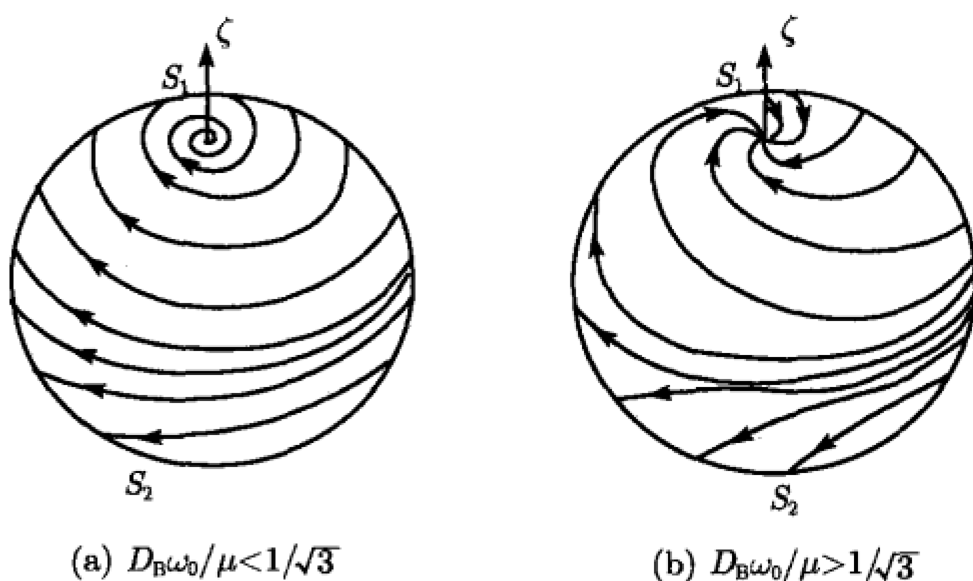
如转子陀螺受到重力场和磁场的联合作用, 将力矩 (9.5.6) 和 (9.5.10) 叠加, 奇点方程为

$$\begin{aligned} &\mu \sin\alpha_{\mathrm{s}} + D_{\mathrm{B}}\omega_0 \cos^2\alpha_{\mathrm{s}} \cos\beta_{\mathrm{s}} \sin\beta_{\mathrm{s}} = 0 \\ &(\mu \sin\beta_{\mathrm{s}} - D_{\mathrm{B}}\omega_0 \sin\alpha_{\mathrm{s}} \cos\beta_{\mathrm{s}}) \cos\alpha_{\mathrm{s}} = 0 \end{aligned} \tag{9.5.13}$$

仍存在两个奇点 S_1 和 S_2, 其位置与式 (9.5.8) 相同, 奇点的类型取决于 $D_{\rm B}\omega_0$ 与 μ 之比, 即取决于磁场对于陀螺受迫规则进动的影响程度.

$$D_{\rm B}\omega_0/\mu \quad \begin{matrix} <1/\sqrt{3}: & \text{稳定焦点} \\ >1/\sqrt{3}: & \text{稳定结点} \end{matrix} \tag{9.5.14}$$

陀螺的极点轨迹向 ζ 轴的两端趋近 (见图 9.22).



(a) $D_{\rm B}\omega_0/\mu<1/\sqrt{3}$　(b) $D_{\rm B}\omega_0/\mu>1/\sqrt{3}$

图 9.22　重力场和磁场中的极点轨迹

9.5.4　静电场中的陀螺漂移

静电陀螺转子由于高速旋转的离心惯性力引起弹性变形而偏离球形时, 可产生静电场干扰力矩. 设 $(O-\xi\eta\zeta)$ 固结于电极腔体, 各坐标轴指向六面体电极的几何中心, 如图 9.7 所示. 与极轴正交的静电场干扰力矩已在式 (9.2.30) 中导出

$$\begin{aligned} M_x &= 2.42a^2\left(\frac{p_0S_0}{h_0}\right)\sin 4\alpha\cos^3\beta \\ M_y &= 4.84a^2\left(\frac{p_0S_0}{h_0}\right)\left[\left(\cos^4\alpha+\sin^4\alpha\right)\cos^2\beta-\sin^2\beta\right]\sin 2\beta \end{aligned} \tag{9.5.15}$$

令力矩 M_x, M_y 同时为零, 导出奇点方程

$$\sin 4\alpha_{\rm s}\cos^3\beta_{\rm s}=0 \tag{9.5.16a}$$

$$\left[\left(\cos^4\alpha_{\rm s}+\sin^4\alpha_{\rm s}\right)\cos^2\beta_{\rm s}-\sin^2\beta_{\rm s}\right]\cos 2\beta_{\rm s}=0 \tag{9.5.16b}$$

奇点方程的解对应于转子在电极腔内的平衡位置. 可从中解出 26 个奇点 $S_j(j=1,2,\cdots,26)$, 表明转子在电极腔内存在 26 种不同的平衡状态, 在表 9.1 中列出. 其中 $S_{1\sim6}$ 为各电极的几何中心, $S_{7\sim18}$ 为正六面体电极各棱边的中点, $S_{19\sim26}$ 为正六面体的各个角点. 利用表 A.3 判断, 各电极的几何中心和角点均为中心, 各棱边的中

点均为鞍点. 图 9.23 表示奇点在电极球腔的内接正六面体上的分布位置, 白点为中心, 黑点为鞍点. 图 9.24 为全局范围内的极点轨迹曲线. 可以看出, 陀螺的极轴指向电极几何中心或正六面体的角点时, 平衡状态稳定, 指向棱边中点时平衡状态不稳定. 转子极轴的稳态位置必须设计为稳定奇点位置, 例如, 使极轴指向某个电极的几何中心, 才能保证静电陀螺的正常工作.

表 9.1

奇点	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8
α_s	0°	0°	0°	90°	180°	270°	0°	0°
β_s	0°	90°	270°	0°	0°	0°	45°	135°
S_9	S_{10}	S_{11}	S_{12}	S_{13}	S_{14}	S_{15}	S_{16}	S_{17}
0°	0°	45°	135°	225°	315°	90°	90°	90°
225°	315°	0°	0°	0°	0°	45°	135°	225°
S_{18}	S_{19}	S_{20}	S_{21}	S_{22}	S_{23}	S_{24}	S_{25}	S_{26}
90°	45°	45°	135°	135°	−45°	−45°	−135°	−135°
315°	35°16′	−35°16′	35°16′	−35°16′	35°16′	−35°16′	35°16′	−35°16′

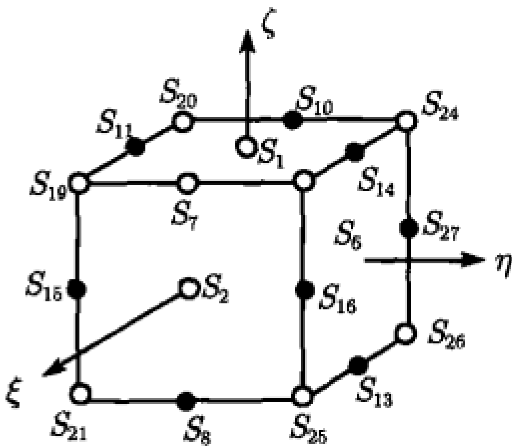


图 9.23　正六面体上的奇点分布

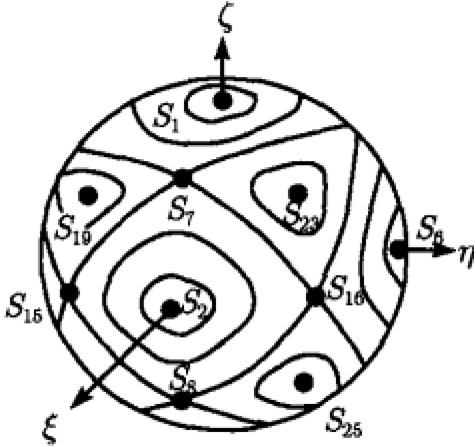


图 9.24　静电场中的极点轨迹

9.5.5　跟踪现象

转子陀螺仅在无阻尼环境中旋转才可能完全免除力矩作用. 只要有阻尼存在, 就必须向转子施加驱动力矩, 才能维持匀速旋转. 万向支架陀螺的轴承约束可以保证驱动力矩与转子极轴方向一致. 这种轴承约束在转子陀螺中不复存在, 无法保证驱动力矩与转子极轴的共轴性. 当驱动力矩随壳体的转动而偏离转子极轴时, 即出现转子对壳体的跟踪现象. 与 8.3.3 节中叙述的调谐陀螺跟踪现象的物理过程完全相同.

设旋转磁场按式 (9.4.22) 的规律变化, 转子的零次近似运动为绕极轴匀速旋转, 将式 (9.4.22), (9.5.9) 代入式 (9.4.16) 计算驱动力矩 M_{m}, 变换到 $(O-xyz)$ 坐标

系, 仅保留 α,β 的一次项, 且在每个磁场旋转周期内平均化, 得到

$$\langle \boldsymbol{M}_{\mathrm{m}}\rangle = -\frac{1}{2}D_{\mathrm{B}}\omega_0\left(\beta\boldsymbol{i}-\alpha\boldsymbol{j}\right)+D_{\mathrm{B}}\left(\omega_{\mathrm{B}}-\omega_0\right)\boldsymbol{k} \tag{9.5.17}$$

将式 (9.5.9) 代入式 (9.4.7) 计算阻尼力矩 $\boldsymbol{M}_{\mathrm{d}}$, 得到

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{d}} = -D_0\omega_0\left(\beta\boldsymbol{i}-\alpha\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}\right) \tag{9.5.18}$$

将力矩 (9.5.17) 与 (9.5.18) 相加, 代入正则变量方程组 (9.3.11) 的前三式, 得到

$$\dot{H} = D_{\mathrm{B}}\left(\omega_{\mathrm{B}}-\omega_0\right)-D_0\omega_0 \tag{9.5.19a}$$

$$\dot{\alpha} = -\left(\frac{D_{\mathrm{B}}+2D_0}{2C}\right)\alpha \tag{9.5.19b}$$

$$\dot{\beta} = -\left(\frac{D_{\mathrm{B}}+2D_0}{2C}\right)\beta \tag{9.5.19c}$$

陀螺做稳态运动时, H 保持常值, 令方程 (9.5.19a) 的右项为零, 得到

$$D_0 = \sigma D_{\mathrm{B}} \tag{9.5.20}$$

量纲为一的参数 σ 为磁力线的转速与陀螺转速的相对差值, 即陀螺的转差率

$$\sigma = \frac{\omega_{\mathrm{B}}-\omega_0}{\omega_0} \tag{9.5.21}$$

将式 (9.5.20) 代入方程 (9.5.19b), (9.5.19c), 得到用复变量 $z=\alpha+\mathrm{i}\beta$ 表示的方程

$$T\dot{z}+z=0 \tag{9.5.22}$$

z 按指数规律衰减, 极轴向固结于壳体的 ζ 轴趋近, 表现为转子陀螺的跟踪现象. 陀螺的跟踪时间常数 T 定义为

$$T=\left(\frac{2\sigma}{1+2\sigma}\right)\frac{C}{D_0} \tag{9.5.23}$$

T 随陀螺的转差率 σ 的增大而延长 (见图 9.25). σ 趋于无限大时的跟踪时间常数为

$$T=\frac{C}{D_0} \tag{9.5.24}$$

上述跟踪现象可利用图 9.26 给出物理解释. 极轴偏离 ζ 轴时, 转子切割磁力线的相对速度矢量 $\boldsymbol{\omega}_r=\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{B}}-\boldsymbol{\omega}_0$ 向 ζ 轴方向偏转, 从而产生出垂直于极轴的力矩分量使转子朝 ζ 轴方向进动. 转差率 σ 愈小, $\boldsymbol{\omega}_r$ 的偏转愈显著, 跟踪现象就愈严重.

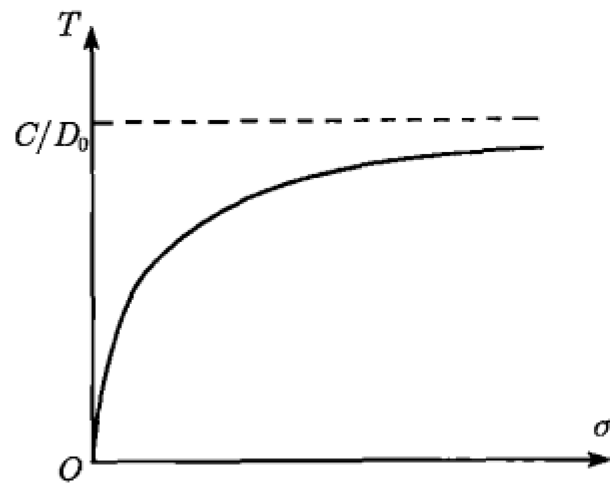


图 9.25 跟踪时间常数 T 与转差率 σ 的关系

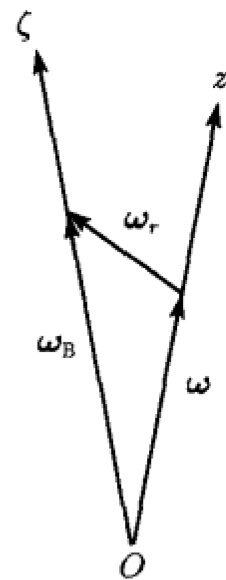


图 9.26 跟踪现象的物理解释

将转子进动速率视为陀螺的漂移率, 设极轴与驱动轴 ζ 之间的最大偏角为 θ, 从式 (9.5.22) 导出陀螺的最大漂移率 Ω_{d} 为

$$\Omega_{\mathrm{d}} = \frac{\theta}{T} \tag{9.5.25}$$

此漂移率与极轴偏离驱动轴的最大角度 θ 成正比, 与跟踪时间常数 T 成反比. 要提高转子陀螺的精确度必须努力减小 θ 或延长 T. 式 (9.5.23) 表明, 增大转子的极惯量矩 C, 减小阻尼力矩系数 D_0, 或扩大陀螺的转差率 σ 都有利于使时间常数 T 延长.

9.6 框架陀螺的摄动理论

9.6.1 万向支架的摄动力矩

9.3.1 节中叙述的刚体定点运动的状态变量方程适合于分析无约束的转子陀螺. 对于万向支架支承的框架陀螺, 由于框架质量远小于转子质量, 若将框架对转子的约束力矩视为影响转子自由规则进动的摄动因素, 则状态变量方法也可用于分析框架陀螺的运动.

设载体静止. 以陀螺支点 O 为原点, 采用 9.3.1 节定义的惯性坐标系 $(O-\xi\eta\zeta)$, 动量矩坐标系 $(O-XYZ)$ 和转子的主轴坐标系 $(O-xyz)$ 以及 3.2.1 节定义的外环坐标系 $(O-x_0y_0z_0)$, 内环坐标系 $(O-x_1y_1z_1)$ 和转子坐标系 $(O-x_{\mathrm{R}}y_{\mathrm{R}}z_{\mathrm{R}})$. 其中 $(O-xyz)$ 与 $(O-x_1y_1z_1)$ 均为转子的莱查坐标系, 但有不同的定义. 外环和内环转角改以 α_1, β_1 表示, 以避免与动量矩矢量 $\boldsymbol{H}$ 相对 $(O-\xi\eta\zeta)$ 的角度坐标混淆. 将转子坐标系 $(O-x_{\mathrm{R}}y_{\mathrm{R}}z_{\mathrm{R}})$ 和内环坐标系 $(O-x_1y_1z_1)$ 相对动量矩坐标系 $(O-XYZ)$ 的欧拉角分别记作 ψ, ϑ, φ 和 $\psi, \vartheta, \varphi_1$, 其中仅 φ_1 与 φ 有区别 (见图 9.27). 各坐标系之间的关系为

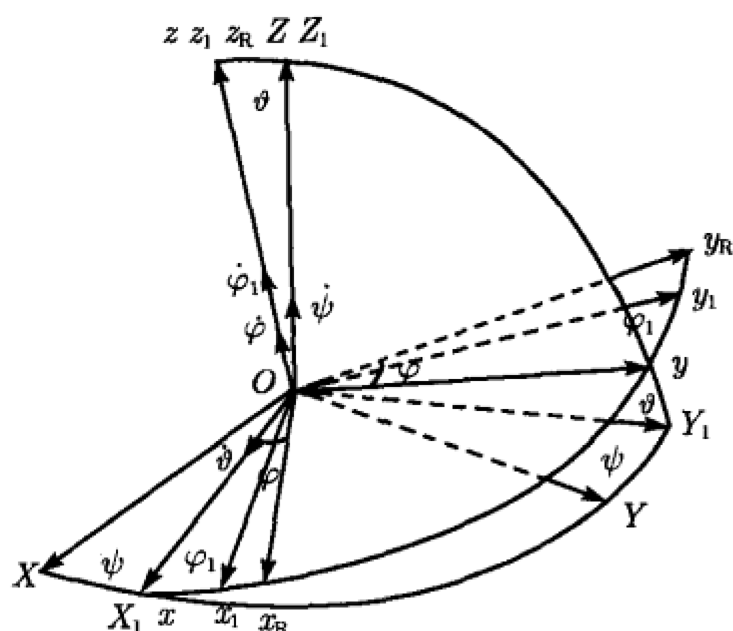


图 9.27　内环和转子相对动量矩坐标系的欧拉角

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & \nearrow \underset{z,z_1}{\overset{\varphi_1}{\rightarrow}} & (O-x_1y_1z_1) \\
(O-XYZ) & \underset{Z,Z_1}{\overset{\psi}{\rightarrow}} & (O-X_1Y_1Z_1) & \underset{X_1,x}{\overset{\vartheta}{\rightarrow}} & (O-xyz) & & \\
 & & & & & \searrow \underset{z,z_{\mathrm{R}}}{\overset{\varphi}{\rightarrow}} & (O-x_{\mathrm{R}}y_{\mathrm{R}}z_{\mathrm{R}})
\end{array}
$$

利用坐标轴的基矢量计算万向支架的转角 α_1, β_1, 得到

$$\sin\alpha_1 = \frac{\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{\xi}^0}{|\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{\xi}^0|}\cdot\boldsymbol{\zeta}^0, \quad \sin\beta_1 = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\xi}^0 \tag{9.6.1}$$

将式 (9.3.13) 表示的无力矩状态下转子极轴在动量矩矢量附近的自由规则进动作为框架陀螺运动的零次近似. 以此为基础计算万向支架的惯性力矩. 不失一般性, 令式 (9.3.13) 中 $\alpha = 0$, 设章动角 ϑ 极小, 仅保留其一次项. 将方向余弦矩阵 (9.3.1), (9.3.6) 代入式 (9.6.1), 导出零次近似条件下的万向支架转动规律

$$\alpha_1 = \vartheta\sec\beta\cos\psi, \quad \beta_1 = \beta + \vartheta\sin\psi \tag{9.6.2}$$

仿照式 (3.2.5) 写出内环的转动角速度

$$\omega_x = \dot{\alpha}_1\cos\beta_1, \quad \omega_y = \dot{\beta}_1, \quad \omega_z = \dot{\alpha}_1\sin\beta_1 \tag{9.6.3}$$

利用图 3.1 表示的力矩符号, 考虑约束力矩 $\boldsymbol{L}_1$ 和外部作用的主动力矩 $\boldsymbol{M}_0$ 和 $\boldsymbol{M}_1$, 列出与式 (7.3.18) 和 (7.3.19) 类似的外环绕 x_0 轴的转动方程和内环相对极轴的欧拉方程

$$A_0\ddot{\alpha}_1 = -L_{1x_0} + M_{0x_0} \tag{9.6.4}$$

$$C_1\ddot{\alpha}_1 \sin\beta_1 + (B_1 + C_1 - A_1)\,\dot{\alpha}_1\dot{\beta}_1 \cos\beta_1 = (L_{1x_0} + M_{1x_0})\sin\beta_1 + (L_{1z_0} + M_{1z_0})\cos\beta_1 \tag{9.6.5}$$

将式 (9.6.3) 代入以上方程的左边, 解出 L_{1x_0} 和 L_{1z_0}. 将内环与转子组合体上作用的合力矩定义为**摄动力矩**$\boldsymbol{M}$, 即轴承约束力矩 $\boldsymbol{L}_1$ 与主动力矩 $\boldsymbol{M}_0, \boldsymbol{M}_1$ 之和. 导出 $\boldsymbol{M}$ 在 $(O-x_0y_0z_0)$ 中的投影

$$\begin{aligned}
M_{x0} &= A_0\vartheta\nu^2 \sec\beta\cos\psi + M_{0x_0} + M_{1x_0} + M_{2x_0}\\
M_{y0} &= M_{1y_0} + M_{2y_0}\\
M_{z0} &= -(A_0 + C_1)\,\vartheta\nu^2 \tan\beta\sec\beta\cos\psi - (M_{0x_0} + M_{1x_0})\tan\beta + M_{2x_0}
\end{aligned} \tag{9.6.6}$$

利用 $(O-x_0y_0z_0)$ 与 $(O-XYZ)$ 之间的方向余弦矩阵

$$\boldsymbol{C}_{x_0}^{X} = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ -\vartheta\tan\beta\cos\psi & 1 & \vartheta\cos\psi \\ -\sin\beta & -\vartheta\sec\beta\cos\psi & \cos\beta \end{pmatrix} \tag{9.6.7}$$

计算摄动力矩 $\boldsymbol{M}$ 在 $(O-XYZ)$ 中的投影, 代入方程组 (9.3.11) 的右边, 即得到万向支架陀螺的相坐标摄动方程组.

9.6.2 陀螺的进动方程

讨论陀螺的稳态运动时, 令 $M_Z = 0$, 以保证转子匀速旋转, 令 $\vartheta = 0$, 使动量矩矢量与转子极轴一致. 导出摄动力矩

$$M_X = M_x \sec\beta, \quad M_Y = M_y \tag{9.6.8}$$

其中 M_x 为外环组合体的主动力对外环轴的合力矩, M_y 为内环组合体的主动力对内环轴的合力矩

$$M_x = M_{0x_0} + M_{1x_0} + M_{2x_0}, \quad M_y = M_{1y_0} + M_{1y_0} \tag{9.6.9}$$

将式 (9.6.8) 代入方程 (9.3.11b), (9.3.11c), 得到稳态运动方程

$$\dot{\alpha} = -\frac{1}{H\cos\beta}M_y \tag{9.6.10a}$$

$$\dot{\beta} = \frac{1}{H\cos\beta}M_x \tag{9.6.10b}$$

将其中符号 H 换作 H_0, 即与陀螺进动方程 (3.2.25) 完全相同.

因此框架陀螺进动理论的适用条件等同于转子陀螺的稳态运动条件. 即陀螺具有足够大动量矩, 外力矩变化平缓, 其交变分量的幅值足够小且频率不得接近章动频率. 与第 7 章的结论完全一致.

9.6.3 章动漂移

设陀螺无主动力矩作用, $\boldsymbol{M}_1 = \boldsymbol{M}_2 = 0$, 将式 (9.6.6) 变换至 $(O-XYZ)$ 坐标系时保留 ϑ 的二次项, 且在每个章动周期内平均化, 得到

$$\langle M_X \rangle = 0 \tag{9.6.11a}$$

$$\langle M_Y \rangle = \frac{1}{2}(A_0 + C_1)\vartheta^2\nu^2\tan\beta\sec^2\beta \tag{9.6.11b}$$

将式 (9.6.11b) 代入方程 (9.3.11c), 得到 $\dot{\beta} = 0$, 即 β 保持常值

$$\beta = \beta_0 \tag{9.6.12}$$

设 ψ 的初始值为 $\pi/2$, 从式 (9.6.2) 导出 $\dot{\alpha}_1$ 和 β_1 的初始值

$$\dot{\alpha}_{10} = \vartheta\nu\sec\beta_0, \quad \beta_{10} = \beta_0 + \vartheta \tag{9.6.13}$$

利用上式消去式 (9.6.11b) 中的 ϑ, 代入方程 (9.3.11b), 得到 α 的长期摄动规律

$$\dot{\alpha} = -\frac{\dot{\alpha}_{10}^2(A_0 + C_1)\tan\beta_0}{2H\cos\beta_0} \tag{9.6.14}$$

此即章动漂移的马格努斯公式. 将 $\dot{\alpha}_{10}, H$ 等符号换作 $\dot{\alpha}_0, H_0$, 即与式 (7.3.23) 完全一致.

9.6.4 章动阻尼

如万向支架轴承内存在黏性摩擦, 阻尼系数为 D, 外环和内环轴承内的阻尼力矩分别以 M_{0x_0} 和 M_{1y_0} 表示为

$$M_{0x_0} = -D\dot{\alpha}_1, \quad M_{1y_0} = -D\dot{\beta}_1 \tag{9.6.15}$$

将式 (9.6.2) 代入上式, 变换到 $(O-XYZ)$ 坐标系, 导出黏性阻尼引起的摄动力矩增量

$$M_X = D\vartheta\nu\sec^2\beta\sin\psi, \quad M_Y = -D\vartheta\nu\sin\psi, \quad M_Z = 0 \tag{9.6.16}$$

M_Z 为零表明内、外环轴承内的阻尼对陀螺的转速作用不产生影响. 将上式代入方程 (9.3.11d) 的右边, 且在每个章动周期内平均化, 得到 ϑ 的长期摄动规律

$$T\dot{\vartheta} + \vartheta = 0 \tag{9.6.17}$$

时间常数为

$$T = \frac{2A}{D\left(1 + \sec^2 \beta_0\right)} \tag{9.6.18}$$

表明轴承摩擦的作用使陀螺的章动角 ϑ 按指数规律衰减.



第10章　充液陀螺

带有充液体空腔的刚体定点运动，其主要工程背景为带有液体推进剂的自旋卫星. 液体的存在使简单的刚体模型变为由刚体和液体组成的复杂系统. 1877 年开尔文 (Lord Kelvin) 从实验中观察到充满液体的球形容器旋转时处于临界稳定状态. 引起关于此现象物理解释的讨论，格林希尔 (A. G. Greenhill) 和庞加莱 (H. Poincaré) 等数学家也参与了讨论. 1885 年茹可夫斯基 (N.E.Rhukovsky) 对全充理想无旋液体的刚体运动建立了等效刚体概念，奠定了这一分支学科的理论基础. 20 世纪 60 年代以莫伊谢耶夫 (N.N.Moiseev) 为代表的线性理论研究，和以鲁缅采夫 (V.V.Rumjantsev) 为代表的稳定性理论研究推动了充液系统动力学的发展. 旋转中的液体运动为有旋流动，椭球腔内有旋流动的流场各点有相同的涡量. 1974 年普费弗 (F.Pfeiffer) 将平均涡量作为离散化变量，平均化的亥姆霍兹 (H.Helmholtz) 方程为补充的动力学方程分析充有旋液体的刚体运动. 本章首先叙述无旋和有旋液体在腔内的流动如何离散化为等效刚体，然后分析欧拉情形和拉格朗日情形带充液腔刚体的自旋稳定性，导出解析形式的稳定性判据. 最后讨论利用球腔内的旋转液体构成液体转子陀螺仪的可能性.

10.1　无旋液体的等效刚体

10.1.1　液体的运动学

液体作为不可压缩的流体，可视为特殊的质点系，即流场内每个确定位置 P 点处的流体质点所组成的质点系. 所谓**流场**是指流体所占据的空间，空间内的每个点与确定的速度相对应. 由于流体的流动，不同瞬时占据同一点的可能不是同一个流体质点. 但对每个确定的瞬时，此质点系与通常理解的质点系并无区别. 所建立的动力学方程可以描述每个时刻流场范围内流体质点的运动状态.

就本章讨论的充液陀螺而言，流体的流场 V 为刚体内的充液腔. 设 O 为刚体内的确定参考点，建立固定于刚体的参考坐标系. 为便于描述，坐标轴改记为 $x_j\,(j=1,2,3)$，以 $\boldsymbol{e}_j\,(j=1,2,3)$ 为基矢量. P 点相对 O 点的矢径 $\boldsymbol{r}$ 为

$$\boldsymbol{r}=\sum_{j=1}^{3}x_j\boldsymbol{e}_j \tag{10.1.1}$$

流场内任意点 P 的位置由 $(O-x_1x_2x_3)$ 中的坐标确定，$x_j\,(j=1,2,3)$ 可视为流体

质点的广义坐标, 它们必须满足特殊的约束条件, 即流体的连续性条件和不可压缩条件.

流场 V 中任意质点 P 相对刚体的流速 $\boldsymbol{u}$ 为坐标 $x_j\,(j=1,2,3)$ 和时间 t 的连续函数. 在 P 点处作微元六面体, 其棱边平行于 $(O-x_1x_2x_3)$ 各坐标轴. 质点的流动必须保证六面体内的流体质量守恒. 根据流体的不可压缩条件, 可导出

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}=\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}=0 \tag{10.1.2}$$

此条件可视为限制流体质点流动的非完整约束条件. 考虑刚体的牵连运动, 设刚体内 O 点的速度为 $\boldsymbol{v}_0$, 瞬时角速度为 $\boldsymbol{\omega}$, 则 P 点的绝对速度 $\boldsymbol{v}$ 为

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{u} \tag{10.1.3}$$

直接验算可证明, $\boldsymbol{v}$ 满足与式 (10.1.2) 类似的约束条件

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}=\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial v_j}{\partial x_j}=0 \tag{10.1.4}$$

其中 u_j 和 $v_j\,(j=1,2,3)$ 分别为 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 在 $(O-x_1x_2x_3)$ 中的投影.

定义以下矢量为流场的**旋度**, 记作 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}=\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2}-\frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right)\boldsymbol{e}_1+\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}-\frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right)\boldsymbol{e}_2+\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1}-\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)\boldsymbol{e}_3 \tag{10.1.5}$$

将式 (10.1.3) 代入后, 导出

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u} \tag{10.1.6}$$

利用哈密顿算子符号 $\boldsymbol{\nabla}$

$$\boldsymbol{\nabla}=\frac{\partial}{\partial x_1}\boldsymbol{e}_1+\frac{\partial}{\partial x_2}\boldsymbol{e}_2+\frac{\partial}{\partial x_3}\boldsymbol{e}_3 \tag{10.1.7}$$

可将流场的旋度表示为

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v},\quad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}=\nabla\times\boldsymbol{u} \tag{10.1.8}$$

根据斯托克斯 (Stokes) 定理, 作有旋流动的流场中沿任意封闭回路 L 的速度环量 $\boldsymbol{\Gamma}$ 可用旋度的面积积分表示为

$$\boldsymbol{\Gamma}=\oint_L\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_S(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=2\int_S\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \tag{10.1.9}$$

其中 S 为封闭路径 L 包围的曲面, $\boldsymbol{n}$ 为曲面的法向基矢量, $\boldsymbol{\Omega}$ 定义为

$$\boldsymbol{\Omega} = (\nabla \times \boldsymbol{v})/2 \tag{10.1.10}$$

$\boldsymbol{\Omega}$ 称为流体团的**涡量**, 方向与旋度相同, 模为旋度的一半.

旋度为零的流体称为**无旋流体**, 满足以下条件

$$\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = 0 \tag{10.1.11}$$

如存在以下函数 ϕ, 满足

$$v_j = \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \quad (j = 1,2,3) \quad 或 \quad \boldsymbol{v} = \nabla \varphi \tag{10.1.12}$$

代入式 (10.1.11), 此条件可自行满足. ϕ 称为无旋流体的**速度势函数**. 将式 (11.1.12) 代入连续性条件 (10.1.4), 证明势函数 ϕ 满足拉普拉斯 (Laplace) 方程, 即 ϕ 为调和函数.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\phi = \Delta\phi = 0 \quad (P \in V) \tag{10.1.13}$$

不考虑与速度梯度有关的黏性摩擦力的流体称为**理想流体**. 在本章的讨论中, 液体均被视为理想流体.

10.1.2　斯托克斯–茹可夫斯基势函数

设刚体带有全部充满无旋液体的空腔, 以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 绕固定点 O 转动 (图 10.1).

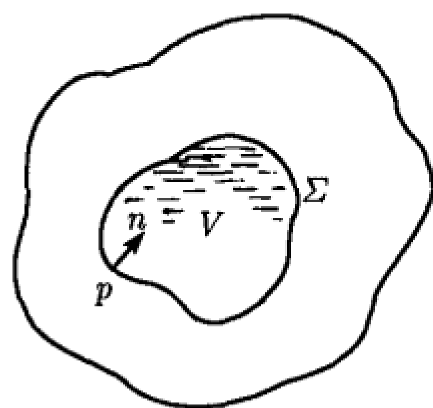


图 10.1　充液刚体

令式 (10.1.3) 中 $\boldsymbol{v}_0 = 0$, 液体质点的绝对速度为

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{u} \tag{10.1.14}$$

在液体与腔壁的界面 Σ 处, 由于液体不可能向刚体内部渗透, 也不可能脱离腔壁, 其法向流速必须为零. 写作

$$u_n = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad (P \in \Sigma) \tag{10.1.15}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为腔壁 Σ 的法向基矢量. 将上式代入式 (10.1.14), 此边界条件化作

$$v_n = (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n} = (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (P \in \Sigma) \tag{10.1.16}$$

由于无旋流体存在势函数 ϕ, 此条件可写作

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (P \in \Sigma) \tag{10.1.17}$$

定义矢量函数 $\boldsymbol{\psi}$, 使满足

$$\phi = \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\omega} \tag{10.1.18}$$

则 $\boldsymbol{\psi}$ 在 Σ 界面上应满足的条件为

$$\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial n} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{n} \quad (P \in \Sigma) \tag{10.1.19}$$

$\boldsymbol{\psi}$ 称为**斯托克斯–茹可夫斯基势函数**. 其沿 $(O - x_1x_2x_3)$ 各坐标轴的投影 $\psi_j (j = 1,2,3)$ 均为由诺伊曼 (Neumann) 边值问题确定的调和函数. 因此 $\boldsymbol{\psi}$ 完全取决于腔体的几何形状, 与刚体的运动状态无关.

10.1.3　等效刚体

将刚体和腔内液体对 O 点的动量矩分别记作 $\boldsymbol{H}^{(1)}$ 和 $\boldsymbol{H}^{(2)}$. 利用式 (10.1.12) 将 $\boldsymbol{H}^{(2)}$ 中的速度 $\boldsymbol{v}$ 用势函数 ϕ 表示, 导出

$$\boldsymbol{H}^{(2)} = \rho \int_V (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v})\, \mathrm{d}V = \rho \int_V (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\nabla}\phi)\, \mathrm{d}V \tag{10.1.20}$$

其中 ρ 为液体的密度. 计算 $\boldsymbol{H}^{(2)}$ 沿 x_1 轴的投影 $H_1^{(2)}$, 得到

$$H_1^{(2)} = \rho \int_V \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_3} x_2 - \frac{\partial \phi}{\partial x_2} x_3 \right) \mathrm{d}V = \rho \int_V \left[\frac{\partial}{\partial x_3} (\phi x_2) - \frac{\partial}{\partial x_2} (\phi x_3) \right] \mathrm{d}V \tag{10.1.21}$$

设 $n_j\, (j = 1,2,3)$ 为腔壁法向基矢量 $\boldsymbol{n}$ 对 $(O - x_1x_2x_3)$ 各轴的方向余弦, 利用高斯 (Gauss) 定理将上式化作

$$H_1^{(2)} = \rho \int_\Sigma \phi\, (x_2n_3 - x_3n_2)\, \mathrm{d}S \tag{10.1.22}$$

与此类似, $\boldsymbol{H}$ 沿 x_2, x_3 轴的投影 H_2, H_3 为

$$\begin{aligned} H_2^{(2)} &= \rho \int_\Sigma \phi\, (x_3n_1 - x_1n_3)\, \mathrm{d}S \\ H_3^{(2)} &= \rho \int_\Sigma \phi\, (x_1n_2 - x_2n_1)\, \mathrm{d}S \end{aligned} \tag{10.1.23}$$

利用导出的 $H_j^{(2)}\, (j = 1,2,3)$ 和式 (10.1.18), (10.1.19), 可将动量矩 $\boldsymbol{H}^{(2)}$ 化作

$$\boldsymbol{H}^{(2)} = \rho \int_\Sigma (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{n})\, \phi \mathrm{d}S = \rho \int_\Sigma \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial n} (\boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\omega})\, \mathrm{d}S = \left(\rho \int_\Sigma \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial n} \boldsymbol{\psi} \mathrm{d}S \right) \cdot \boldsymbol{\omega} \tag{10.1.24}$$

将上式中并矢的积分用 $\boldsymbol{J}^*$ 表示, 称为液体的**等效刚体惯性张量**, 由斯托克斯–茹可夫斯基势函数 $\boldsymbol{\psi}$ 完全确定

$$\boldsymbol{J}^* = \rho \int_\Sigma \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial n} \boldsymbol{\psi} \mathrm{d}S \tag{10.1.25}$$

则液体的动量矩等于等效刚体惯性张量与角速度矢量的点积, 类似于刚体的动量矩计算公式. 利用高斯原理将式 (10.1.25) 化作

$$\boldsymbol{J}^* = \rho\int_{\Sigma}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\psi n_k \mathrm{d}S = \rho\int_V\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\psi\right)\mathrm{d}V = \rho\int_V\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\right)\mathrm{d}V \tag{10.1.26}$$

张量 $\boldsymbol{J}^*$ 在 $(O-x_1x_2x_3)$ 中的坐标 J_{ij}^* 的计算公式为

$$J_{ij}^* = \rho\int_V\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\psi_i}{\partial x_k}\frac{\partial\psi_j}{\partial x_k}\mathrm{d}V = \rho\int_{\Sigma}\frac{\partial\psi_i}{\partial n}\psi_j\mathrm{d}S = [\psi_i,\psi_j] \tag{10.1.27}$$

其中的方括号为沿 Σ 曲面积分的简写符号. 张量 $\boldsymbol{J}^*$ 在 $(O-x_1x_2x_3)$ 中的坐标矩阵仍以 $\boldsymbol{J}^*$ 表示

$$\boldsymbol{J}^* = \begin{pmatrix} [\psi_1,\psi_1] & [\psi_1,\psi_2] & [\psi_1,\psi_3] \\ [\psi_2,\psi_1] & [\psi_2,\psi_2] & [\psi_2,\psi_3] \\ [\psi_3,\psi_1] & [\psi_3,\psi_2] & [\psi_3,\psi_3] \end{pmatrix} \tag{10.1.28}$$

因此在腔内液体做无旋运动的前提下, 即液体不存在回旋运动, 涡量 $\boldsymbol{\Omega}$ 为零的条件下, 可利用上述等效刚体概念, 将液体的运动用等效刚体代替. 后者与主刚体合并为同一刚体. 设主刚体对 O 点的惯性张量为 $\boldsymbol{J}^{(1)}$, 则刚体和液体组成的系统对 O 点的总动量矩为

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}_* \cdot \boldsymbol{\omega} \tag{10.1.29}$$

$\boldsymbol{J}_*$ 为主刚体的惯性张量 $\boldsymbol{J}^{(1)}$ 与液体的等效刚体的惯性张量 $\boldsymbol{J}^*$ 之和

$$\boldsymbol{J}_* = \boldsymbol{J}^{(1)} + \boldsymbol{J}^* \tag{10.1.30}$$

充液刚体的动能 T 亦可利用普通刚体的动能公式表达为

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{J}_*\cdot\boldsymbol{\omega} \tag{10.1.31}$$

则充液刚体的运动完全等价于普通刚体的运动.

10.1.4 椭球腔情形

等效刚体的惯性张量 $\boldsymbol{J}^*$ 由诺伊曼边值问题的解确定. 一般情况下总能用数值方法求出, 对于几何形状规则的充液腔体, 可能存在解析形式解. 以椭球腔情形为例 (图 10.2).

以椭球腔的中心为原点 O, 设 $(O-x_1x_2x_3)$ 为椭球腔的主轴坐标系, $a_j(j=1,2,3)$ 为椭球半轴, 腔壁 Σ 的曲面方程为

$$F(x_1,x_2,x_3) = \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} - 1 = 0 \tag{10.1.32}$$

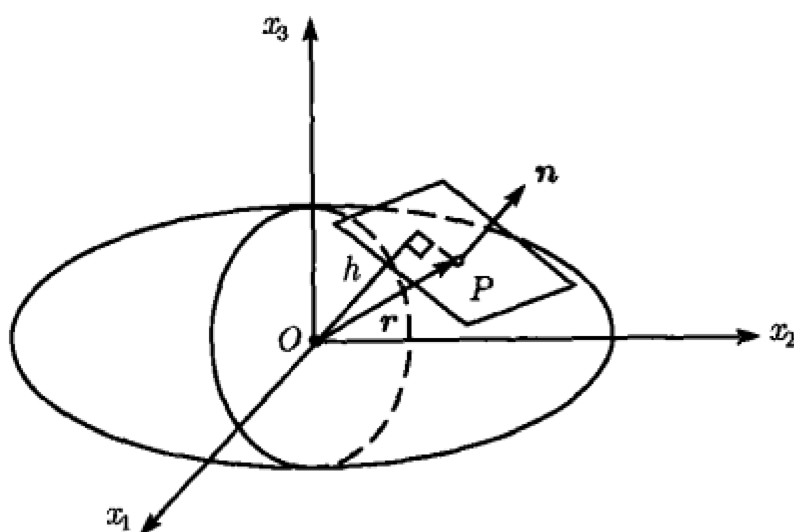


图 10.2　椭球形充液腔

Σ 曲面上任意 P 点处的法线相对 $(O-x_1x_2x_3)$ 各轴的方向余弦可利用式 (2.3.8) 计算, 得到

$$n_j = \frac{1}{|\nabla F|}\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right) = \frac{hx_j}{a_j^2} \quad (j=1,2,3) \tag{10.1.33}$$

其中参数 h 定义为

$$h = \left(\sum_{j=1}^{3}\frac{x_j^2}{a_j^2}\right)^{-1/2} = \sum_{j=1}^{3} x_j n_j \tag{10.1.34}$$

h 的几何意义为 O 点至 P 点处切平面的距离, 与 2.3.2 节中式 (2.3.9) 的解释类似. 利用式 (10.1.33), 势函数 ψ 在 Σ 边界上的边界条件为

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\psi_1}{\partial n} &= hx_2x_3\left(\frac{1}{a_3^2}-\frac{1}{a_2^2}\right)\\
\frac{\partial\psi_2}{\partial n} &= hx_3x_1\left(\frac{1}{a_1^2}-\frac{1}{a_3^2}\right)\\
\frac{\partial\psi_3}{\partial n} &= hx_1x_2\left(\frac{1}{a_2^2}-\frac{1}{a_1^2}\right)
\end{aligned}\right\} \quad (P\in\Sigma) \tag{10.1.35}$$

设势函数 ψ_1,ψ_2,ψ_3 有以下形式

$$\psi_1 = C_1x_2x_3,\quad \psi_2 = C_2x_3x_1,\quad \psi_3 = C_3x_1x_2 \tag{10.1.36}$$

代入边界条件 (10.1.35), 解出常数 $C_j\ (j=1,2,3)$ 后化作

$$\psi_1 = \left(\frac{a_2^2-a_3^2}{a_2^2+a_3^2}\right)x_2x_3,\quad \psi_2 = \left(\frac{a_3^2-a_1^2}{a_3^2+a_1^2}\right)x_3x_1,\quad \psi_3 = \left(\frac{a_1^2-a_2^2}{a_1^2+a_2^2}\right)x_1x_2 \tag{10.1.37}$$

代入式 (10.1.18), 得到

$$\phi = \left(\frac{a_2^2-a_3^2}{a_2^2+a_3^2}\right)\omega_1x_2x_3 + \left(\frac{a_3^2-a_1^2}{a_3^2+a_1^2}\right)\omega_2x_3x_1 + \left(\frac{a_1^2-a_2^2}{a_1^2+a_2^2}\right)\omega_3x_1x_2 \tag{10.1.38}$$

利用式 (10.1.27) 计算等效刚体的惯性张量, 导出

$$
\begin{aligned}
&J_{11}^* = \frac{m}{5}\frac{\left(a_2^2 - a_3^2\right)^2}{a_2^2 + a_3^2}, \quad J_{22}^* = \frac{m}{5}\frac{\left(a_3^2 - a_1^2\right)^2}{a_3^2 + a_1^2}, \quad J_{33}^* = \frac{m}{5}\frac{\left(a_1^2 - a_2^2\right)^2}{a_1^2 + a_2^2} \\
&J_{12}^* = J_{23}^* = J_{31}^* = 0
\end{aligned} \tag{10.1.39}
$$

其中 m 为全充满于椭球腔内的液体质量

$$m = \frac{4\pi}{3}\rho a_1 a_2 a_3 \tag{10.1.40}$$

作为特例, 如椭球腔为相对 x_3 轴对称的旋转椭球. 令 $a_1 = a_2$, $\lambda = a_3/a_1$ 为椭球的半轴比, 得到

$$J_{11}^* = J_{22}^* = \frac{m a_1^2 \left(\lambda^2 - 1\right)^2}{5\left(\lambda^2 + 1\right)}, \quad J_{33}^* = 0 \tag{10.1.41}$$

等效刚体缩为沿对称轴分布的直线. 如为球形腔, 令 $a_1 = a_2 = a_3$, 导出

$$J_{11}^* = J_{22}^* = J_{33}^* = 0 \tag{10.1.42}$$

等效刚体缩为一个质点. 上述结论不难从物理观点作出解释: 由于理想流体不存在黏性摩擦力, 当主刚体绕腔体的对称轴旋转时, 腔壁不可能带动原来静止的液体旋转. 对于球腔, 刚体绕任何轴旋转均不可能改变腔内液体的静止状态.

10.2　有旋液体的等效刚体

10.2.1　液体的刚体转动

先讨论刚体带有球形腔, 腔内全充满液体的特殊情形 (图 10.3). 在球形腔壁的特殊约束条件下, 允许液体团在主刚体内做整体相对转动. 充液刚体的运动与带球形刚体转子的陀螺体完全相同. 如主刚体静止, 以 $\boldsymbol{\Omega}'$ 表示液体团在主刚体内做刚体转动的相对角速度, 则流体质点的相对速度为

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\Omega}' \times \boldsymbol{r} \tag{10.2.1}$$

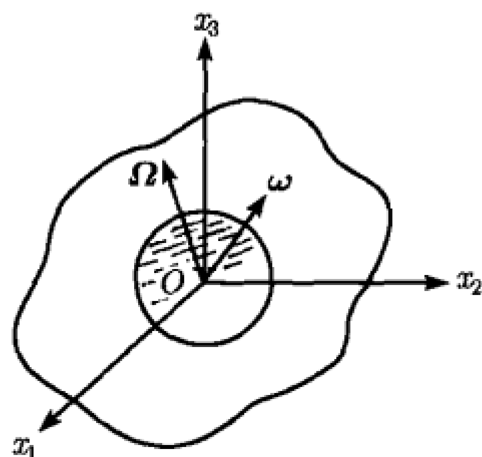


图 10.3　带球形充液腔的刚体

其在 $(O - x_1x_2x_3)$ 中的投影为

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \Omega_2' x_3 - \Omega_3' x_2 \\
u_2 &= \Omega_3' x_1 - \Omega_1' x_3 \\
u_3 &= \Omega_1' x_2 - \Omega_2' x_1
\end{aligned} \tag{10.2.2}
$$

代入式 (10.1.10), 计算涡量 $\boldsymbol{\Omega}$, 得到

$$\Omega_j = \Omega_j' \quad (j = 1, 2, 3) \tag{10.2.3}$$

从而表明, 液体团内所有点有完全相同的涡量, 此涡量 $\boldsymbol{\Omega}$ 即等于液体团的刚体转动角速度. 如主刚体以 $\boldsymbol{\omega}$ 角速度转动, 则考虑刚体的牵连运动, 液体团的绝对角速度, 即涡量应为

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}' + \boldsymbol{\omega} \tag{10.2.4}$$

液体质点的绝对速度 $\boldsymbol{v}$ 为

$$\begin{aligned} v_1 &= \Omega_2 x_3 - \Omega_3 x_2 \\ v_2 &= \Omega_3 x_1 - \Omega_1 x_3 \\ v_3 &= \Omega_1 x_2 - \Omega_2 x_1 \end{aligned} \tag{10.2.5}$$

设 $\boldsymbol{J}^{(2)}$ 为凝固的液体团相对 O 点的惯性张量, 则液体对 O 点的动量矩 $\boldsymbol{H}^{(2)}$ 为

$$\boldsymbol{H}^{(2)} = \boldsymbol{J}^{(2)} \cdot \boldsymbol{\Omega} \tag{10.2.6}$$

如 $\boldsymbol{J}^{(1)}$ 为主刚体的惯性张量, 则充液刚体类似于陀螺体, 其总动量矩可表示为

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{J}^{(2)} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{J}^{(2)} \cdot \boldsymbol{\Omega}' \tag{10.2.7}$$

其中 $\boldsymbol{J}$ 为主刚体与凝固液体组成的系统的总惯性张量

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}^{(1)} + \boldsymbol{J}^{(2)} \tag{10.2.8}$$

10.2.2　液体的均匀涡旋运动

上述液体的刚体运动只存在于球形腔, 不可能在椭球腔内实现. 但椭球腔内的液体存在一种与刚体转动接近的简单流动. 设椭球腔壁 Σ 的曲面方程如式 (10.1.32) 所示, 作以下坐标变换

$$x_j = a_j x_{0j} \quad (j = 1, 2, 3) \tag{10.2.9}$$

则变换后的椭球腔成为球腔. 设此球腔内的液体以相对角速度 $\boldsymbol{\Omega}'_0$ 做刚体转动, 液体质点的相对速度 $\boldsymbol{u}_0$ 对 $(O - x_{01}x_{02}x_{03})$ 各轴的投影 $u_{0j}\ (j = 1, 2, 3)$ 为

$$\begin{aligned} u_{01} &= \Omega'_{02} x_{03} - \Omega'_{03} x_{02} \\ u_{02} &= \Omega'_{03} x_{01} - \Omega'_{01} x_{03} \\ u_{03} &= \Omega'_{01} x_{02} - \Omega'_{02} x_{01} \end{aligned} \tag{10.2.10}$$

其中 $\Omega'_{0j}\ (j = 1, 2, 3)$ 为 $\boldsymbol{\Omega}'_0$ 在 $(O - x_{01}x_{02}x_{03})$ 中的投影. 球腔内的流速 $\boldsymbol{u}_0$ 与液体的实际流速 $\boldsymbol{u}$ 之间遵循与式 (10.2.9) 相同的比例关系

$$u_j = a_j u_{0j} \quad (j = 1, 2, 3) \tag{10.2.11}$$

利用式 (10.2.9), (10.2.11) 将式 (10.2.10) 变换为实际流速, 得到

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \frac{a_1}{a_3}\Omega'_{02}x_3 - \frac{a_1}{a_2}\Omega'_{03}x_2 \\
u_2 &= \frac{a_2}{a_1}\Omega'_{03}x_1 - \frac{a_2}{a_3}\Omega'_{01}x_3 \\
u_3 &= \frac{a_3}{a_2}\Omega'_{01}x_2 - \frac{a_3}{a_1}\Omega'_{02}x_1
\end{aligned}
\tag{10.2.12}
$$

庞加莱将这种运动称为流体在椭球腔内的**简单流动**.

液体在腔壁处法向相对速度为零的条件 (10.1.15) 要求

$$
u_1\frac{\partial F}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial F}{\partial x_2} + u_3\frac{\partial F}{\partial x_3} = 0 \tag{10.2.13}
$$

式 (10.1.32) 和 (10.2.12) 可使条件 (10.2.13) 成为恒等式. 从而证明, 液体的简单流动满足椭球腔壁的边界条件. 当刚体以 $\boldsymbol{\omega}$ 角速度转动时, 液体质点的绝对速度为

$$
\begin{aligned}
v_1 &= \omega_2 x_3 - \omega_3 x_2 + u_1 \\
v_2 &= \omega_3 x_1 - \omega_1 x_3 + u_2 \\
v_3 &= \omega_1 x_2 - \omega_2 x_1 + u_3
\end{aligned}
\tag{10.2.14}
$$

将式 (10.2.13), (10.2.11) 代入式 (10.1.5) 计算液体的涡量, 得到

$$
\begin{aligned}
\Omega_1 &= \omega_1 + \left(\frac{a_2^2 + a_3^2}{2a_2a_3}\right)\ \Omega'_{01} \\
\Omega_2 &= \omega_2 + \left(\frac{a_3^2 + a_1^2}{2a_3a_1}\right)\ \Omega'_{02} \\
\Omega_3 &= \omega_3 + \left(\frac{a_1^2 + a_2^2}{2a_1a_2}\right)\ \Omega'_{03}
\end{aligned}
\tag{10.2.15}
$$

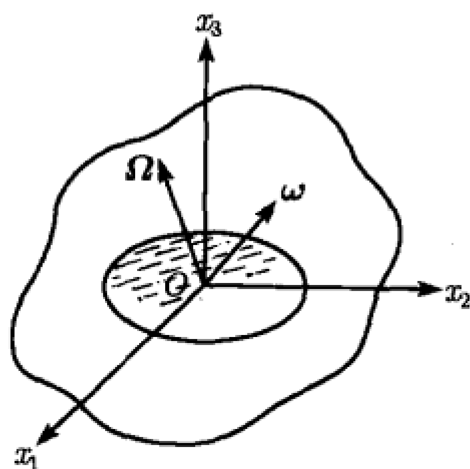


图 10.4 椭球腔内的均匀涡旋运动

算出的涡量 $\boldsymbol{\Omega}$ 与位置无关, 即流场内所有质点具有相同的涡量. 因此可将上述简单流动称为**液体的均匀涡旋运动** (图 10.4). 利用上式将式 (10.2.10) 中的 Ω'_{0j} 改用 $\Omega_{0j}\,(j=1,2,3)$ 表示, 代入式 (10.2.14), 化作

$$
\begin{aligned}
v_1 &= \Omega_2 x_3 - \Omega_3 x_2 + v_1^* \\
v_2 &= \Omega_3 x_1 - \Omega_1 x_3 + v_2^* \\
v_3 &= \Omega_1 x_2 - \Omega_2 x_1 + v_3^*
\end{aligned}
\tag{10.2.16}
$$

与式 (10.2.5) 对照可看出, 液体质点的速度由刚体转动和因腔壁的椭球度所引起的速度增量 $\boldsymbol{v}^*$ 所组成. $\boldsymbol{v}^*$ 的存在保证液体满足腔壁处的边界条件, 其投影式 $v_j^*\,(j=1,2,3)$ 为

$$\begin{aligned} v_1^* &= \left(\frac{a_3^2-a_1^2}{a_3^2+a_1^2}\right)(\omega_2-\Omega_2)\,x_3+\left(\frac{a_1^2-a_2^2}{a_1^2+a_2^2}\right)(\omega_3-\Omega_3)\,x_2 \\ v_2^* &= \left(\frac{a_1^2-a_2^2}{a_1^2+a_2^2}\right)(\omega_3-\Omega_3)\,x_1+\left(\frac{a_2^2-a_3^2}{a_2^2+a_3^2}\right)(\omega_1-\Omega_1)\,x_3 \\ v_3^* &= \left(\frac{a_2^2-a_3^2}{a_2^2+a_3^2}\right)(\omega_1-\Omega_1)\,x_2+\left(\frac{a_3^2-a_1^2}{a_3^2+a_1^2}\right)(\omega_2-\Omega_2)\,x_1 \end{aligned} \tag{10.2.17}$$

速度增量 $\boldsymbol{v}^*$ 存在势函数 ϕ, 即

$$\boldsymbol{v}^*=\nabla\phi \tag{10.2.18}$$

$$\begin{aligned} \phi = &\left(\frac{a_2^2-a_3^2}{a_2^2+a_3^2}\right)(\omega_1-\Omega_1)\,x_2x_3+\left(\frac{a_3^2-a_1^2}{a_3^2+a_1^2}\right)(\omega_2-\Omega_2)\,x_3x_1 \\ &+\left(\frac{a_1^2-a_2^2}{a_1^2+a_2^2}\right)(\omega_3-\Omega_3)\,x_1x_2 \end{aligned} \tag{10.2.19}$$

与式 (10.1.38) 比较, 此势函数与椭球腔内无旋液体的势函数相同, 仅须将其中的 $\boldsymbol{\omega}$ 换作 $\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{\Omega}$. 因此均匀涡旋运动的流动规律为刚体转动与有势流动的叠加, 即

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}+\nabla\phi \tag{10.2.20}$$

对于球腔的特殊情形, 令 $a_1=a_2=a_3$, 则附加流动和对应的势函数均不存在. 相对轴对称的旋转椭球腔为另一种特例, 即 $a_1=a_2$, 如 $\Omega_1'=\Omega_2'=0$, 附加流动亦不存在, 液体可绕腔体的对称轴做刚体转动. 一般情况下, 可将势函数写作

$$\phi=\boldsymbol{\psi}\cdot(\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{\Omega}) \tag{10.2.21}$$

$\boldsymbol{\psi}$ 为斯托克斯–茹可夫斯基势函数, 由条件 (11.1.19) 对应的诺伊曼边值问题确定.

10.2.3 有旋液体的动量矩

利用式 (10.2.20) 计算做均匀涡旋运动的液体团的动量矩 $\boldsymbol{H}^{(2)}$

$$\boldsymbol{H}^{(2)}=\rho\int_V \boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}+\nabla\phi)\,\mathrm{d}V \tag{10.2.22}$$

如主刚体静止, 令 $\boldsymbol{\omega}=0$, 导出

$$\boldsymbol{H}^{(2)}=\boldsymbol{J}'\cdot\boldsymbol{\Omega} \tag{10.2.23}$$

其中张量 $\boldsymbol{J}'$ 为凝固液体与等效刚体的惯性张量之差

$$\boldsymbol{J}' = \boldsymbol{J}^{(2)} - \boldsymbol{J}^* \tag{10.2.24}$$

表明液体团的均匀涡旋运动与惯性张量为 $\boldsymbol{J}'$, 角速度为 $\boldsymbol{\Omega}$ 的刚体转子有相同的动量矩, 两种运动等效.

如主刚体以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 转动, 则导出

$$\boldsymbol{H}^{(2)} = \boldsymbol{J}^{(2)} \cdot \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{J}^* \cdot (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega}) \tag{10.2.25}$$

充液系统的总动量矩为

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{J}^{(2)} \cdot \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{J}^* \cdot (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega}) \tag{10.2.26}$$

利用 (10.2.8), (10.1.30), (10.2.24) 等式定义的张量 $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{J}_*$, $\boldsymbol{J}'$, 动量矩 $\boldsymbol{H}$ 可表示为

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}_* \cdot \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{J}' \cdot \boldsymbol{\Omega} \tag{10.2.27}$$

利用液体相对主刚体的相对涡量 $\boldsymbol{\Omega}' = \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}$, 也可将动量矩 $\boldsymbol{H}$ 写作

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{J}' \cdot \boldsymbol{\Omega}' \tag{10.2.28}$$

与液体在球腔内做刚体运动的动量矩公式 (10.2.7) 类似, 仅其中凝固液体的惯性张量 $\boldsymbol{J}^{(2)}$ 以扣除 $\boldsymbol{J}^*$ 的张量 $\boldsymbol{J}'$ 代替.

10.3　旋转液体的动力学方程

10.3.1　欧拉水动力学方程

在流场内任意 P 点处作棱边平行于 x_1, x_2, x_3 各轴的微元六面体, 根据此微元流体团内惯性力、压力和体积力的平衡导出理想流体的动力学方程

$$\rho \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \rho \boldsymbol{f} - \nabla p = 0 \tag{10.3.1}$$

其中 p 为压强, $\boldsymbol{f}$ 为单位体积的比力. 令 $\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t$ 的求导过程相对主刚体进行, 以波浪号表示相对主刚体的局部导数, 设 $\boldsymbol{\omega}$ 为主刚体的角速度, 则有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} \tag{10.3.2}$$

流场内的流速 $\boldsymbol{v}$ 为坐标 $x_j\,(j = 1, 2, 3)$ 和时间 t 的连续函数, 导数 $\tilde{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t$ 可展开为

$$\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_j} u_j + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\,\boldsymbol{v} + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} \tag{10.3.3}$$

将式 (10.3.2), (10.3.3) 代入式 (10.3.1), 得到

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{f}-\frac{1}{\rho}\nabla p=0 \tag{10.3.4}$$

即理想流体的动力学方程, 称为**欧拉水动力学方程**.

10.3.2　亥姆霍兹方程

对方程 (10.3.4) 的各项计算旋度, 利用 $\mathrm{rot}\nabla=\mathbf{0}$ 及以下关系式

$$\mathrm{rot}\,(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v}=2\,(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{\Omega}-2\,(\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\omega}\cdot(\nabla\boldsymbol{v}) \tag{10.3.5a}$$

$$\mathrm{rot}\,(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v})=2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\Omega}-\boldsymbol{\omega}\cdot(\nabla\boldsymbol{v}) \tag{10.3.5b}$$

且设体积力 $\boldsymbol{f}=\nabla U$ 为以 U 为势函数的有势力, 其旋度为零. 导出

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\Omega}=(\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v} \tag{10.3.6}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}=(\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v} \tag{10.3.7}$$

此方程不包含压强 p 和体积力 $\boldsymbol{f}$, 以涡量 $\boldsymbol{\Omega}$ 为未知变量, 称为**亥姆霍兹方程**, 是描述有旋流体运动的另一种形式动力学方程. 一般情况下, 亥姆霍兹方程 (10.3.7) 中的 $\boldsymbol{\Omega}$ 为坐标 $x_j\,(j=1,2,3)$ 和时间 t 的函数. 对于椭圆腔内流动为均匀涡旋运动的特殊情形, 流场内各点有相同的涡量, $\boldsymbol{\Omega}$ 仅为时间 t 的函数, 方程 (10.3.7) 为常微分方程.

将式 (10.2.16), (10.2.17) 代入方程 (10.3.7), 导出其投影式

$$\frac{\mathrm{d}\Omega_1}{\mathrm{d}t}=2a_1^2\left[\frac{\omega_3\Omega_2}{a_1^2+a_2^2}-\frac{\omega_2\Omega_3}{a_1^2+a_3^2}+\frac{a_2^2-a_3^2}{(a_1^2+a_2^2)\,(a_1^2+a_3^2)}\Omega_2\Omega_3\right] \tag{10.3.8a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Omega_2}{\mathrm{d}t}=2a_2^2\left[\frac{\omega_1\Omega_3}{a_2^2+a_3^2}-\frac{\omega_3\Omega_1}{a_2^2+a_1^2}+\frac{a_3^2-a_1^2}{(a_2^2+a_3^2)\,(a_2^2+a_1^2)}\Omega_3\Omega_1\right] \tag{10.3.8b}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Omega_3}{\mathrm{d}t}=2a_3^2\left[\frac{\omega_2\Omega_1}{a_3^2+a_1^2}-\frac{\omega_1\Omega_2}{a_3^2+a_2^2}+\frac{a_1^2-a_2^2}{(a_3^2+a_1^2)\,(a_3^2+a_2^2)}\Omega_1\Omega_2\right] \tag{10.3.8c}$$

如椭球腔相对 x_3 轴对称, 令 $a_1=a_2$, $\lambda=a_3/a_1$, 方程组 (10.3.8) 简化为

$$(1+\lambda^2)\left(\frac{\mathrm{d}\Omega_1}{\mathrm{d}t}-\omega_3\Omega_2\right)+2\omega_2\Omega_3-\left(1-\lambda^2\right)\Omega_2\Omega_3=0 \tag{10.3.9a}$$

$$\left(1+\lambda^2\right)\left(\frac{\mathrm{d}\Omega_2}{\mathrm{d}t}-\omega_3\Omega_1\right)-2\omega_1\Omega_3+\left(1-\lambda^2\right)\Omega_1\Omega_3=0 \tag{10.3.9b}$$

$$\left(1+\lambda^2\right)\frac{\mathrm{d}\Omega_3}{\mathrm{d}t}+2\lambda^2\left(\omega_1\Omega_2-\omega_2\Omega_1\right)=0 \tag{10.3.9c}$$

10.3.3 涡量守恒定理

将方程组 (10.3.8) 各式分别乘以 $a_2^2a_3^2\Omega_1, a_3^2a_1^2\Omega_2, a_1^2a_2^2\Omega_3$ 后相加, 得到

$$a_2^2a_3^2\Omega_1\frac{\mathrm{d}\Omega_1}{\mathrm{d}t}+a_3^2a_1^2\Omega_2\frac{\mathrm{d}\Omega_2}{\mathrm{d}t}+a_1^2a_2^2\Omega_3\frac{\mathrm{d}\Omega_3}{\mathrm{d}t}=0 \tag{10.3.10}$$

积分得到

$$a_2^2a_3^2\Omega_1^2+a_3^2a_1^2\Omega_2^2+a_1^2a_2^2\Omega_3^2=\text{常数} \tag{10.3.11}$$

此初积分称为**亥姆霍兹涡量守恒定理.**

对于旋转椭球情形, 初积分 (10.3.11) 化作

$$\lambda^2\left(\Omega_1^2+\Omega_2^2\right)+\Omega_3^2=\text{常数} \tag{10.3.12}$$

如为球形腔, 令 $\lambda=1$, 化作

$$\Omega=\text{常数} \tag{10.3.13}$$

即涡量的模不随时间改变. 由于理想流体在球腔内处于无力矩状态, 此结论是动量矩守恒的必然结果.

10.3.4 平均化的亥姆霍兹方程

椭球腔是液体能实现均匀涡旋运动的唯一几何形状的腔体. 除椭球腔以外的任何形状腔内部均不可能有均匀涡旋运动存在. 1974 年普费弗建议, 对于非椭球形腔可将流场内各点的涡量在腔内平均化, 所得到的平均涡量用于近似代替液体的实际涡量. 液体的运动近似地用平均化的均匀涡旋运动描述, 称为**准均匀涡旋运动**. 从而将上述结论的适用范围扩大到非椭球腔的更一般情形.

对于全充于任意轴对称腔体内的液体, 其涡量的平均值为**平均涡量**, 记作 $\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{a}}$

$$\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{a}}=\frac{1}{V}\int_V\boldsymbol{\Omega}\mathrm{d}V \tag{10.3.14}$$

将方程 (10.3.7) 的两边在流场 V 中作平均化, 得到平均化的亥姆霍兹方程

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{a}}}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{V}\int_V\left(\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\boldsymbol{v}\mathrm{d}V \tag{10.3.15}$$

设腔内液体的流动接近于均匀涡旋运动, 其流速接近于式 (10.2.20) 描述的分布规律. 仅其中的涡量 $\boldsymbol{\Omega}$ 以平均涡量 $\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{a}}$ 代替

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{a}}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\nabla}\phi \tag{10.3.16}$$

将上式代入平均化亥姆霍兹方程 (10.3.15) 的右边, 且利用以下关系式

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla)\cdot(\boldsymbol{\Omega}_{\rm a}\times\boldsymbol{r}) &= \sum_{j=1}^{3}\Omega_j\frac{\partial}{\partial x_j}[(\boldsymbol{\Omega}_{\rm a}\times\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{e}_j]\,\boldsymbol{e}_j \\
&= \sum_{j=1}^{3}\Omega_j\,[(\boldsymbol{\Omega}_{\rm a}\times\boldsymbol{e}_j)\cdot\boldsymbol{e}_j]\,\boldsymbol{e}_j \\
&= \sum_{j=1}^{3}\Omega_j\,[(\boldsymbol{e}_j\times\boldsymbol{e}_j)\cdot\boldsymbol{\Omega}_{\rm a}]\,\boldsymbol{e}_j = 0
\end{aligned}
\tag{10.3.17}
$$

导出

$$
\frac{1}{V}\int_V(\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v}\mathrm{d}V = \frac{1}{V}\int_V(\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla)\,(\boldsymbol{\Omega}_{\rm a}\times\boldsymbol{r}+\nabla\phi)\,\mathrm{d}V = \frac{1}{V}\int_V(\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla)\,\nabla\phi\mathrm{d}V
\tag{10.3.18}
$$

设充液刚体的稳态运动是主刚体连同凝固的液体以角速度 ω_0 绕对称轴, 即 x_3 轴作同步的永久转动. 在受扰运动中略去 $|\boldsymbol{\Omega}_{\rm a}-\omega_0\boldsymbol{e}_3|$, $|\boldsymbol{\omega}-\omega_0\boldsymbol{e}_3|$, $|\nabla\phi|$ 等扰动量的二阶以上小量, 使用图 10.5 所示的柱坐标 r,θ,z, 利用高斯定理将式 (10.3.18) 化作

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{V}\int_V(\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla)\,\nabla\phi\mathrm{d}V &= \frac{\omega_0}{V}\int_V\frac{\partial}{\partial x_3}(\nabla\phi)\,\mathrm{d}V \\
&= \frac{\omega_0}{V}\int_\Sigma\nabla\phi n_3\mathrm{d}S
\end{aligned}
\tag{10.3.19}
$$

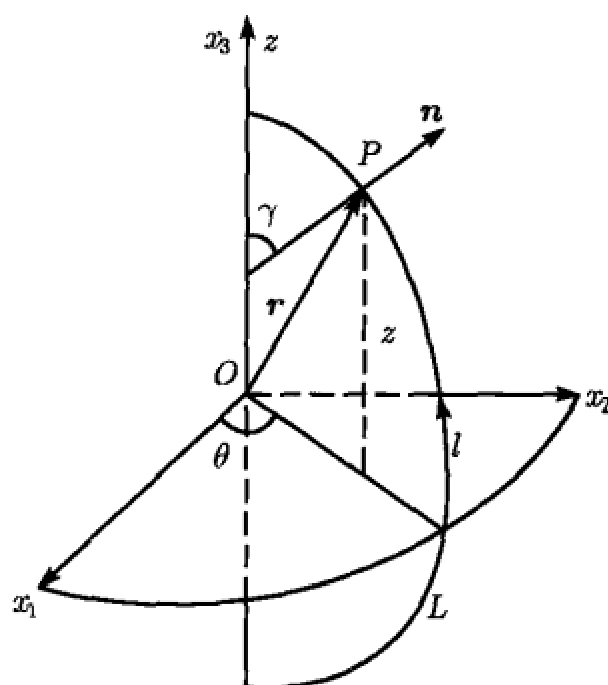


图 10.5 表示轴对称腔壁上任意点位置的柱坐标

其中 n_3 为 Σ 曲面上任意点处的法线 $\boldsymbol{n}$ 相对 x_3 轴的方向余弦. 设 l 为沿腔壁母线 L 的曲线坐标, 则有

$$
n_3\mathrm{d}l = -\mathrm{d}r \tag{10.3.20}
$$

可将式 (10.3.19) 化作

$$
\frac{\omega_0}{V}\int_\Sigma\nabla\phi n_3\mathrm{d}S = \frac{\omega_0}{V}\int_L\int_0^{2\pi}\nabla\phi n_3 r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}l = -\frac{\omega_0}{V}\int_L\left(\int_0^{2\pi}\nabla\phi\mathrm{d}\theta\right)r\mathrm{d}r \tag{10.3.21}
$$

将式 (10.2.21) 表示的势函数 ϕ 中的涡量 $\boldsymbol{\Omega}$ 以平均涡量 $\boldsymbol{\Omega}_{\rm a}$ 代替, 写作

$$
\phi = \boldsymbol{\psi}\cdot(\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{\Omega}_{\rm a}) \tag{10.3.22}
$$

导出

$$
\int_0^{2\pi}\nabla\phi\mathrm{d}\theta = \left(\int_0^{2\pi}\nabla\psi\mathrm{d}\theta\right)\cdot(\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{\Omega}_{\rm a}) \tag{10.3.23}
$$

将斯托克斯–茹可夫斯基势函数 $\boldsymbol{\psi}$ 分离变量, 写作

$$\boldsymbol{\psi}=\psi(r,z)\cdot(\sin\theta\boldsymbol{e}_1-\cos\theta\boldsymbol{e}_2) \tag{10.3.24}$$

用柱坐标表示哈密顿算子 ∇

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial r}\cos\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\right)\boldsymbol{e}_1+\left(\frac{\partial}{\partial r}\sin\theta+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\cos\theta\right)\boldsymbol{e}_2+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{e}_3 \tag{10.3.25}$$

则并矢 $\nabla\boldsymbol{\psi}$ 相对 $(O-x_1x_2x_3)$ 的坐标矩阵为

$$\nabla\boldsymbol{\psi}=\begin{pmatrix}\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial r}-\dfrac{\psi}{r}\right)\cos\theta\sin\theta & -\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial r}\right)\cos^2\theta+\dfrac{\psi}{r}\sin^2\theta & 0\\ \left(\dfrac{\partial\psi}{\partial r}\right)\sin^2\theta+\dfrac{\psi}{r}\cos^2\theta & -\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial r}-\dfrac{\psi}{r}\right)\cos\theta\sin\theta & 0\\ \dfrac{\partial\psi}{\partial z}\sin\theta & -\dfrac{\partial\psi}{\partial z}\cos\theta & 0\end{pmatrix} \tag{10.3.26}$$

代入式 (10.3.23) 中 $\nabla\boldsymbol{\psi}$ 的积分, 导出

$$\int_0^{2\pi}\nabla\psi\mathrm{d}\theta=\pi\begin{pmatrix}0 & -\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial r}+\dfrac{\psi}{r}\right) & 0\\ \dfrac{\partial\psi}{\partial r}+\dfrac{\psi}{r} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{10.3.27}$$

再代入式 (10.3.23), 简化为

$$\int_0^{2\pi}\nabla\phi\mathrm{d}\theta=\pi\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\psi}{r}\right)[\boldsymbol{e}_3\times(\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{\Omega}_\mathrm{a})] \tag{10.3.28}$$

依次代入 (10.3.21), (10.3.19), (10.3.18) 等式, 导出

$$\frac{1}{V}\int_V(\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\mathrm{d}V=-\omega_0\Gamma[\boldsymbol{e}_3\times(\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{\Omega}_\mathrm{a})] \tag{10.3.29}$$

其中 Γ 为影响平均涡量变化率的参数, 由沿轴对称腔体母线 L 的曲线积分确定

$$\Gamma=\frac{\pi}{V}\int_L\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}+\psi\right)\mathrm{d}r \tag{10.3.30}$$

令方程 (10.3.15) 中的求导过程相对动参考坐标系进行, 后者的角速度为 $\boldsymbol{\omega}_1$, 将式 (11.3.29) 代入后, 平均化的亥姆霍兹方程 (10.3.15) 化作

$$\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{\Omega}_\mathrm{a}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{\Omega}_\mathrm{a}+\omega_0\Gamma[\boldsymbol{e}_3\times(\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{\Omega}_\mathrm{a})]=0 \tag{10.3.31}$$

也可用主刚体内的相对平均涡量 $\boldsymbol{\Omega}'_\mathrm{a}=\boldsymbol{\Omega}_\mathrm{a}-\boldsymbol{\omega}$ 表示为

$$\frac{\tilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{\Omega}'_\mathrm{a}+\boldsymbol{\omega})+\boldsymbol{\omega}_1\times(\boldsymbol{\Omega}'_\mathrm{a}+\boldsymbol{\omega})-\omega_0\Gamma(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{\Omega}'_\mathrm{a})=0 \tag{10.3.32}$$

10.3.5　旋转椭球腔情形

对于母线为任意形状的轴对称腔, 参数 Γ 总能用数值方法得出. 如腔体具有简单几何形状, 则有可能导出 Γ 的解析式. 以旋转椭球形腔为例. 将直角坐标表示的椭球面方程 (10.1.32) 变换为柱坐标, 令

$$x_1 = r\cos\theta,\ \ x_2 = r\sin\theta,\ \ x_3 = z \tag{10.3.33}$$

且令 $a_1 = a_2$, $\lambda = a_3/a_1$, 导出腔体的母线方程

$$z(r) = \pm\lambda\sqrt{a_1^2 - r^2} \tag{10.3.34}$$

椭球腔的斯托克斯–茹可夫斯基势函数 ψ 已在式 (10.1.37) 中给出. 利用式 (10.3.3) 变换为用柱坐标表示

$$\psi_1 = \psi\sin\theta,\ \ \psi_2 = -\psi\cos\theta,\ \ \ \psi_3 = 0 \tag{10.3.35}$$

其中

$$\psi(r,z) = \left(\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}\right)rz \tag{10.3.36}$$

将式 (10.3.34), (10.3.35) 代入式 (10.3.30), 令 $V = 4\pi\lambda a_1^3/3$, 且利用式 (10.3.34) 消去 z. 对母线的上半段 $(\mathrm{d}r < 0)$ 和下半段 $(\mathrm{d}r > 0)$ 分别积分, 叠加后得到

$$\Gamma = \frac{3}{a_1^3}\left(\frac{\lambda^2-1}{\lambda^2+1}\right)\int_0^{a_1} r\sqrt{a_1^2 - r^2}\mathrm{d}r = \frac{\lambda^2-1}{\lambda^2+1} \tag{10.3.37}$$

圆柱形腔是存在解析积分的另一特例, 其用柱坐标表示的解析形式势函数 ψ 由茹可夫斯基导出. 对于半径为 a, 半高为 h 的圆柱腔, 解析形式的参数 Γ 为

$$\Gamma = 1 - \frac{4a}{h}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\mathrm{th}\left(\zeta_j h/a\right)}{\zeta_j\left(\zeta_j - 1\right)} \tag{10.3.38}$$

其中 $\zeta_j\,(j = 1, 2, \cdots)$ 为一阶贝塞尔函数 $J_1(x)$ 的导数零点. 具体的推导过程可参阅文献 [46].

10.4　充液刚体动力学

10.4.1　充液刚体动力学方程

在讨论刚体与液体组成的混合系统的动力学问题时, 为与前面各章讨论刚体运动时采用的参考坐标系 $(O - xyz)$ 取得统一, 将本章前三节中的流体力学分析使用

过的坐标系 $(O-x_1x_2x_3)$ 改为 $(O-xyz)$. 各变量的下角标 1,2,3 也相应地改为 x,y,z.

设由刚体和全充满于椭球腔的有旋理想液体组成的系统相对 O 点做定点运动. 系统对 O 点的动量矩 $\boldsymbol{H}$ 的表达式如式 (10.2.27) 所示. 其动力学方程可由动量矩定理 (2.2.23) 导出. 将刚体的连体主轴坐标系 $(O-xyz)$ 取作参考坐标系, 写作

$$\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{M} \tag{10.4.1}$$

设各惯性张量 $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{J}_*$, $\boldsymbol{J}'$ 在 $(O-xyz)$ 中的主惯性矩分别为

$$\begin{array}{llll} \boldsymbol{J}: & A & B & C \\ \boldsymbol{J}_*: & A_* & B_* & C_* \\ \boldsymbol{J}': & A' & B' & C' \end{array} \tag{10.4.2}$$

将式 (10.2.27) 代入式 (10.4.1), 导出其投影式

$$A\dot{\omega}_x+A'\dot{\Omega}'_x+(C-B)\,\omega_y\omega_z+C'\omega_y\Omega'_z-B'\omega_z\Omega'_y=M_x \tag{10.4.3a}$$

$$B\dot{\omega}_y+B'\dot{\Omega}'_y+(A-C)\,\omega_x\omega_z+A'\omega_z\Omega'_x-C'\omega_x\Omega'_z=M_y \tag{10.4.3b}$$

$$C\dot{\omega}_z+C'\dot{\Omega}'_z+(B-A)\,\omega_x\omega_y+B'\omega_x\Omega'_y-A'\omega_y\Omega'_x=M_z \tag{10.4.3c}$$

将亥姆霍兹方程 (10.3.8) 中变量的下角标改为 x,y,z, 写作

$$\frac{\mathrm{d}\Omega_x}{\mathrm{d}t}=2a_1^2\left[\frac{\omega_z\Omega_y}{a_1^2+a_2^2}-\frac{\omega_y\Omega_z}{a_1^2+a_3^2}+\frac{a_2^2-a_3^2}{(a_1^2+a_2^2)\,(a_1^2+a_3^2)}\Omega_y\Omega_z\right] \tag{10.4.4a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Omega_y}{\mathrm{d}t}=2a_2^2\left[\frac{\omega_x\Omega_z}{a_2^2+a_3^2}-\frac{\omega_z\Omega_x}{a_2^2+a_1^2}+\frac{a_3^2-a_1^2}{(a_2^2+a_3^2)\,(a_2^2+a_1^2)}\Omega_z\Omega_x\right] \tag{10.4.4b}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Omega_z}{\mathrm{d}t}=2a_3^2\left[\frac{\omega_y\Omega_x}{a_3^2+a_1^2}-\frac{\omega_x\Omega_y}{a_3^2+a_2^2}+\frac{a_1^2-a_2^2}{(a_3^2+a_1^2)\,(a_3^2+a_2^2)}\Omega_x\Omega_y\right] \tag{10.4.4c}$$

列出式 (10.2.4) 的投影式

$$\Omega'_x=\Omega_x-\omega_x,\ \ \Omega'_y=\Omega_y-\omega_y,\ \ \Omega'_z=\Omega_z-\omega_z \tag{10.4.5}$$

欧拉方程 (10.4.3) 与亥姆霍兹方程 (10.4.4) 及式 (10.4.5) 组成封闭的方程组, 可解出 9 个未知变量: $\Omega_x,\Omega_y,\Omega_z,\omega_x,\omega_y,\omega_z,\Omega'_x,\Omega'_y,\Omega'_z$, 以确定充液刚体的运动规律.

设刚体和充液腔均为相对 x_3 轴的轴对称体, 令 $a_1=a_2$, $A=B$, $A_*=B_*$, $A'=B'$. 对于充液腔为非椭球腔的更一般情形, 上述动力学方程中的相对涡量 $\boldsymbol{\Omega}'$ 可用平均相对涡量 $\boldsymbol{\Omega}'_{\mathrm{a}}$ 近似地代替. 设系统无外力矩作用, 其稳态运动为主刚体连同腔

内液体以角速度 ω_0 绕 x_3 轴做同步的永久转动. 为简化符号, 略去平均涡量 $\boldsymbol{\Omega}'_{\mathrm{a}}$ 的下标 a, 仅保留 $\omega_x, \omega_y, \omega_z-\omega_0, \boldsymbol{\Omega}'_x, \boldsymbol{\Omega}'_y, \boldsymbol{\Omega}'_z$ 的一阶微量, 方程组 (10.4.3) 简化为

$$A\dot{\omega}_x + A'\Omega'_x - (A-C)\,\omega_0\omega_y - A'\omega_0\Omega'_y = 0 \tag{10.4.6a}$$

$$A\dot{\omega}_y + A'\Omega'_y + (A-C)\,\omega_0\omega_x + A'\omega_0\Omega'_x = 0 \tag{10.4.6b}$$

$$C\dot{\omega}_z + C'\Omega'_z = 0 \tag{10.4.6c}$$

将轴对称腔情形的亥姆霍兹方程 (10.3.9) 中变量的下角标改为 x, y, z, 写作

$$\left(1+\lambda^2\right)\left(\frac{\mathrm{d}\Omega_x}{\mathrm{d}t} - \omega_z\Omega_y\right) + 2\omega_y\Omega_z - \left(1-\lambda^2\right)\Omega_y\Omega_z = 0 \tag{10.4.7a}$$

$$\left(1+\lambda^2\right)\left(\frac{\mathrm{d}\Omega_y}{\mathrm{d}t} - \omega_z\Omega_x\right) - 2\omega_x\Omega_z + \left(1-\lambda^2\right)\Omega_x\Omega_z = 0 \tag{10.4.7b}$$

$$\left(1+\lambda^2\right)\frac{\mathrm{d}\Omega_z}{\mathrm{d}t} + 2\lambda^2\left(\omega_x\Omega_y - \omega_y\Omega_x\right) = 0 \tag{10.4.7c}$$

以量纲为一的时间 $\tau = \omega_0 t$ 为自变量, 仍保留速度、角速度及求导符号不变. 且引入以下复变量

$$\zeta = \omega_x + \mathrm{i}\omega_y,\;\; w = \Omega'_x + \mathrm{i}\Omega'_y \tag{10.4.8}$$

将方程 (10.4.6a), (10.4.6b) 合并为复数方程

$$A\dot{\zeta} + \mathrm{i}\,(A-C)\,\zeta + A'\dot{w} + \mathrm{i}A'w = 0 \tag{10.4.9}$$

方程 (10.4.7a), (10.4.7b) 略去二阶微量后, 亦化作复数形式

$$\left(1+\lambda^2\right)\left(\dot{\zeta}+\dot{w}\right) + 2\mathrm{i}w = 0 \tag{10.4.10}$$

10.4.2　欧拉情形充液刚体

设刚体和腔体均相对 z 轴对称, 腔内全充有旋理想液体. 讨论此系统无力矩作用时绕固定点 O 的运动, 即欧拉情形充液刚体的定点运动. 无力矩状态下系统相对 O 点的动量矩守恒. 以 O 为原点建立惯性坐标系 $(O-\xi\eta\zeta)$, 令 ζ 轴与守恒的动量矩矢量 $\boldsymbol{H}$ 一致. 轴对称刚体相对 $(O-\xi\eta\zeta)$ 的姿态用 3.2.1 节定义的卡尔丹角 α, β, φ 表示. 设连体坐标系从 $(O-\xi\eta\zeta)$ 位置出发, 首先绕 ξ 轴转动 α 角到达 $(O-x_0y_0z_0)$ 位置, 再绕 y_0 轴转动 β 角到达 $(O-xyz)$ 位置, 最后绕 z 轴转动 φ 角到达 $(O-x_{\mathrm{R}}y_{\mathrm{R}}z_{\mathrm{R}})$ 位置 (图 10.6). $(O-xyz)$ 为轴对称刚体的莱查坐标系. 各坐标系之间的关系如图 3.4 所示.

$$(O-\xi\eta\zeta)\;\underset{\xi,\,x_0}{\overset{\alpha}{\longrightarrow}}\;(O-x_0y_0z_0)\;\underset{y_0,\,y}{\overset{\beta}{\longrightarrow}}\;(O-xyz)\;\underset{z,\,z_{\mathrm{R}}}{\overset{\varphi}{\longrightarrow}}\;(O-x_{\mathrm{R}}y_{\mathrm{R}}z_{\mathrm{R}})$$

设充液刚体的稳态运动为主刚体连同凝固的液体以角速度 $\boldsymbol{\omega}_0$ 绕与 ζ 轴重合的极轴 z 做永久转动. 受扰后 z 轴在 ζ 轴附近有微小偏离, α,β 为小量. 仅保留其一次项时, 动量矩 $\boldsymbol{H}$ 相对 $(O-xyz)$ 的投影为

$$H_x=-H\beta,\quad H_y=H\alpha,\quad H_z=H \tag{10.4.11}$$

刚体的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 在 $(O-xyz)$ 中的投影为

$$\omega_x=\dot{\alpha},\quad \omega_y=\dot{\beta},\quad \omega_z=\dot{\varphi} \tag{10.4.12}$$

利用充液刚体的动量矩公式 (10.2.28), $\boldsymbol{H}$ 的投影也可用角速度和平均相对涡量表示. 写作

$$H_x=A\omega_x+A'\Omega_x',\ \ H_y=A\omega_y+A'\Omega_y',\ \ H_z=C\omega_z+C'\Omega_z' \tag{10.4.13}$$

令上式与式 (10.4.11) 逐项相等, 且将式 (11.4.12) 代入, 得到

$$A\dot{\alpha}+H\beta+A'\Omega_x'=0 \tag{10.4.14a}$$

$$A\dot{\beta}-H\alpha+A'\Omega_y'=0 \tag{10.4.14b}$$

$$\dot{\varphi}=\omega_0-(C'/C)\,\Omega_z' \tag{10.4.14c}$$

其中 $\omega_0=H/C$ 为永久转动角速度. 式 (10.4.14) 包含的 3 个方程可视为无力矩条件下欧拉方程的初积分. 相对涡量 $\boldsymbol{\Omega}'$ 应满足平均化亥姆霍兹方程 (10.3.32), 其中的动坐标系为莱查坐标系 $(O-xyz)$, 其角速度为

$$\omega_{1x}=\dot{\alpha},\quad \omega_{1y}=\dot{\beta},\quad \omega_{1z}=0 \tag{10.4.15}$$

将其中的基矢量 $\boldsymbol{e}_3$ 以 $\boldsymbol{k}$ 代替, 仅保留扰动量 $\dot{\alpha},\dot{\beta}$ 及 $\omega_z-\omega_0,\Omega_x',\Omega_y',\Omega_z'$ 的一次项, 写作

$$\frac{\tilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\Omega}'\right)-\omega_0\boldsymbol{k}\times\left(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{R}}+\Gamma\boldsymbol{\Omega}'\right)=0 \tag{10.4.16}$$

将式 (10.4.12), (10.4.15) 代入上式, 其沿 z 轴的投影式表明绝对涡量 Ω_z 为常值, 沿 x 和 y 轴的投影式为

$$\ddot{\alpha}+\omega_0\dot{\beta}+\dot{\Omega}'_x+\Gamma\omega_0\Omega_y'=0 \tag{10.4.17a}$$

$$\ddot{\beta}-\omega_0\dot{\alpha}+\dot{\Omega}'_y-\Gamma\omega_0\Omega_x'=0 \tag{10.4.17b}$$

以量纲为一的时间 $\tau=\omega_0 t$ 为自变量, 除式 (10.4.7) 定义的复变量 w 以外, 再引入复变量 z

$$z=\alpha+\mathrm{i}\beta \tag{10.4.18}$$

将方程 (10.4.14a) 和 (10.4.14b), (10.4.17a) 与 (10.4.17b) 合并为复数方程

$$\dot{z} - \mathrm{i}\Lambda z + \gamma w = 0 \tag{10.4.19a}$$

$$\ddot{z} - \mathrm{i}\dot{z} + \dot{w} - \mathrm{i}\Gamma w = 0 \tag{10.4.19b}$$

其中

$$\Lambda = \frac{C}{A}, \quad \gamma = \frac{A'}{A} \tag{10.4.20}$$

为避免与椭球的半轴比 λ 混淆, 此处用大写的 Λ 表示惯性矩比.

将 z, w 的指数形式特解代入复数方程组 (10.4.19)

$$z = Z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma\tau}, \quad w = W\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma\tau} \tag{10.4.21}$$

导出频率方程

$$(1-\gamma)\sigma^2 - (\Gamma + \Lambda - \gamma)\sigma + \Lambda\Gamma = 0 \tag{10.4.22}$$

根据此方程特征根为实根的条件判断, 自旋充液刚体的一次近似稳定性条件为

$$(\Gamma + \Lambda - \gamma)^2 - 4\Lambda\Gamma(1-\gamma) \begin{array}{ll} \geqslant 0 & \text{稳定} \\ < 0 & \text{不稳定} \end{array} \tag{10.4.23}$$

参数 γ 介于 0 与 1 之间, 当 $\Gamma \leqslant 0$ 时, 稳定性条件 (10.4.23) 恒满足. 根据椭球腔情形的式 (10.3.37) 估计, $\Gamma \leqslant 0$ 对应于 $\lambda \leqslant 1$, 即 $a_3 \leqslant a_1$ 情形. 因此带扁椭球充液腔的刚体绕对称轴的自旋运动必稳定. 对于 $a_3 > a_1$ 的长椭球腔情形, $\Gamma > 0$, 将条件 (10.4.23) 展开后化作

$$\Lambda^2 - 2(\Gamma + \gamma - 2\Gamma\gamma)\Lambda + (\Gamma - \gamma)^2 \geqslant 0 \tag{10.4.24}$$

此方程确定 Λ 的两个实根

$$\Lambda_{1,2} = \Gamma + \gamma - 2\Gamma\gamma \pm 2\sqrt{\Gamma\gamma(1-\gamma)(1-\Gamma)} \tag{10.4.25}$$

则稳定性条件转化为

$$\begin{array}{ll} \Lambda \geqslant \Lambda_1 \ \text{或} \ \Lambda \leqslant \Lambda_2 & \text{稳定} \\ \Lambda_1 > \Lambda > \Lambda_2 & \text{不稳定} \end{array} \tag{10.4.26}$$

图 10.6 给出 (γ, Λ) 参数平面内不同 Γ 对应的稳定域. 由封闭曲线组成的不稳定域均集中在 $\Lambda < 1$ 范围内, 则 $\Lambda \geqslant 1$ 必稳定. 从而证明, 刚体绕最大惯性主轴自旋时, 即使带有长椭球充液腔仍满足一次近似稳定性条件.

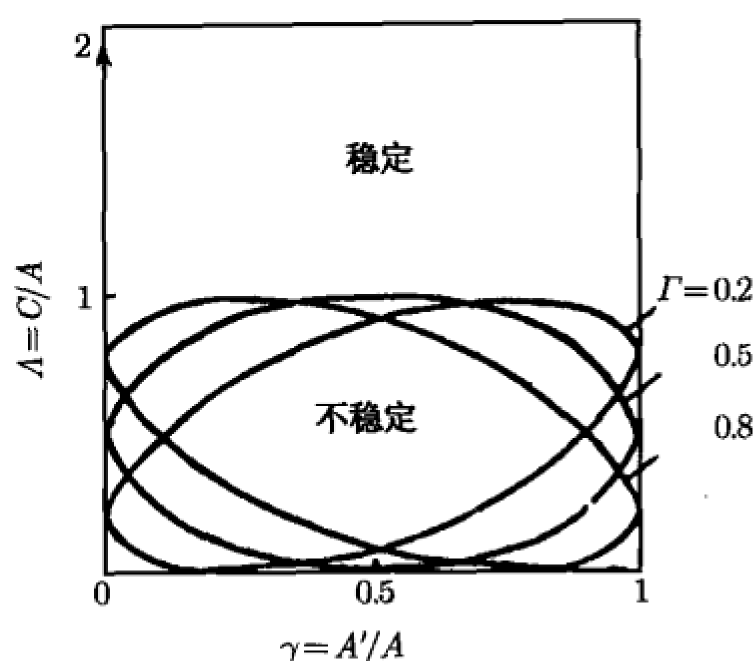


图 10.6　欧拉情形自旋充液刚体的稳定域

上述结论可用于解释开尔文问题①. 1877 年开尔文在薄壁球形充液腔的旋转实验中, 发现其自旋运动处于临界稳定状态. 当陀螺外形稍趋扁平时旋转轴保持稳定, 而稍趋细长即出现强烈不稳定现象. 为解释此现象, 设充液腔为旋转椭球形薄壁壳体, 主刚体的质量忽略不计, 椭球液体团的主惯性矩等参数为

$$A = J_0\left(1+\lambda^2\right),\quad A' = \frac{4\lambda^2 J_0}{1+\lambda^2},\quad C = C' = 2J_0 \tag{10.4.27}$$

其中 $J_0 = 4\pi\rho a_1^4 a_3/15$. 则有

$$\Lambda = \frac{2}{1+\lambda^2},\quad \gamma = \left(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right)^2 \tag{10.4.28}$$

将上式和式 (10.3.37) 代入稳定性条件 (10.4.23), 化作

$$\left(\lambda^2-1\right)\left(\lambda^2-9\right) \geqslant 0 \tag{10.4.29}$$

从而导出一次近似稳定性条件:

$$\begin{array}{ll} \lambda \geqslant 3 \ \text{或}\ \lambda \leqslant 1 & \text{稳定} \\ 1 < \lambda < 3 & \text{不稳定} \end{array} \tag{10.4.30}$$

开尔文实验证实了 $\lambda \leqslant 1$ 的稳定现象. 与 $\lambda = 1$ 对应的球形薄壁充液容器处于自旋稳定性的临界状态, 外形稍有变化, 即从稳定转为不稳定.

当充液腔的几何参数和液体比重已确定的条件下, 可从式 (10.4.24) 导出 (A, C) 参数平面内的稳定域边界线

$$C = A' + (A-2A')\,\Gamma \pm 2\sqrt{A'\Gamma\,(1-\Gamma)\,(A-A')} \tag{10.4.31}$$

① 开尔文问题于 1877 年提出, 1880 年格林希尔对线性化方程得出稳定性判据. 1979 年派克斯 (Parks) 保留非线性项, 用李雅普诺夫方法导出相同的结果.

计算带椭球形 ($a_1 = 0.15$ m, $a_3 = 0.3$ m, $A' = 0.4$ kg · m^2) 或圆柱形充液腔 ($a = 1$ m, $h = 1.25$ m, $A' = 4$ kg · m^2) 的自旋刚体的稳定域, 分别示于图 10.7(a) 和 10.7(b). 在图 10.7(b) 中, 用实线表示的稳定域边界根据圆柱形腔内流场计算得出, 虚线表示由平均涡量概念作出的近似边界线. 对于图 10.7(a) 的椭球腔情形, 这两种边界线完全吻合.

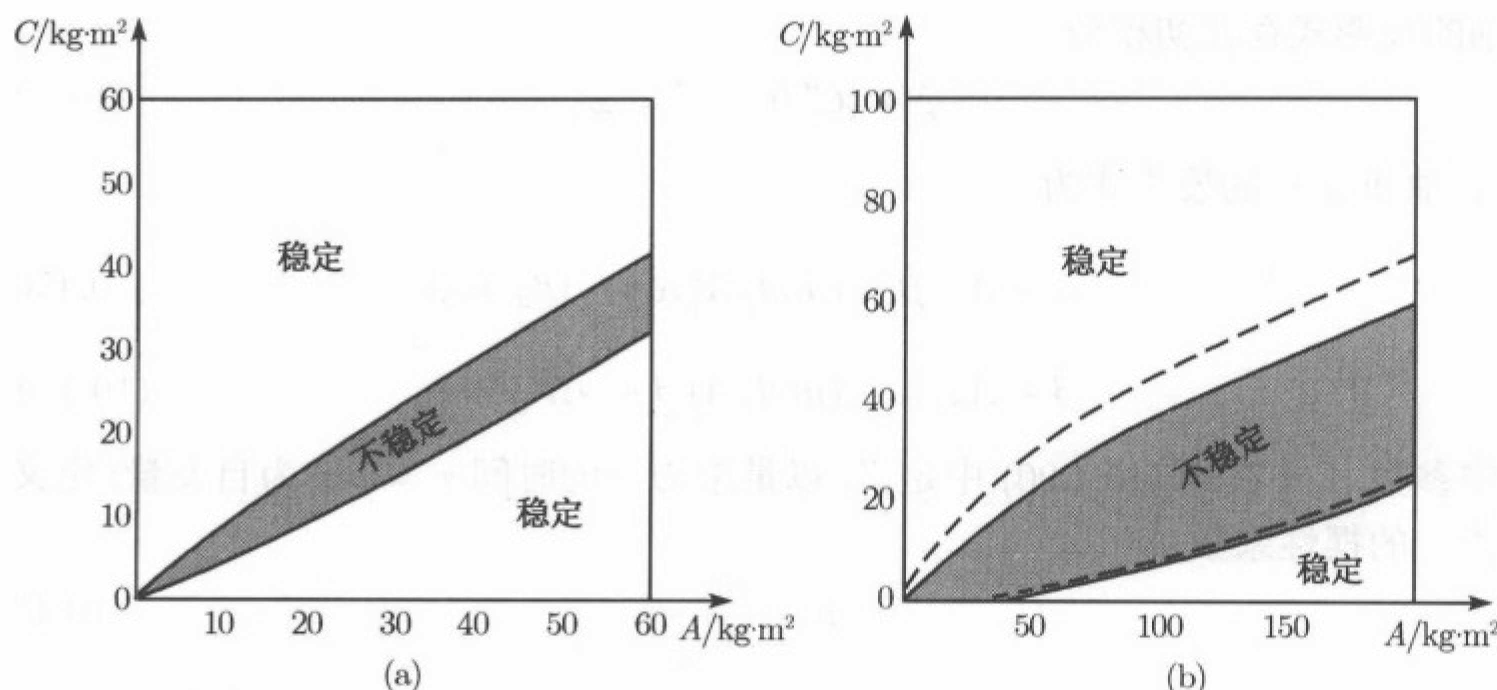


图 10.7　带椭球形和圆柱形充液腔的自旋刚体的稳定域

10.4.3　拉格朗日情形充液刚体

带充液腔的拉格朗日情形刚体定点运动是充液弹丸绕质心运动的力学模型. 设刚体和充液腔均相对 z 轴对称, 腔内全充有旋理想液体 (图 10.8). 固定点 O 和系统的质心 O_c 均在对称轴上. 将 $(O-\xi\eta\zeta)$ 改定义为与地球固定的参考坐标系, ζ 轴沿地垂线向上. 利用式 (10.2.28) 写出充液系统相对 O 点的动量矩

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{J}'\cdot\boldsymbol{\Omega}' \tag{10.4.32}$$

其中张量 $\boldsymbol{J}' = \boldsymbol{J} - \boldsymbol{J}^*$ 为充液腔内凝固液体与等效刚体的惯性张量之差. 设 m 为充液系统的总质量, $\boldsymbol{l} = OO_c$ 为质心相对固定点的矢径, 则重力对 O 点的矩为

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{l}\times m\boldsymbol{g} \tag{10.4.33}$$

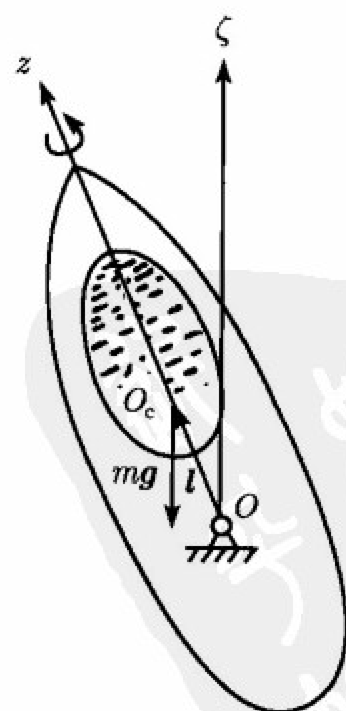


图 10.8　带充液腔的拉格朗日刚体

代入动量矩定理 (2.2.23), 得到

$$\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{l}\times m\boldsymbol{g} \tag{10.4.34}$$

仍采用上节定义的卡尔丹角 α,β,φ 表示刚体的姿态. 将式 (10.4.13) 和 (10.4.15) 代入方程 (10.4.34), 计算其在 $(O-xyz)$ 中的投影式. 仅保留扰动量的一次项时, 沿 z 轴的投影式存在初积分

$$\dot{\varphi}+\left(C'/C\right)\Omega_z'=\omega_0 \tag{10.4.35}$$

沿 x 轴和 y 轴的投影式为

$$\ddot{\alpha}+\Lambda\omega_0\dot{\beta}-\left(mgl/A\right)\alpha+\gamma\dot{\Omega}'_x=0 \tag{10.4.36a}$$

$$\ddot{\beta}-\Lambda\omega_0\dot{\alpha}-\left(mgl/A\right)\beta+\gamma\dot{\Omega}'_y=0 \tag{10.4.36b}$$

其中参数 Λ,γ 在式 (10.4.20) 中定义. 以量纲为一的时间 $\tau=\omega_0 t$ 为自变量, 定义量纲为一的摆性系数 $\hat{\mu}$

$$\hat{\mu}=\frac{mgl}{A\omega_0^2} \tag{10.4.37}$$

利用复变量 z,w, 将方程组 (10.4.36) 合并为复数形式, 与亥姆霍兹方程 (10.4.19b) 组成封闭的方程组

$$\ddot{z}-\mathrm{i}\Lambda\dot{z}-\hat{\mu}z+\gamma\dot{w}=0 \tag{10.4.38a}$$

$$\ddot{z}-\mathrm{i}\dot{z}+\dot{w}-\mathrm{i}\Gamma w=0 \tag{10.4.38b}$$

将式 (10.4.21) 形式的特解代入后, 导出频率方程

$$\sigma^3+a\sigma^2+b\sigma+c=0 \tag{10.4.39}$$

系数 a,b,c 为

$$a=-\left(\frac{\Lambda+\Gamma-\gamma}{1-\gamma}\right),\quad b=\frac{\hat{\mu}+\Lambda\Gamma}{1-\gamma},\quad c=-\frac{\hat{\mu}\Gamma}{1-\gamma} \tag{10.4.40}$$

根据三次代数方程 (10.4.39) 的 3 个根均为实根的充要条件, 导出一次近似稳定性条件

$$b^2\left(4b-a^2\right)+c\left(4a^2-18ab+27c\right)\leqslant 0 \tag{10.4.41}$$

即拉格朗日情形充液刚体绕垂直轴旋转稳定性的必要条件. 根据此条件在 $(\Lambda,\hat{\mu})$ 参数平面上划分的不同 γ 对应的稳定域边界曲线族如图 10.9 所示. 其中稳定域的上界 $\gamma=0$ 情形可直接从方程 (10.4.38a) 导出频率方程

$$\sigma^2-\Lambda\sigma+\hat{\mu}=0 \tag{10.4.42}$$

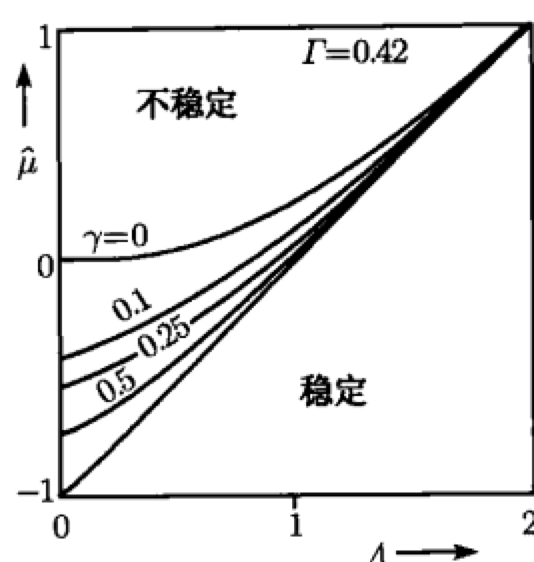


图 10.9 拉格朗日情形自旋充液刚体的稳定域

σ 的实根条件为

$$\hat{\mu} \leqslant \frac{\Lambda^2}{4} \quad 或 \quad \omega_0 \geqslant \frac{2}{C}\sqrt{Amgl} \tag{10.4.43}$$

即 2.4.5 节中拉格朗日重刚体的稳定性条件 (2.4.32). 稳定域的下界为直线, 即鲁缅采夫导出的稳定性充分条件

$$\hat{\mu} \leqslant \Lambda - 1 \quad 或 \quad \omega_0 \geqslant \sqrt{\frac{mgl}{C-A}} \tag{10.4.44}$$

稳定域随系统内液体成分的增加而明显缩小. 对于 $\hat{\mu} > 0$, $\Lambda < 1$ 的细长形弹丸, 虽然鲁缅采夫稳定性充分条件 (10.4.44) 不能满足, 但 γ 不很大时, 仍有可能提高转速使稳定性必要条件 (10.4.42) 满足, 弹丸仍可能稳定.

$\hat{\mu} = 0$ 情形为另一特例, 令条件 (10.4.41) 中 $c = 0$, 即转化为欧拉情形充液刚体的自旋稳定性条件 (10.4.23).

10.5 液体转子陀螺

10.5.1 液体转子的陀螺效应

10.2.1 节中已经说明, 球形腔内的液体可做整体的刚体转动, 其动量矩表达式与刚体的动量矩表达式完全相同. 整体转动的液体团具有与刚体转子相同的动力学特性, 原则上可代替刚体转子构成一种特殊的转子陀螺, 即**液体转子陀螺**.

本章前面各节对液体运动的分析均建立在理想流体的假定基础上, 但就实际应用而言, 必须考虑液体的**黏性效应**. 一般情况下, 低黏度流体的黏性效应仅局限于湿润腔壁处的薄边界层以内, 边界层以外的流动可足够准确地视为理想流体. 因此以上对理想流体的分析中只要增加边界层的黏性阻力, 即适用于考虑黏性效应的实际液体.

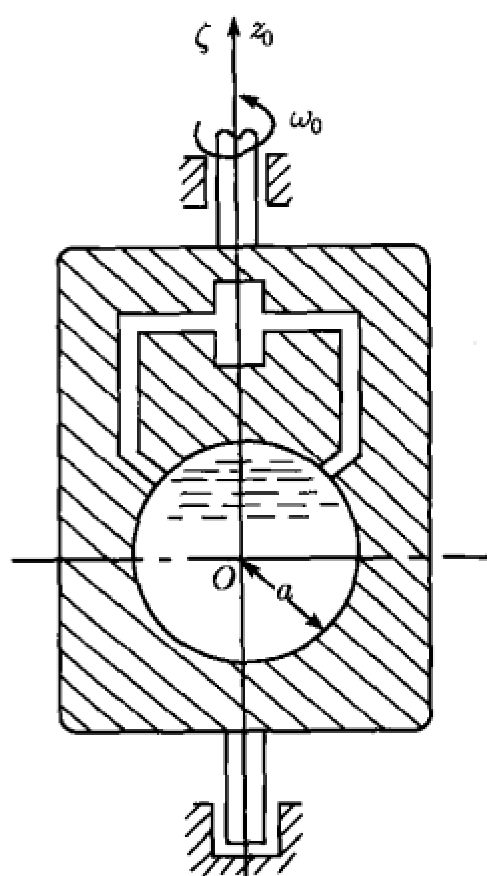


图 10.10　液体转子陀螺

液体转子陀螺由带球腔的高速转动壳体和全充于腔内的大比重低黏度液体组成. 壳体在电机驱动下匀速旋转, 借助腔壁与液体之间的黏性摩擦力带动腔内液体作同步高速转动 (图 10.10). 若壳体同时绕与转动轴正交的轴转动, 则液体转子相对壳体偏转, 腔壁产生的附加摩擦力作用于液体, 起到与 4.2.2 节中速率陀螺的弹簧相同的作用. 因此液体转子陀螺可作为速率陀螺量测载体的角度. 如直接将自旋航天器作为液体陀螺的壳体, 可用于量测航天器的章动角速度.

10.5.2　动力学方程

设带有球形充液腔的轴对称刚体在载体中以角速度 ω_0 绕对称轴匀速旋转. 球腔的半径为 a, 中心 O 在刚体的对称轴上. 以 O 为原点, 建立载体坐标系 $(O-\xi\eta\zeta)$ 和与刚体固结的壳体坐标系 $(O-x_{\rm s}y_{\rm s}z_{\rm s})$. 后者为 $(O-\xi\eta\zeta)$ 绕 ζ 轴转过 $\omega_0 t$ 角后的位置 (图 10.11). $(O-\xi\eta\zeta)$ 为轴对称壳体的莱查坐标系, 即不参与自旋的主轴坐标系. 刚性化的液体转子相对 $(O-\xi\eta\zeta)$ 的位置以 3.2.1 节定义的卡尔丹角确定. 设 $(O-\xi\eta\zeta)$ 绕 ξ 轴转动 α 角到达 $(O-x_0y_0z_0)$, 再绕 y_0 轴转动 β 角到达液体转子的莱查坐标系 $(O-xyz)$, z 轴为液体转子的极轴, $(O-xyz)$ 绕 z 轴转过 φ 角后为液体转子的连体坐标系 $(O-x_{\rm R}y_{\rm R}z_{\rm R})$(图 3.4). 上述所有坐标系均为球腔内液体的主轴坐标系. 各坐标系之间的关系为

$$
(O-\xi\eta\zeta)\;
\begin{cases}
\nearrow \; \xrightarrow[\zeta,\,z_0]{\omega_0 t} (O-x_{\rm s}y_{\rm s}z_{\rm s}) \\[2ex]
\searrow \; \xrightarrow[\xi,\,x_0]{\alpha} (O-x_0y_0z_0) \xrightarrow[y_0,\,y]{\beta} (O-xyz) \xrightarrow[z,\,z_{\rm R}]{\varphi} (O-x_{\rm R}y_{\rm R}z_{\rm R})
\end{cases}
$$

壳体连同腔内液体绕与 ζ 轴重合的 z_0 轴相对惯性坐标系的匀速转动为充液系统的稳态运动, 对应的稳态值为

$$\alpha=\beta=0,\quad \varphi=\omega_0 t \tag{10.5.1}$$

如载体带动壳体绕 ξ 轴和 η 轴做角速度分别为 Ω_ξ 和 Ω_η 的牵连转动, 则壳体的角

速度为

$$\boldsymbol{\omega}^{(1)} = \Omega_\xi \boldsymbol{\xi}^0 + \Omega_\eta \boldsymbol{\eta}^0 + \omega_0 \boldsymbol{\zeta}^0 \tag{10.5.2}$$

投影到 $(O - xyz)$, 得到

$$\boldsymbol{\omega}^{(1)} = (\Omega_\xi - \omega_0 \beta)\,\boldsymbol{i} + (\Omega_\eta + \omega_0 \alpha)\,\boldsymbol{j} + \omega_0 \boldsymbol{k} \tag{10.5.3}$$

载体偏转时, 液体转子由于惯性而保持绕 z 轴旋转的瞬时定轴性, 其角速度为

$$\boldsymbol{\omega}^{(2)} = (\Omega_\xi + \dot{\alpha})\,\boldsymbol{i} + \left(\Omega_\eta + \dot{\beta}\right)\boldsymbol{j} + \omega_0 \boldsymbol{k} \tag{10.5.4}$$

液体转子相对壳体的相对角速度为

$$\boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\omega}^{(2)} - \boldsymbol{\omega}^{(1)} = (\dot{\alpha} + \omega_0 \beta)\,\boldsymbol{i} + \left(\dot{\beta} - \omega_0 \alpha\right)\boldsymbol{j} \tag{10.5.5}$$

用球坐标 θ, ϕ, r 表示流场在腔壁 Σ 上的任意点 P 相对 $(O - xyz)$ 的位置 (图 10.12), P 点的矢径 $\boldsymbol{r}$ 为

$$\boldsymbol{r} = a\left[\sin\theta\,(\cos\phi\boldsymbol{i} + \sin\phi\boldsymbol{j}) + \cos\theta\boldsymbol{k}\right] \tag{10.5.6}$$

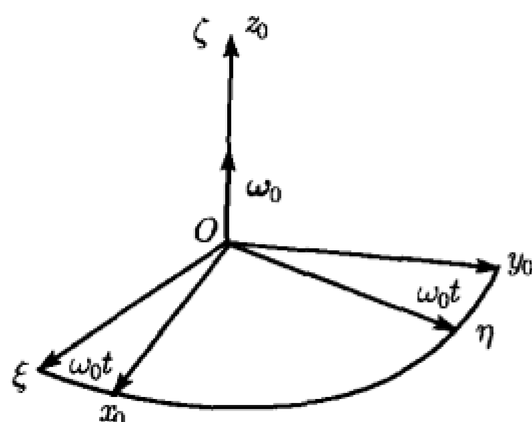


图 10.11　壳体相对载体的角度坐标

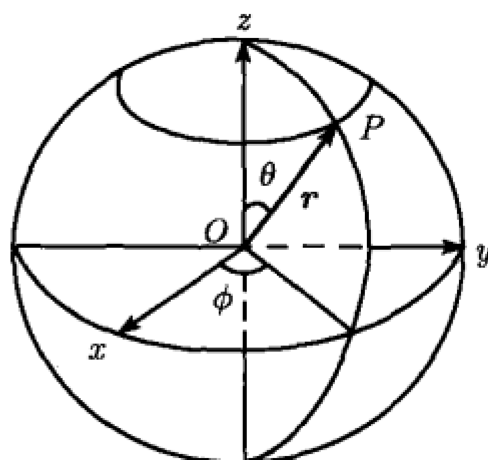


图 10.12　表示腔壁上任意点位置的球坐标

计算液体相对壳体的相对速度 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega}' \times \boldsymbol{r}$, 以 ω'_x, ω'_y 表示式 (11.5.5) 中的投影, 导出

$$\boldsymbol{v} = a\left[\cos\theta\left(\omega'_y \boldsymbol{i} - \omega'_x \boldsymbol{j}\right) + \left(\omega'_x \sin\phi - \omega'_y \cos\phi\right)\sin\theta\boldsymbol{k}\right] \tag{10.5.7}$$

液体在 P 点处微元面积 $\mathrm{d}S$ 内受到黏性边界层作用的切向力 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$. $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ 与相对流速 $\boldsymbol{v}$ 的方向相反, 大小成正比

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = -c\boldsymbol{v}\mathrm{d}S \tag{10.5.8}$$

比例系数 c 取决于液体的密度 ρ、黏性系数 ν 和边界层厚度 δ, δ 为 ν 和转速 ω_0 的函数

$$c = \frac{2\rho\nu}{\delta}, \quad \delta = 3.8\sqrt{\frac{\nu}{\omega_0}} \tag{10.5.9}$$

计算腔壁曲面 Σ 上作用的切向力对 O 点的合力矩 $\boldsymbol{M}$

$$\boldsymbol{M}=\int_{\Sigma}\boldsymbol{r}\times \mathrm{d}\boldsymbol{F}=-ca^2\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}\mathrm{d}\psi \tag{10.5.10}$$

将式 (10.5.6), (10.5.8) 代入, 引入参数 $D=4\pi a^4c/3$, 积分得到的阻尼力矩与转子相对腔体的相对角速度 $\boldsymbol{\omega}'$ 成正比, 方向相反

$$\boldsymbol{M}=-D\left[(\dot{\alpha}+\omega_0\beta)\,\boldsymbol{i}+\left(\dot{\beta}-\omega_0\alpha\right)\boldsymbol{j}\right]=-D\boldsymbol{\omega}' \tag{10.5.11}$$

利用液体团的惯性张量 $\boldsymbol{J}^{(2)}$ 和角速度 $\boldsymbol{\omega}^{(2)}$ 计算其动量矩 $\boldsymbol{H}^{(2)}$ 表示

$$\boldsymbol{H}^{(2)}=\boldsymbol{J}^{(2)}\cdot\boldsymbol{\omega}^{(2)} \tag{10.5.12}$$

球形液体转子对过球心的所有轴有相同的惯性矩, 记作 J, 则 $\boldsymbol{H}^{(2)}$ 的投影式为

$$\boldsymbol{H}^{(2)}=J\left[(\Omega_\xi+\dot{\alpha})\,\boldsymbol{i}+\left(\Omega_\eta+\dot{\beta}\right)\boldsymbol{j}+\omega_0\boldsymbol{k}\right] \tag{10.5.13}$$

将进动方程 (2.2.27) 中的 $\boldsymbol{H}$ 以 $\boldsymbol{H}^{(2)}$ 代替, 写作

$$\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{H}^{(2)}=\boldsymbol{M} \tag{10.5.14}$$

其中

$$\boldsymbol{\omega}_1=(\Omega_\xi+\dot{\alpha})\,\boldsymbol{i}+\left(\Omega_\eta+\dot{\beta}\right)\boldsymbol{j} \tag{10.5.15}$$

将 (10.5.11), (10.5.13), (10.5.15) 等式代入式 (10.5.14), 导出液体转子陀螺的进动方程

$$J\omega_0\dot{\alpha}-D\left(\dot{\beta}-\omega_0\alpha\right)=-J\omega_0\Omega_\xi \tag{10.5.16a}$$

$$J\omega_0\dot{\beta}+D\,(\dot{\alpha}+\omega_0\beta)=-J\omega_0\Omega_\eta \tag{10.5.16b}$$

利用复变量

$$z=\alpha+\mathrm{i}\beta,\quad \Omega=\Omega_\xi+\mathrm{i}\Omega_\eta \tag{10.5.17}$$

将方程组 (10.5.16) 合并为复数形式

$$(J\omega_0+\mathrm{i}D)\,\dot{z}+D\omega_0 z=-J\omega_0\Omega \tag{10.5.18}$$

10.5.3　液体转子陀螺的稳态运动

对于载体匀速转动的特殊情形, Ω 为常值, 方程 (11.5.18) 存在常值特解

$$z=-\left(\frac{J}{D}\right)\Omega \tag{10.5.19}$$

根据方程 (10.5.18) 的负实部特征值判断, 此特解对应的平衡状态为渐近稳定. 表明载体绕垂直于对称轴的输入轴匀速转动时, 转子极轴的稳态偏角与牵连角速度成正比. 基于此原理, 液体转子陀螺可作为双轴速率陀螺使用. 4.2.2 节中叙述的常规速率陀螺的弹簧力矩被液体的黏性力矩所代替.

液体转子陀螺可安装于自旋航天器, 直接将航天器作为陀螺的壳体. 如航天器作振幅为 ϑ_0, 频率为 $\nu = \lambda\omega_0$ 的高频章动, λ 为航天器的惯性矩比. 则有

$$\Omega = \lambda\omega_0\vartheta_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu t} \tag{10.5.20}$$

将上式代入方程 (10.5.18) 的右边

$$(J\omega_0 + \mathrm{i}D)\,\dot{z} + D\omega_0 z = -J\lambda\omega_0^2\vartheta_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu t} \tag{10.5.21}$$

此方程有以下形式的受迫振动特解

$$z = -z_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\nu t - \delta)} \tag{10.5.22}$$

其中

$$z_0 = \frac{J\lambda\omega_0\vartheta_0}{\sqrt{(J\lambda\omega_0)^2 + D^2(1+\lambda)^2}}, \quad \delta = \arctan\frac{J\lambda\omega_0}{D(1+\lambda)} \tag{10.5.23}$$

转速足够高时, $J\omega_0 \gg D$, 上式近似为

$$z_0 = \vartheta_0, \quad \delta = \pi/2 \tag{10.5.24}$$

表明液体转子可因章动激励产生受迫振动, 其振幅和频率均与章动相同.

10.5.4　跟踪现象

液体转子陀螺是以旋转壳体的黏性摩擦力矩作为驱动力矩推动液体团旋转. 当液体转子的极轴相对壳体的极轴产生偏转时, 驱动力矩出现垂直转子极轴的分量, 迫使转子进动向壳体位置趋近, 类似于 8.4.5 节中叙述的转子陀螺跟踪现象.

设壳体处于静止状态, 令方程 (10.5.18) 的右项为零, 转速足够高时, 将左边括弧中的 $\mathrm{i}D$ 相对 $J\omega_0$ 略去, 写作

$$T\dot{z} + z = 0 \tag{10.5.25}$$

其中的时间常数 T 恰好等于式 (10.5.20) 中的比例系数

$$T = \frac{J}{D} \tag{10.5.26}$$

设 $a = 3\mathrm{cm}$, $\nu = 10^{-2}\mathrm{Pa}$, $\omega_0 = 2\times10^4\mathrm{r/min}$, 时间常数 T 约为 0.5s. 由于跟踪现象的存在, 液体转子陀螺只能维持惯性空间中的瞬时定轴性. 一般情况下只能作为速率陀螺使用.

第11章 自旋卫星

绕极轴旋转的人造地球卫星可利用陀螺效应保持轨道内的姿态稳定性，即自旋卫星．自旋卫星可视为特殊的转子陀螺，即借助轨道运动产生的惯性力与重力的平衡起支承作用的转子陀螺．卫星的质心成为转子陀螺的支承中心．在地球引力场内，引力对卫星的质心可产生力矩，其强弱与卫星的质量分布有关．质量分布愈接近球对称，力矩愈微弱．忽略引力矩时卫星处于无力矩状态，其姿态运动为理想的欧拉情形刚体定点运动．由一个主刚体和数个轴对称转子组成的刚体系统称为陀螺体，为双自旋卫星的力学模型．自旋卫星和双自旋卫星为本章的研究对象，首先讨论其自旋运动在无力矩状态和地球引力矩作用下的稳定性．随后讨论自旋卫星的非稳态运动，如起旋、消旋运动和章动阻尼问题．1958 年美国探险者一号卫星的倾覆事故与刚体动力学的经典结论产生矛盾，揭示了自旋卫星的刚体模型的局限性．实际存在的弹性附件变形对卫星的姿态稳定性有着不可忽视的重要影响．因此带弹性天线的卫星和考虑连接轴弹性变形的卫星姿态稳定性也是本章要讨论的问题．最后讨论利用飞轮的惯性效应实现卫星的姿态控制问题．为避免大幅姿态运动过程中可能出现角度坐标的奇异性，利用有限转动四元数作为刚体姿态的数学表达．

11.1 无力矩作用的自旋卫星

11.1.1 无力矩刚体卫星的自旋运动

人造地球卫星的运动可分解为质心沿轨道的运动和绕质心的转动．一般情况下，可以忽略姿态运动对轨道运动的影响，在讨论卫星的转动时，认为轨道运动规律已完全确定．绕质心转动的卫星可视为特殊的转子陀螺，即借助轨道运动产生的惯性力与重力的平衡支承的转子陀螺．**自旋卫星**是绕极轴匀速旋转的卫星，利用旋转产生的陀螺效应使姿态保持稳定．若星体上作用的微弱的万有引力矩和其他力矩允许忽略，则自旋卫星绕质心的运动规律等同于欧拉情形刚体定点运动，其运动规律已在 2.3 节中作了详细描述，仅须将定点 O 以刚体的质心 O_c 代替．根据 2.3.1 节的分析，刚体角速度的变化遵循机械能守恒和动量矩守恒规律，满足式 (2.3.2),(2.3.3) 确定的初积分

$$A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2 = 2T \tag{11.1.1}$$

$$A^2\omega_x^2 + B^2\omega_y^2 + C^2\omega_z^2 = H^2 \tag{11.1.2}$$

在此基础上分析刚体绕 z 轴永久转动的稳定性, 得到式 (2.3.12) 的结论

$$\begin{array}{lll} C>A,\ C>B & \text{或} \quad C<A,\ C<B: & \text{稳定} \\ A>C>B & \text{或} \quad A<C<B: & \text{不稳定} \end{array} \tag{11.1.3}$$

即在无力矩条件下, 自旋卫星绕最大或最小惯性矩主轴旋转的永久转动稳定, 绕中间惯性矩主轴旋转的永久转动不稳定.

1958 年美国发射了第一个人造地球卫星探险者一号 (Explorer-1). 这个绕细长体极轴旋转的自旋卫星入轨数小时后倾覆, 转变为绕赤道轴旋转. 这一事实颠覆了上述刚体绕最小惯性矩主轴旋转稳定的结论. 实际上经典力学的结论并无错误, 但仅适用于绝对不变形的刚体. 而实际的人造卫星存在弹性附件或液体燃料, 不能简化为绝对刚体. 非刚体成分的内阻尼因素不影响动量矩, 但引起能量的耗散. 将刚体内包含少量非刚体成分的物体称作**准刚体**, 其动能和动量矩公式仍使用刚体公式近似地表示. 则式 (11.1.2) 中的总动量矩 H 仍为常数, 但能量耗散使式 (11.1.1) 中的总机械能 T 随时间衰减而不再保持常值. 将式 (11.1.1) 各项乘以 C, 与式 (11.1.2) 各项相减, 得到

$$A(C-A)\omega_x^2+B(C-B)\omega_y^2=2CT-H^2 \tag{11.1.4}$$

将上式对时间 t 微分, 令 $\dot{H}=0, \dot{T}<0$, 得到

$$A(C-A)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\omega_x^2\right)+B(C-B)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\omega_y^2\right)<0 \tag{11.1.5}$$

准刚体绕极轴做永久转动时, ω_x 和 ω_y 均为零. 如出现初始扰动, 扰动角速度 ω_x,ω_y 随时间的变化趋势可根据不等式 (11.1.5) 判断. 如 $C>A$, $C>B$, ω_x, ω_y 必向零趋近, 恢复到受扰前的稳态. 相反, 如 $C<A$, $C<B$, 则 ω_x ,ω_y 不断增大, 永久转动失稳. 可归纳为

$$\begin{array}{ll} C>A,\ C>B & \text{渐进稳定} \\ C<A,\ C<B & \text{不稳定} \end{array} \tag{11.1.6}$$

即由于内阻尼因素的影响, 准刚体绕最大惯性矩主轴的永久转动为渐近稳定, 绕最小惯性矩主轴的永久转动不稳定. 此结论的轴对称情形特例已在 9.4.1 节中作过分析. 探险者一号失稳的原因即来源于弹性天线振动时的内阻尼.

11.1.2 马格努斯三角形

刚体的惯性几何由 3 个主惯性矩 A,B,C 完全确定. 而用 3 个参数表示的惯性几何特征很难在二维平面上用图形表示出来. 一般只能采用相对比值, 如利用 $A/C, B/C$ 组成参数平面. 或根据德布拉和德尔夫的建议, 从相对差值 $k_1=(B-C)/A$, $k_2=(C-A)/B$, $k_3=(A-B)/C$ 中任选两个参数组成参数平面. 1971 年马格努斯提出一种三角形表示方法, 能更直观地反映主惯性矩之间的比例关系.

首先定义正则化的刚体主惯性矩 A^*, B^*, C^*

$$A^* = \frac{A}{A+B+C},\quad B^* = \frac{A}{A+B+C},\quad C^* = \frac{A}{A+B+C} \tag{11.1.7}$$

略去角标, 仍以 A, B, C 表示正则化了的主惯性矩. 建立直角坐标系 $(O-ABC)$, 作平面 $A+B+C=1$, 与坐标面的交线组成等边三角形, 顶点与原点的距离均为 1. 此三角形各边的中点连接成的倒三角形即**马格努斯三角形** (图 11.1 中的阴影部分). 马格努斯三角形域内的点集包含了刚体质量几何的所有可能性. 三角形的顶点分别对应于 $A=0$, $B=0$, $C=0$ 的特例, 过顶点的中线分别对应于 $A=B$, $B=C$, $C=A$ 的轴对称特例. 三角形的中点对应于 $A=B=C$ 的球对称特例. 三角形内每个点对应的主惯性矩值可根据该点与三个顶点的直线距离估计. 如与顶点 $A=0$ 的距离愈长则惯性矩 A 愈大, 依此类推. 三根中线将三角形划分为六个区域, 每个区域内刚体的质量几何特征如图 11.2 所示.

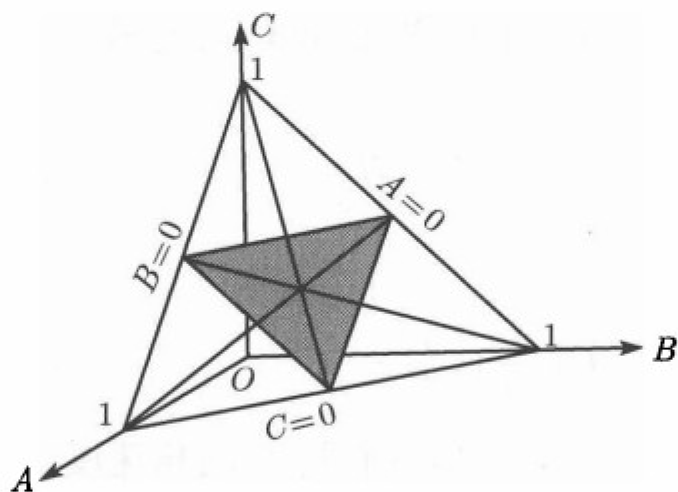


图 11.1　马格努斯三角形

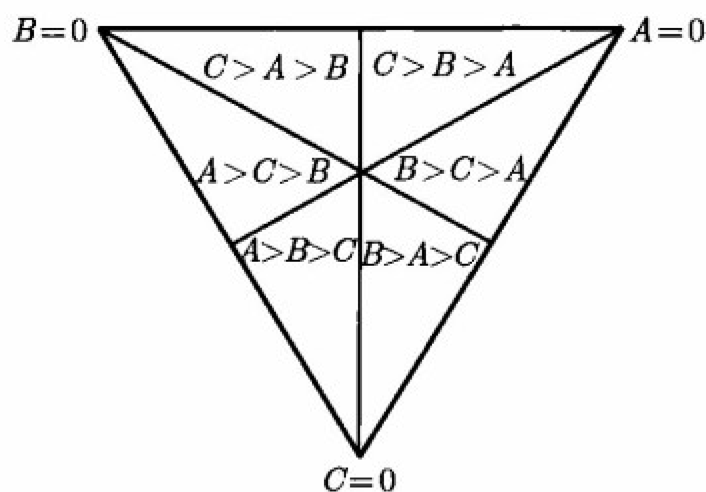


图 11.2　马格努斯三角形与刚体的质量几何

根据欧拉情形刚体绕 z 轴旋转的稳定性判据 (11.1.3), 无力矩自旋卫星在马格努斯三角形内的稳定域划分状况见图 11.3. 考虑卫星的内阻尼影响, 根据稳定性条件 (11.1.6), 稳定性转为渐近稳定性但范围缩小, 不稳定区扩大如图 11.4 所示.

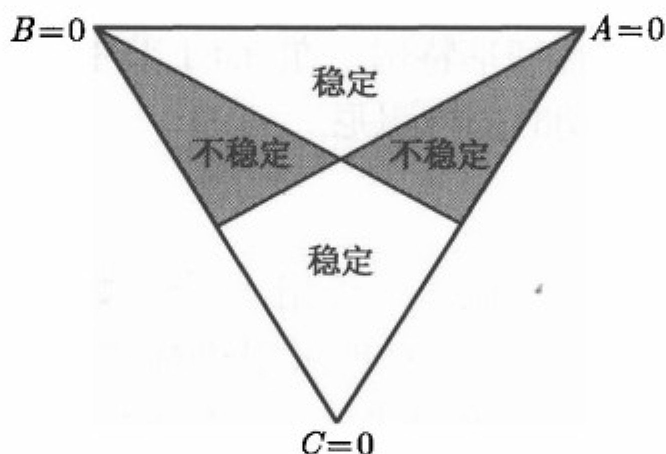


图 11.3　无力矩自旋卫星的稳定域

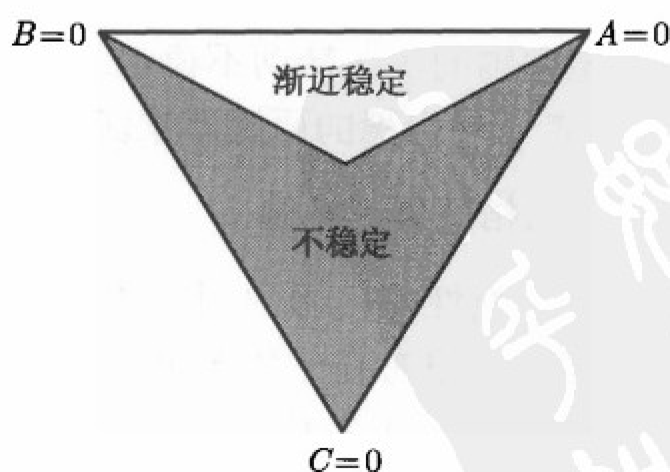


图 11.4　无力矩带内阻尼自旋卫星的稳定域

11.1.3　无力矩陀螺体的自旋运动

稳定的自旋卫星可以保证极轴的方位确定不变, 但旋转中的卫星不可能使探测元件对准地球. 于是**双自旋卫星**应运而生. 双自旋卫星由绕同一根极轴旋转的两个部件, 即平台和转子组成. 两个部件各有不同的角速度. 平台的转动与卫星沿轨道绕地球的转动严格同步, 以保证安装在平台上对准地球的探测仪器不受转子转动的影响, 转子以更高角速度旋转起稳定作用.

经典力学中的**陀螺体**是双自旋卫星的力学模型. 按照开尔文的定义, 由一个主刚体和数个绕对称轴转动的轴对称转子组成的系统称为陀螺体. 其特点是组成系统各分体的相对运动不影响全系统的质量几何. 仅含一个轴对称转子的陀螺体称为**简单陀螺体**. 除双自旋卫星以外, 前面各章讨论的框架陀螺仪由内环和转子组成的内环组合体也是简单陀螺体.

设陀螺体 G 由非轴对称的主体 P 和轴对称转子 R 组成 (图 11.5), G^* 为质量分布与 G 完全相同的刚体, 也可视为转子相对主体静止的陀螺体. G 和 G^* 的质心均为 O_{c}. 记 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{P}}$, $\boldsymbol{J}_{\mathrm{R}}$ 分别为主体和转子相对 O_{c} 点的惯性张量, $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{R}}$ 为主体和转子的角速度. 则 G 相对 O_{c} 点的动量矩 $\boldsymbol{H}$ 为

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}_{\mathrm{P}} \cdot \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{J}_{\mathrm{R}} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{R}} \tag{11.1.8}$$

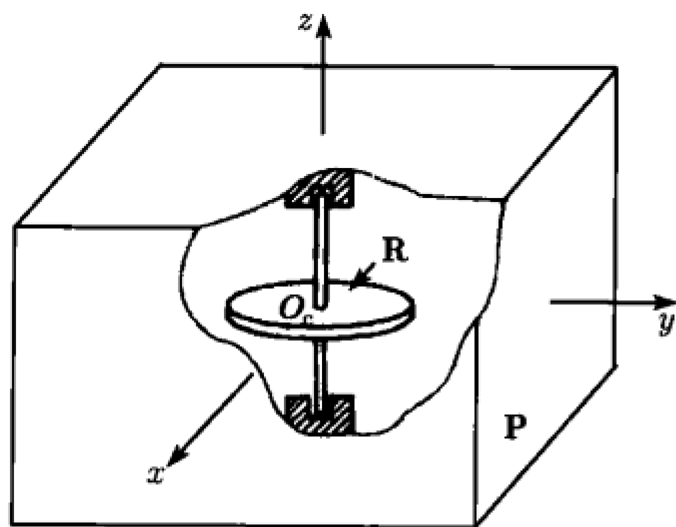


图 11.5　陀螺体

设 $\boldsymbol{J}$ 为 G^* 相对 O_{c} 点的惯性张量, $\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{R}}$ 为转子相对主体的相对角速度, 则式 (11.1.2) 也可写作

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{J}_{\mathrm{R}} \cdot \boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{R}} \tag{11.1.9}$$

其中

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_{\mathrm{P}} + \boldsymbol{J}_{\mathrm{R}}, \quad \boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{R}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{R}} - \boldsymbol{\omega} \tag{11.1.10}$$

以 O_c 为原点建立 G* 的主轴坐标系 $(O_c - xyz)$, 令 $\boldsymbol{J}_P$, $\boldsymbol{J}_R$ 相对 $(O_c - xyz)$ 的主惯性矩为 A_P, B_P, C_P 和 A_R, B_R, C_R, 则 $\boldsymbol{J}$ 相对 $(O_c - xyz)$ 的主惯性矩 A, B, C 为

$$A = A_P + A_R,\ B = B_P + B_R,\ C = C_P + C_R \tag{11.1.11}$$

式 (11.1.8) 或 (11.1.9) 表示的动量矩 $\boldsymbol{H}$ 在 $(O - xyz)$ 中的投影式为

$$\boldsymbol{H} = A\omega_x \boldsymbol{i} + B\omega_y \boldsymbol{j} + (C_P\omega_z + C_R\omega_{Rz})\,\boldsymbol{k} \tag{11.1.12}$$

设转子的轴承约束为恒速约束, 相对角速度 Ω_{Rz} 保持常数. 令 $\Omega_{Rz} = \Omega_{R0}$, 式 (11.1.5) 中沿 $O_c z$ 轴的投影可写作

$$C_P\omega_z + C_R\omega_{Rz} = C\omega_z + C_R\Omega_{R0} \tag{11.1.13}$$

将式 (11.1.12) 代入动量矩定理, 令 $\omega_{Rz} = \omega_{R0}$, 导出陀螺体的欧拉方程

$$A\dot{\omega}_x + (C - B)\,\omega_y\omega_z + C_R\Omega_{R0}\omega_y = M_x \tag{11.1.14a}$$

$$B\dot{\omega}_y + (A - C)\,\omega_z\omega_x - C_R\Omega_{R0}\omega_x = M_y \tag{11.1.14b}$$

$$C\dot{\omega}_z + (B - A)\,\omega_x\omega_y = M_z \tag{11.1.14c}$$

在无力矩情况下, 令方程组 (11.1.14) 中的右项为零, 各式依次乘以 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ 后相加, 导出与式 (11.1.1) 相同形式的初积分

$$A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2 = 2T \tag{11.1.15}$$

但由于转子轴承的恒速约束为非保守的有源系统, 此积分并不意味系统的机械能守恒, 积分常数 T 也并非系统的总机械能. 将方程组 (11.1.8) 各式依次乘以 $A\omega_x, B\omega_y$, $C\omega_z^+ C_R\Omega_{R0}$ 后相加, 导出与式 (11.1.2) 相似的动量矩积分

$$A^2\omega_x^2 + B^2\omega_y^2 + (C\omega_z + C_R\Omega_{R0})^2 = H^2 \tag{11.1.16}$$

其物理意义为动量矩守恒. 积分常数 H 为陀螺体的动量矩模, 可根据绕 z 轴以 ω_0 角速度匀速旋转的稳态运动确定

$$H = C\omega_0 + C_R\Omega_{R0} \tag{11.1.17}$$

与 2.3.1 节讨论的欧拉情形刚体定点运动类似, 初积分 (11.1.15) 和 (11.1.16) 也在 $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ 三维空间中确定两个椭球面, 其交线即主体角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的矢量端点轨迹.

11.1.4 陀螺体自旋运动的稳定性

本节讨论陀螺体实现永久转动的可能性, 以及永久转动轴的个数和稳定性随转子转速的变化规律. 以 O_c 为原点建立惯性空间中的平动坐标系 $(O_c-\xi\eta\zeta)$, 令 $O_c\zeta$ 轴沿守恒的动量矩矢量 $\boldsymbol{H}$ 方向. 设 $(O_c-\xi\eta\zeta)$ 绕 ζ 轴转过 ϕ 角的位置为 $(O_c-x_0y_0z_0)$, 绕 x_0 轴转过 α 角的位置为 $(O_c-x_1y_1z_1)$, 绕 y_1 轴转过 β 角与陀螺体 G 的主轴坐标系 (O_c-xyz) 重合 (图 11.6). α,β,ϕ 为表示 (O_c-xyz) 姿态的卡尔丹角, 但不同于 1.1.4 节的转动次序. 各坐标系之间的关系为

$$(O_c-\xi\eta\zeta)\ \underset{\zeta,z_0}{\overset{\phi}{\longrightarrow}}\ (O_c-x_0y_0z_0)\ \underset{x_0,x_1}{\overset{\alpha}{\longrightarrow}}\ (O_c-x_1y_1z_1)\ \underset{y_1,y}{\overset{\beta}{\longrightarrow}}\ (O_c-xyz)$$

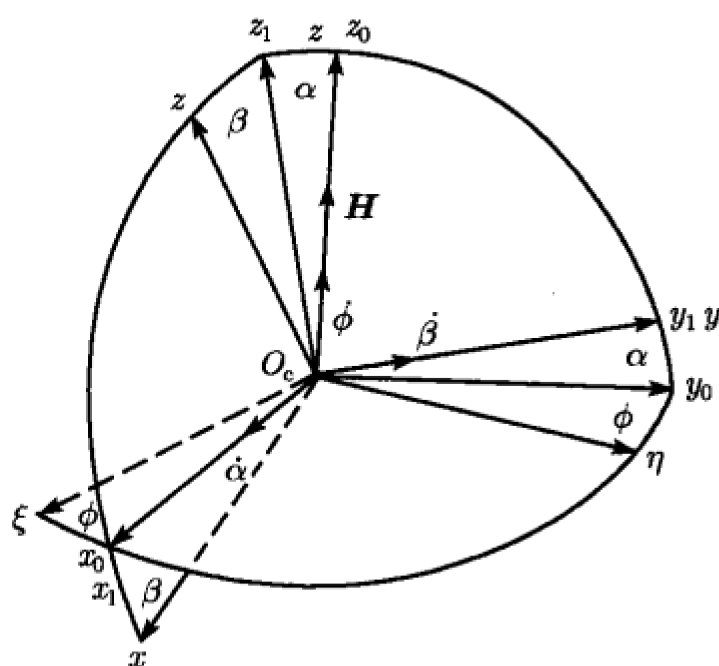


图 11.6　参考坐标系

陀螺体的主体角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 相对 (O_c-xyz) 的分量用 α,β,ϕ 表示为

$$\begin{aligned}\omega_x&=\dot\alpha\cos\beta-\dot\phi\cos\alpha\sin\beta\\ \omega_y&=\dot\beta+\dot\phi\sin\alpha\\ \omega_z&=\dot\alpha\sin\beta+\dot\phi\cos\alpha\cos\beta\end{aligned}\tag{11.1.18}$$

将沿 ζ 轴的 $\boldsymbol{H}$ 矢量向 (O_c-xyz) 各轴投影, 得到

$$\begin{aligned}A\omega_x&=-H\cos\alpha\sin\beta\\ B\omega_y&=H\sin\alpha\\ C\omega_z+C_R\Omega_{R0}&=H\cos\alpha\cos\beta\end{aligned}\tag{11.1.19}$$

将式 (11.1.18) 代入式 (11.1.19), 利用式 (2.3.15) 定义的参数 ν,λ 及以下参数

$$\sigma=\frac{C}{A}-1,\quad \rho=\frac{C}{B}-1,\quad \gamma_R=\frac{C_R\Omega_{R0}}{H}\tag{11.1.20}$$

导出

$$\dot{\alpha} = -(\nu/\lambda)(\sigma\cos\alpha\cos\beta + \gamma_{\mathrm{R}})\sin\beta \tag{11.1.21a}$$

$$\dot{\beta} = (\nu/\lambda)\left(\rho - \sigma\sin^2\beta + \gamma_{\mathrm{R}}\sec\alpha\cos\beta\right)\sin\alpha \tag{11.1.21b}$$

$$\dot{\phi} = (\nu/\lambda)\left(1 + \sigma\sin^2\beta - \gamma_{\mathrm{R}}\sec\alpha\cos\beta\right) \tag{11.1.21c}$$

将方程 (11.1.21a) 与 (11.1.21b) 相除消去时间微分, 化作 α, β 的自治系统

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\beta} = \frac{(\gamma_{\mathrm{R}} - \sigma\cos\alpha\cos\beta)\sin\beta}{\left(\rho - \sigma\sin^2\beta + \gamma_{\mathrm{R}}\sec\alpha\cos\beta\right)\sin\alpha} \tag{11.1.22}$$

方程 (11.1.22) 的奇点 $(\alpha_{\mathrm{s}}, \beta_{\mathrm{s}})$ 对应于动量矩 $\boldsymbol{H}$ 相对主体的确定位置, 即陀螺体的永久转动轴位置. 表 11.1 中列出可能存在的 6 种奇点, 其中奇点 S_1, S_2 沿转子转轴 $O_{\mathrm{c}}z$ 的正向和负向, S_3, S_4 和 S_5, S_6 仅当以下条件满足时才存在

$$\begin{aligned} &S_3,\ S_4\ \text{存在条件：}\ |\gamma_{\mathrm{R}}| < |\sigma| \\ &S_5,\ S_6\ \text{存在条件：}\ |\gamma_{\mathrm{R}}| < |\rho| \end{aligned} \tag{11.1.23}$$

转子相对静止时, $\gamma_{\mathrm{R}} = 0$, 陀螺体退化为刚体, S_3, S_4 和 S_5, S_6 分别沿刚体的主轴 x 轴和 y 轴. 转子转动产生的动力学效应使上述永久转动轴偏离主轴, 但 S_1, S_2 对应的主体沿 z 轴的永久转动不受转子转动的影响.

表 11.1　无力矩陀螺体的奇点位置

奇点	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
α_{s}	0	0	0	π	$\arccos(-\gamma_{\mathrm{R}}/\rho)$	$\arccos(\gamma_{\mathrm{R}}/\rho)$
β_{s}	0	π	$\arccos(-\gamma_{\mathrm{R}}/\sigma)$	$\arccos(\gamma_{\mathrm{R}}/\sigma)$	0	π

令 $x = \beta - \beta_{\mathrm{s}}$, $y = \alpha - \alpha_{\mathrm{s}}$, 导出方程 (11.1.22) 在奇点附近的一次近似方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{ax + by}{cx + dy} \tag{11.1.24}$$

各系数定义为

$$\begin{aligned} a &= -\sigma\cos\alpha_{\mathrm{s}}\cos 2\beta_{\mathrm{s}} - \gamma_{\mathrm{R}}\cos\beta_{\mathrm{s}} \\ b &= \sigma\sin\alpha_{\mathrm{s}}\cos\beta_{\mathrm{s}}\sin\beta_{\mathrm{s}} \\ c &= -(\sigma\sin 2\beta_{\mathrm{s}} + \gamma_{\mathrm{R}}\sec\alpha_{\mathrm{s}}\sin\beta_{\mathrm{s}})\sin\alpha_{\mathrm{s}} \\ d &= \left(\rho - \sigma\sin^2\beta_{\mathrm{s}}\right)\cos\alpha_{\mathrm{s}} + \gamma_{\mathrm{R}}\sec^2\alpha_{\mathrm{s}}\cos\beta_{\mathrm{s}} \end{aligned} \tag{11.1.25}$$

在马格努斯三角形内用 $C = A(1 \mp \gamma_{\mathrm{R}})$, $C = B(1 \mp \gamma_{\mathrm{R}})$ 对应的 4 根直线和 $A = B$ 对应的中线划分为 11 个区域 D_i $(i = 1, 2, \cdots, 11)$, 如图 11.7 所示. 上述可能存在的 6 个奇点中, S_1 或 S_2 为双自旋卫星的正常工作状态, S_3, S_4 和 S_5, S_6 为偏离工

作状态的陷阱状态. 其中 S_3, S_4 在 D_9, D_{10}, D_{11} 内不存在, S_5, S_6 在 D_7, D_8, D_{11} 内不存在. 增大转子的转速, 即增大 γ_{R}, 上述无陷阱状态的区域 D_{11} 随之增大.

各区域内的奇点类型可利用式 (11.1.25) 表示的系数 a,b,c,d 确定, 如表 11.2 所示. 图 11.8 在 $(\alpha,\beta,\gamma_{\mathrm{R}})$ 参数空间中表示奇点的数目和类型的分布和分岔状况. 以 $A>B>C$ 情形为例, 当 $\gamma_{\mathrm{R}}=0$ 时, 马格努斯三角形中所对应的点在 D_1 区域内, 存在 6 个奇点, 对应于沿刚体主轴的 6 个永久转动轴. 随着 γ_{R} 增大, D_7 从零开始扩大, 逐渐将该点覆盖, 奇点的数目减为 4 个, 但仍存在稳定的陷阱状态 S_3, S_4. 继续增大 γ_{R}, 该点被 D_{11} 覆盖, 仅存在两个稳定奇点 S_1, S_2, 转子旋转轴成为唯一的永久转动轴.

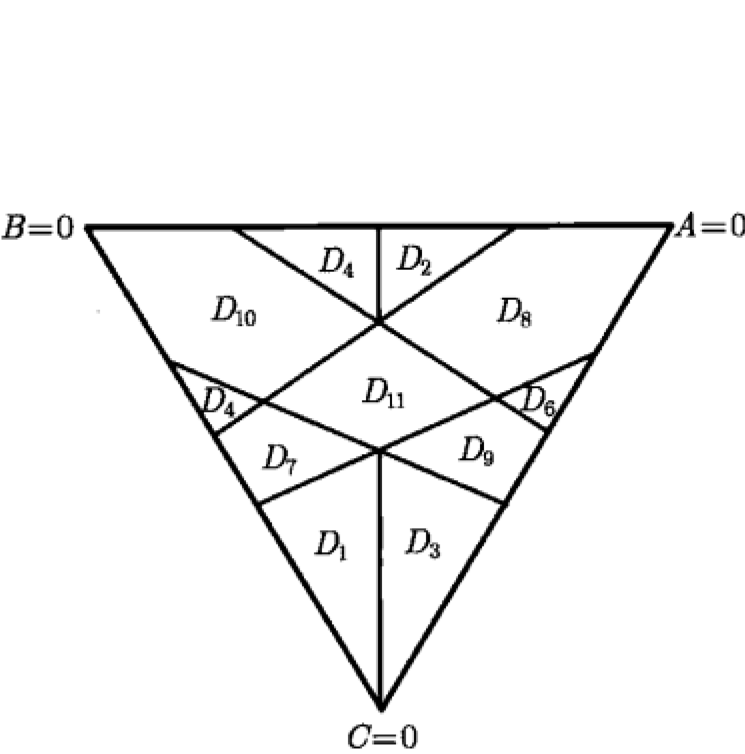


图 11.7　马格努斯三角形的区域划分

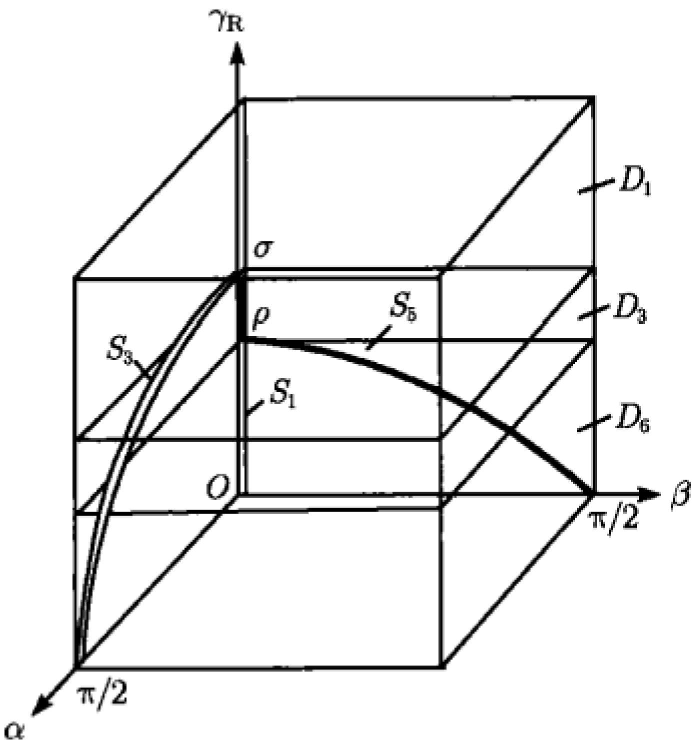


图 11.8　$(\alpha,\beta,\gamma_{\mathrm{R}})$ 参数空间中的奇点分布

表 11.2　无力矩陀螺体的奇点分布

区域	S_1	S_2	S_3, S_4	S_5, S_6
D_1, D_2	中心	中心	中心	鞍点
D_3, D_4	中心	中心	鞍点	中心
D_5, D_6	鞍点	鞍点	中心	中心
D_7	鞍点	中心	中心	—
D_8	中心	鞍点	中心	—
D_9	鞍点	中心	—	中心
D_{10}	中心	鞍点	—	中心
D_{11}	中心	中心	—	—

为判断作为航天器正常工作状态的奇点 S_1 的稳定性, 即陀螺体绕 z 轴旋转的稳定性, 令方程 (11.1.24) 中 $\alpha_{\mathrm{s}}=\beta_{\mathrm{s}}=0$, 化作

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{a^{*}x}{y} \tag{11.1.26}$$

其中

$$a^* = -\left(\frac{\sigma + \gamma_{\mathrm{R}}}{\rho + \gamma_{\mathrm{R}}}\right) = \frac{B\,(A - C^*)}{A\,(C^* - B)} \tag{11.1.27}$$

C^* 为陀螺体的等效惯性矩, 定义为

$$C^* = \frac{C}{1 - \gamma_{\mathrm{R}}} = C\left(1 + \frac{C_{\mathrm{R}}\,\Omega_{\mathrm{R0}}}{C\omega_0}\right) \tag{11.1.28}$$

根据附录三对式 (A.3.6) 的分析, 奇点 S_1 的稳定性取决于参数 a^* 的符号. 导出

$$\begin{gathered} C^* > A,\ C^* > B \quad \text{或} \quad C^* < A,\ C^* < B:\ \text{稳定} \\ A > C^* > B \quad \text{或} \quad A < C^* < B:\ \text{不稳定} \end{gathered} \tag{11.1.29}$$

此结论与刚体绕 z 轴永久转动的稳定性条件 (11.1.3) 相似, 仅须将刚体的惯性矩 C 以陀螺体的等效惯性矩 C^* 代替. 可从中判断转子的陀螺效应对稳定性的影响. 转子与主体旋转方向一致时 ($\gamma_{\mathrm{R}} > 0$) 稳定域扩大, 反方向旋转时 ($\gamma_{\mathrm{R}} < 0$) 稳定域缩小.

为分析内阻尼对陀螺体永久转动的影响, 将式 (11.1.15) 各项乘以 C^*, 与式 (11.1.16) 各项相减, 忽略自旋角速度的变化, 以 ω_0 代替 ω_z, 得到

$$A\,(C^* - A)\,\omega_x^2 + B\,(C^* - B)\,\omega_y^2 + C^*\,(C - C^*)\,\omega_0^2 = 2C^*T - H^2 \tag{11.1.30}$$

将上式对时间 t 微分, 令 $\dot{H} = 0$, $\dot{T} < 0$, 得到

$$A\,(C^* - A)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\omega_x^2\right) + B\,(C^* - B)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\omega_y^2\right) < 0 \tag{11.1.31}$$

从而导出与式 (11.1.6) 相似的稳定性条件

$$\begin{gathered} C^* > A,\ C^* > B:\ \text{渐近稳定} \\ C^* < A,\ C^* < B:\ \text{不稳定} \end{gathered} \tag{11.1.32}$$

将式 (11.1.28) 代入后, 导出为保证渐近稳定性转子角速度应满足的限制条件

$$\Omega_{\mathrm{R0}} > \left(\frac{A - C}{C_{\mathrm{R}}}\right)\omega_0, \quad \Omega_{\mathrm{R0}} > \left(\frac{B - C}{C_{\mathrm{R}}}\right)\omega_0 \tag{11.1.33}$$

在图 11.7 所示的马格努斯三角形内, 如 $\gamma_{\mathrm{R}} > 0$, 则 $D_2, D_4, D_8, D_{10}, D_{11}$ 等区域均满足上述稳定性条件, 如图 11.9 所示. 与刚体卫星的稳定域 (即图 11.9 中虚线表示的稳定域边界) 比较可看出, 转子与主体同方向旋转时的陀螺效应使刚体卫星的部分不稳定区转为渐近稳定, 使稳定域扩大. 反之, 若反方向旋转 ($\gamma_{\mathrm{R}} < 0$), 则 D_8, D_{10}, D_{11} 区域转为不稳定, 使稳定域缩小.

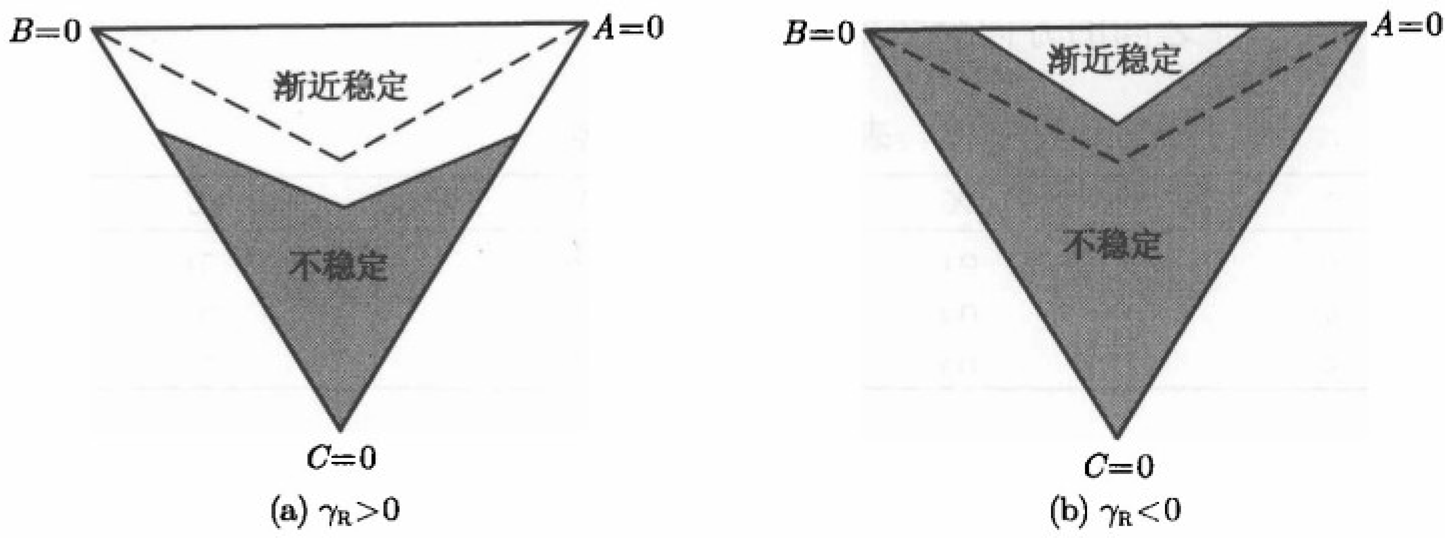


图 11.9　带内阻尼陀螺体的渐近稳定域

11.2　刚体在地球引力场中的运动

11.2.1　地球引力矩

围绕地球运行的卫星处于地球的万有引力场内. 为计算地球引力对卫星质心的力矩, 设刚体卫星的质心为 O_c, 地球的质心为 O_e, 自 O_e 引向 O_c 点的矢径为 $\boldsymbol{r}$, 至刚体内任意位置 P 点处的质量微元 $\mathrm{d}m$ 的矢径为 $\boldsymbol{r}'$, P 点至 O_c 点的矢径为 $\boldsymbol{\rho}$ (见图 11.10), 则有

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\rho} \tag{11.2.1}$$

以 O_c 为原点建立与星体固结的主轴坐标系 (O_c-xyz), 以及**轨道参考坐标系** (O_c-XYZ), 其中 X 轴与矢径 $\boldsymbol{r}$ 一致, Z 轴沿轨道平面的法线 (见图 11.11). (O_c-xyz)

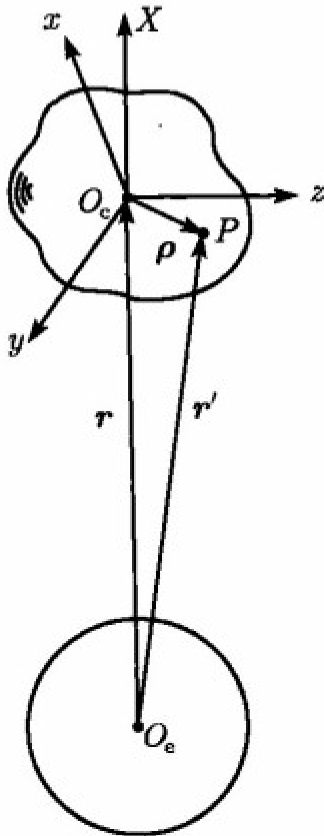


图 11.10　地球引力矩计算

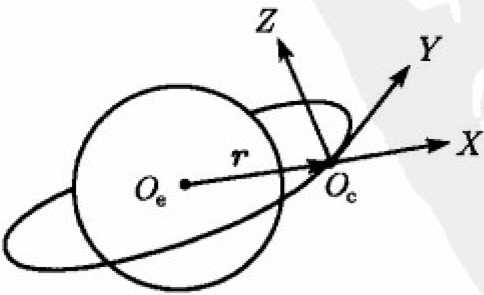


图 11.11　轨道坐标系

与 $(O_c - XYZ)$ 之间的方向余弦如表 11.3 所示.

表 11.3　方向余弦

	X	Y	Z
x	α_1	β_1	γ_1
y	α_2	β_2	γ_2
z	α_3	β_3	γ_3

设 x, y, z 为 P 点在 $(O_c - xyz)$ 中的坐标, 矢量 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{\rho}$ 的投影式为

$$\boldsymbol{r} = r\left(\alpha_1 \boldsymbol{i} + \alpha_2 \boldsymbol{j} + \alpha_3 \boldsymbol{k}\right), \quad \boldsymbol{\rho} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \tag{11.2.2}$$

将式 (11.2.2) 代入 (11.2.1), 得到

$$\boldsymbol{r}' = r\left[\left(\alpha_1 + \frac{x}{r}\right)\boldsymbol{i} + \left(\alpha_2 + \frac{y}{r}\right)\boldsymbol{j} + \left(\alpha_3 + \frac{z}{r}\right)\boldsymbol{k}\right] \tag{11.2.3}$$

设地球引力对星体上 P 点处微元体 $\mathrm{d}m$ 的作用力为 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$, 其大小与距离 r' 的平方成反比, 沿矢径 $\boldsymbol{r}'$ 的负方向 (图 11.11)

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = -\frac{\mu \mathrm{d}m}{r'^2}\left(\frac{\boldsymbol{r}'}{r'}\right) \tag{11.2.4}$$

其中 μ 为地球引力参数. 星体上作用的地球引力相对质心 O_c 的力矩为

$$\boldsymbol{M} = \iiint_S \boldsymbol{\rho} \times \mathrm{d}\boldsymbol{F} = -\mu \iiint_S \frac{\boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{r}'}{r'^3}\mathrm{d}m \tag{11.2.5}$$

将式 (11.2.2), (11.2.3) 代入式 (11.2.5), 仅保留 x/r, y/r, z/r 的二次项, 导出地球引力矩 $\boldsymbol{M}$ 在 $(O_c - xyz)$ 中的投影

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{3\mu}{r^3}(C - B)\alpha_2\alpha_3 \\ M_y &= \frac{3\mu}{r^3}(A - C)\alpha_3\alpha_1 \\ M_z &= \frac{3\mu}{r^3}(B - A)\alpha_1\alpha_2 \end{aligned} \tag{11.2.6}$$

其中 A, B, C 为卫星对质心的主惯性矩. 设卫星做圆轨道运动, 矢径 $\boldsymbol{r}$ 以轨道半径为模且以常值角速度 ω_c 绕地心转动

$$\omega_c = \sqrt{\frac{\mu}{r^3}} \tag{11.2.7}$$

则地球引力矩 (11.2.6) 简化为

$$\begin{aligned} M_x &= 3\omega_{\rm c}^2\,(C-B)\,\alpha_2\alpha_3 \\ M_y &= 3\omega_{\rm c}^2\,(A-C)\,\alpha_3\alpha_1 \\ M_z &= 3\omega_{\rm c}^2\,(B-A)\,\alpha_1\alpha_2 \end{aligned} \tag{11.2.8}$$

可看出, 地球引力矩与星体的主惯性矩之差有关. 惯性椭球越偏离球体, 引力矩越大. 球对称星体的引力矩为零, 轴对称星体沿极轴的引力矩分量为零. 此外, 地球引力矩还取决于星体的轨道和在轨道内的姿态. 星体距地心越远, 地球引力矩越微弱. 若星体的某主轴指向地心, 则对另外两根主轴的引力矩为零.

刚体在地球引力场内的势能 V 为

$$V=-\mu\iiint\limits_S\frac{\mathrm{d}m}{r'} \tag{11.2.9}$$

将式 (11.2.3) 代入式 (11.2.9), 整理后得到

$$V=-\frac{\mu}{r}\left[m+\frac{1}{2r^2}\,(A+B+C-3I)\right] \tag{11.2.10}$$

其中 m 为卫星质量, I 定义为

$$I=A\alpha_1^2+B\alpha_2^2+C\alpha_3^2 \tag{11.2.11}$$

对于圆轨道运动的特殊情形, 略去常数项, 势能 V 可表示为

$$V=\frac{3}{2}\omega_{\rm c}^2\left(A\alpha_1^2+B\alpha_2^2+C\alpha_3^2\right) \tag{11.2.12}$$

星体的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 为星体相对 $(O_{\rm c}-XYZ)$ 的转动角速度 $\boldsymbol{\omega}'$ 与轨道坐标系 $(O_{\rm c}-XYZ)$ 的牵连角速度 $\boldsymbol{\omega}_{\rm c}=\omega_{\rm c}\boldsymbol{Z}^0$ 之和

$$\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}'+\boldsymbol{\omega}_{\rm c} \tag{11.2.13}$$

计算 P 点的绝对速度 $\dot{\boldsymbol{r}}'$

$$\dot{\boldsymbol{r}}'=\boldsymbol{\omega}'\times\boldsymbol{\rho}+\boldsymbol{\omega}_{\rm c}\times\boldsymbol{r}' \tag{11.2.14}$$

将式 (11.2.2) 代入式 (11.2.14), 计算星体的动能

$$T=\frac{1}{2}\iiint\limits_S\dot{\boldsymbol{r}}'\cdot\dot{\boldsymbol{r}}'\mathrm{d}m \tag{11.2.15}$$

导出

$$T=\frac{1}{2}\left[A\omega_x'^2+B\omega_y'^2+C\omega_z'^2+\omega_{\rm c}^2\left(A\gamma_1^2+B\gamma_2^2+C\gamma_3^2\right)\right]+\cdots \tag{11.2.16}$$

省略号表示动能中的常数项和广义速度的一次齐次式.

11.2.2　动力学方程与初积分

将地球引力矩 (11.2.8) 代入欧拉方程 (2.2.33), 得到

$$A\dot{\omega}_x + (C-B)\omega_y\omega_z = 3\omega_{\mathrm{c}}^2(C-B)\,\alpha_2\alpha_3 \tag{11.2.17a}$$

$$B\dot{\omega}_y + (A-C)\omega_z\omega_x = 3\omega_{\mathrm{c}}^2(A-C)\,\alpha_3\alpha_1 \tag{11.2.17b}$$

$$C\dot{\omega}_z + (B-A)\omega_x\omega_y = 3\omega_{\mathrm{c}}^2(B-A)\,\alpha_1\alpha_2 \tag{11.2.17c}$$

轨道坐标系 $(O_{\mathrm{c}}-XYZ)$ 绕 $O_{\mathrm{c}}Z$ 轴以角速度 ω_{c} 转动时, 基矢量 $\boldsymbol{X}^0,\boldsymbol{Y}^0,\boldsymbol{Z}^0$ 按以下运动学方程改变空间中的方位

$$\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{X}^0}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{X}^0 = \omega_{\mathrm{c}}\boldsymbol{Y}^0 \tag{11.2.18a}$$

$$\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{Y}^0}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{Y}^0 = -\omega_{\mathrm{c}}\boldsymbol{X}^0 \tag{11.2.18b}$$

$$\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{Z}^0}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{Z}^0 = 0 \tag{11.2.18c}$$

利用表 11.3 表示的方向余弦将以上矢量方程对 $(O_{\mathrm{c}}-xyz)$ 投影, 导出以下**泊松 (Poisson) 方程**:

$$\dot{\alpha}_1 = \omega_z\alpha_2 - \omega_y\alpha_3 + \omega_{\mathrm{c}}\beta_1 \tag{11.2.19a}$$

$$\dot{\alpha}_2 = \omega_x\alpha_3 - \omega_z\alpha_1 + \omega_{\mathrm{c}}\beta_2 \tag{11.2.19b}$$

$$\dot{\alpha}_3 = \omega_y\alpha_1 - \omega_x\alpha_2 + \omega_{\mathrm{c}}\beta_3 \tag{11.2.19c}$$

$$\dot{\beta}_1 = \omega_z\beta_2 - \omega_y\beta_3 - \omega_{\mathrm{c}}\alpha_1 \tag{11.2.20a}$$

$$\dot{\beta}_2 = \omega_x\beta_3 - \omega_z\beta_1 - \omega_{\mathrm{c}}\alpha_2 \tag{11.2.20b}$$

$$\dot{\beta}_3 = \omega_y\beta_1 - \omega_x\beta_2 - \omega_{\mathrm{c}}\alpha_3 \tag{11.2.20c}$$

$$\dot{\gamma}_1 = \omega_z\gamma_2 - \omega_y\gamma_3 \tag{11.2.21a}$$

$$\dot{\gamma}_2 = \omega_x\gamma_3 - \omega_z\gamma_1 \tag{11.2.21b}$$

$$\dot{\gamma}_3 = \omega_y\gamma_1 - \omega_x\gamma_2 \tag{11.2.21c}$$

欧拉方程 (11.2.17) 和泊松方程 (11.2.19),(11.2.20) 组成封闭的方程组, 确定 9 个未知变量 $\omega_x,\omega_y,\omega_z,\alpha_i,\beta_i\,(i=1,2,3)$, 代入方程组 (11.2.21), 可单独解出另外 3 个变量 $\gamma_i\,(i=1,2,3)$.

泊松方程 (11.2.19), (11.2.20), (11.2.21) 存在 3 个初积分

$$\begin{aligned} &\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=0 \\ &\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2=0 \\ &\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=0 \end{aligned} \tag{11.2.22}$$

系统的动能 (11.2.16) 和势能 (11.2.12) 均不显含时间 t, 根据 3.4.2 节的分析, 动力学方程存在**雅可比积分** (3.4.20)

$$\mathscr{H}=T_2+V^*=\text{常数} \tag{11.2.23}$$

其中 $\mathscr{H}$ 为**哈密顿函数**, $V^*=V-T_0$ 为轨道坐标系内的相对势能. T_0 和 T_2 为动能 T 的表达式中广义速度的零次和二次齐次项. 利用式 (11.2.12) 和 (11.2.16), 略去常数项, 导出

$$T_2=\frac{1}{2}\left(A\omega'^2_x+B\omega'^2_y+C\omega'^2_z\right) \tag{11.2.24a}$$

$$V^*=\frac{3}{2}\omega_c^2\left(A\alpha_1^2+B\alpha_2^2+C\alpha_3^2\right)-\frac{1}{2}\omega_c^2\left(A\gamma_1^2+B\gamma_2^2+C\gamma_3^2\right) \tag{11.2.24b}$$

相对势能 V^* 为地球引力场和离心力场势函数之和. 雅可比积分的物理意义为刚体在轨道坐标系中的相对动能与相对势能之和守恒.

11.2.3 刚体与轨道坐标系的同步转动

欧拉方程和泊松方程存在以下特解

$$\begin{aligned} &\omega_x=\omega_y=0,\ \omega_z=\omega_c,\ \alpha_1=1,\ \alpha_2=\alpha_3=0 \\ &\beta_2=1,\ \beta_1=\beta_3=0,\ \ \gamma_3=1,\ \gamma_1=\gamma_2=0 \end{aligned} \tag{11.2.25}$$

对应的稳态运动为刚体跟随轨道坐标系的同步转动, (O_c-xyz) 与 (O_c-XYZ) 各轴保持重合. 这种特殊状态是**轨道静止卫星**的正常工作状态.

用卡尔丹角表示刚体受扰后相对轨道坐标系的姿态, 为避免与表 11.3 定义的方向余弦符号混淆, 改用 ϑ,ψ 代替 α,β 表示卡尔丹角, 转动顺序如下 (图 11.12):

$$(O_c-XYZ)\ \underset{X,x_1}{\overset{\vartheta}{\longrightarrow}}\ (O_c-x_1y_1z_1)\ \underset{y_1,y_2}{\overset{\psi}{\longrightarrow}}\ (O_c-x_2y_2z_2)\ \underset{z_2,z}{\overset{\varphi}{\longrightarrow}}\ (O_c-xyz)$$

ϑ,ψ,φ 分别为卫星的偏航角、滚动角和俯仰角. 仅保留扰动量 ϑ,ψ 的一阶微量, 表 11.3 中的方向余弦 $\alpha_i,\gamma_i\,(i=1,2,3)$ 和角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 在 (O_c-xyz) 中的投影表示为

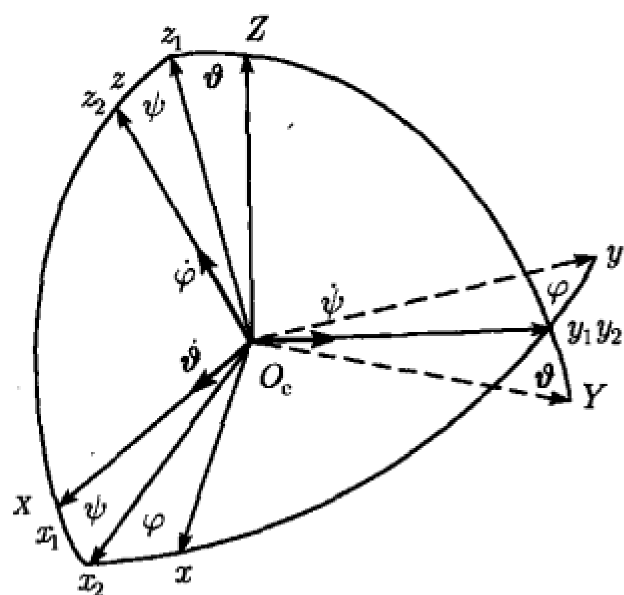


图 11.12　刚体相对轨道坐标系的卡尔丹角

$$
\begin{gathered}
\alpha_1 = 1,\ \ \alpha_2 = 0,\ \ \alpha_3 = \psi \\
\gamma_1 = -\psi,\ \ \gamma_2 = \vartheta,\ \ \gamma_3 = 1 \\
\omega_x = \dot{\vartheta} - \omega_c \psi,\ \ \omega_y = \dot{\psi} + \omega_c \vartheta,\ \ \omega_z = \dot{\varphi} + \omega_c
\end{gathered} \tag{11.2.26}
$$

将上式代入欧拉方程 (11.2.17), 化作

$$A\ddot{\vartheta} - (A + B - C)\,\omega_c \dot{\psi} + (C - B)\,\omega_c^2 \vartheta = 0 \tag{11.2.27a}$$

$$B\ddot{\psi} + (A + B - C)\,\omega_c \dot{\vartheta} + 4\,(C - A)\,\omega_c^2 \psi = 0 \tag{11.2.27b}$$

$$C\ddot{\varphi} + 3\,(B - A)\,\omega_c^2 \varphi = 0 \tag{11.2.27c}$$

其中方程 (11.2.27c) 单独确定俯仰角 φ 的变化规律. 其零解的稳定性条件为

$$B > A \tag{11.2.28}$$

方程 (11.2.27a) 和 (11.2.27b) 组成线性方程组, 利用 7.2.1 节对线性陀螺系统使用的符号写作

$$\boldsymbol{J}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{G}\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \tag{11.2.29}$$

方程中各项依次为惯性力矩、陀螺力矩和恢复力矩, 各矩阵符号定义为

$$
\begin{gathered}
x = \begin{pmatrix} \vartheta \\ \psi \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{G} = \omega_c\,(A + B - C)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{K} = \omega_c^2 \begin{pmatrix} C - B & 0 \\ 0 & 4\,(C - A) \end{pmatrix}
\end{gathered} \tag{11.2.30}
$$

根据 7.2.1 节的分析, 刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 的正定性为系统 (11.2.29) 零解稳定的充分条件. 此条件结合俯仰角 φ 的稳定性条件 (11.2.28), 要求刚体的质量几何满足

$$C > B > A \tag{11.2.31}$$

如 $\boldsymbol{K}$ 矩阵为负定, 则陀螺项 $\boldsymbol{G}$ 的加入有可能使系统转为稳定. 为讨论此可能性, 引入量纲为一的时间变量 $\tau = \omega_c t$, 令 $\vartheta = \vartheta_0 e^{s\tau}$, $\psi = \psi_0 e^{s\tau}$, 导出方程组的特征方程

$$s^4 + as^2 + b = 0 \tag{11.2.32}$$

系数 a, b 定义为

$$a = 1 + \sigma(\rho + 3\gamma), \quad b = 4\sigma\rho \tag{11.2.33}$$

其中量纲为一的参数 σ, ρ 的定义见式 (11.1.20), 且 $\gamma = A/B$. 特征方程 (11.2.32) 的纯虚根条件即系统 (11.2.29) 的零解稳定性条件

$$a > 0, \ \ b > 0, \ \ a^2 - 4b > 0 \tag{11.2.34}$$

根据此条件, 在马格努斯三角形内, 条件 (11.2.34) 对应的三角形稳定域称为**拉格朗日区**. 此外, 在 $B > A > C$ 区域内还存在一条称作**德布拉–德尔普** (Debra-Delp) **区**的狭窄稳定域 (图 11.13). 7.2.1 节的分析表明, 德布拉–德尔普稳定区的出现是由于陀螺项的存在. 但如果系统内存在阻尼, 且为完全消散力, 根据开尔文–泰德定理, 陀螺项的稳定作用失效, 德布拉–德尔普稳定区对应的刚体同步转动仍可能失稳.

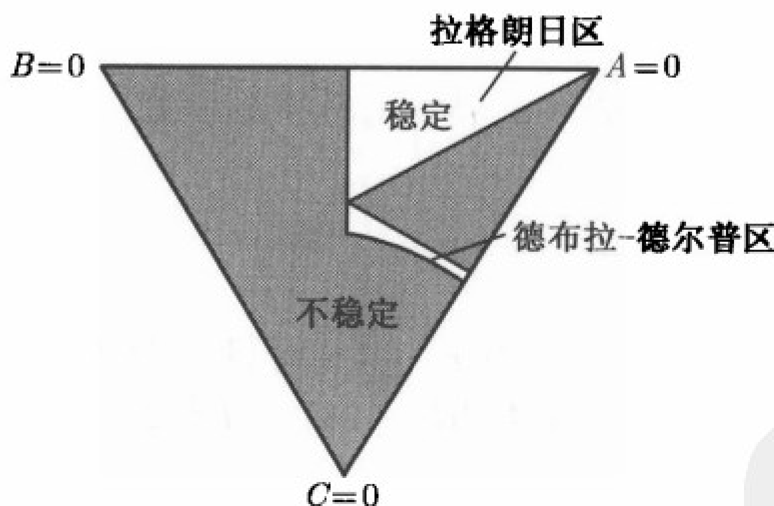


图 11.13　地球引力场内刚体与轨道同步运动的稳定域

上述一次近似稳定性分析导出的稳定性条件仅为稳定性必要条件. 稳定性充分条件的证明须应用李雅普诺夫直接方法. 将雅可比积分 (11.2.23) 中的哈密顿函数 $\mathscr{H}$ 取作李雅普诺夫函数 $\mathscr{V}$, 令

$$\mathscr{V} = T_2 + V^* \tag{11.2.35}$$

利用几何积分 (11.2.22) 消去式 (11.2.23) 中相对势能 V^* 中的 α_1 和 γ_3, 化作

$$V^* = \frac{3}{2}\omega_c^2\left[(B-A)\alpha_2^2 + (C-A)\alpha_3^2\right] + \frac{1}{2}\omega_c^2\left[(C-A)\gamma_1^2 + (C-B)\gamma_2^2\right] \quad (11.2.36)$$

李雅普诺夫函数 $\mathscr{V}$ 中的 T_2 为扰动量 $\omega'_x, \omega'_y, \omega'_z$ 的正定函数, V^* 关于扰动量 $\alpha_2, \alpha_3, \gamma_1, \gamma_2$ 的正定性条件与一次近似稳定性条件 (11.2.31) 完全相同. 从而证明, 拉格朗日稳定域同时也满足稳定性充分条件.

11.2.4　地球引力场中的充液刚体

设轴对称刚体卫星带有旋转椭球形腔, 腔内全充理想液体, 在地球引力场中作与轨道坐标系同步的转动. 将式 (11.2.8) 和 (11.2.26) 代入 10.4.1 节中的充液刚体动力学方程 (10.4.3), 令 $A=B$, $A'=B'$, $\omega_z=\omega_c$, 化作

$$A\ddot{\vartheta} - (2A-C)\omega_c\dot{\psi} + (C-A)\omega_c^2\vartheta + A'\left(\dot{\Omega}'_x - \omega_c\Omega'_y\right) = 0 \quad (11.2.37a)$$

$$A\ddot{\psi} + (2A-C)\omega_c\dot{\vartheta} + 4(C-A)\omega_c^2\psi + A'\left(\dot{\Omega}'_y - \omega_c\Omega'_x\right) = 0 \quad (11.2.37b)$$

将亥姆霍兹方程 (10.4.17) 中的 α, β 改记为 ϑ, ψ, ω_0 以 ω_c 代替, 化作

$$\ddot{\vartheta} + \omega_c\dot{\psi} + \dot{\Omega}'_x + \Gamma\omega_c\Omega'_y = 0 \quad (11.2.38a)$$

$$\ddot{\psi} - \omega_c\dot{\vartheta} + \dot{\Omega}'_y - \Gamma\omega_c\Omega'_x = 0 \quad (11.2.38b)$$

式 (11.2.37) 和 (11.2.38) 组成封闭的方程组, 确定 4 个未知变量 $\vartheta, \psi, \Omega'_x, \Omega'_y$. 利用量纲为一的时间变量 $\tau = \omega_c t$, 令各变量为以 s 为指数的 τ 的指数函数, 导出特征方程

$$a_0 s^6 + a_1 s^4 + a_2 s^2 + a_3 = 0 \quad (11.2.39)$$

其中

$$\begin{aligned} a_0 &= (1-\gamma)^2 \\ a_1 &= (2-\Lambda)\left[2-\Lambda-2\gamma(\Gamma+1)\right] + 5(\Lambda-1)(1-\gamma) + \Gamma(\Gamma-2\gamma) \\ a_2 &= (\Lambda-1)\left[4(\Lambda-1) - 3\gamma + \Gamma(5\Gamma-2\gamma)\right] + \Gamma^2(2-\Lambda)^2 \\ a_3 &= 4\Gamma^2(\Lambda-1)^2 \end{aligned} \quad (11.2.40)$$

量纲为一的参数 $\Lambda = C/A$, $\gamma = A'/A$, $\Gamma = (\lambda^2-1)/(\lambda^2+1)$ 分别如式 (10.4.20) 及式 (10.3.37) 的定义, 其中 λ 为椭球腔的半轴比, 改用 Λ 表示惯性矩比.

数值计算表明, 随着液体成分所占比例的增大, 图 11.13 中马格努斯三角形的拉格朗日区内的所有点仍满足纯虚根条件, 但德布拉–德尔普区逐渐缩小乃至消失. 从而证明, 刚体卫星的稳定性条件 $C > B > A$ 仍为带全充液腔刚体卫星同步转动的一次近似稳定性条件.

11.3　受地球引力矩作用的自旋卫星

11.3.1　地球引力场中自旋卫星的平衡状态

考虑地球引力矩的作用, 讨论轴对称刚体在圆轨道中绕极轴的自旋运动. 设 $A=B$, 地球引力矩 (11.2.8) 简化为

$$\begin{aligned} M_x &= 3\omega_c^2 (C-A)\,\alpha_2\alpha_3 \\ M_y &= 3\omega_c^2 (A-C)\,\alpha_3\alpha_1 \\ M_z &= 0 \end{aligned} \tag{11.3.1}$$

代入轴对称刚体的欧拉方程 (2.2.34), 得到

$$A\dot{\omega}_x + (C\omega_z - A\omega_{1z})\,\omega_y = 3\omega_c^2 (C-A)\,\alpha_2\alpha_3 \tag{11.3.2a}$$

$$A\dot{\omega}_y + (A\omega_{1z} - C\omega_z)\,\omega_x = 3\omega_c^2 (A-C)\,\alpha_3\alpha_1 \tag{11.3.2b}$$

$$C\dot{\omega}_z = 0 \tag{11.3.2c}$$

方程 (11.3.2c) 有初积分

$$\omega_z = \omega_0 \tag{11.3.3}$$

积分常数 ω_0 为刚体绕极轴的自旋角速度.

仍采用 11.2.3 节定义的卡尔丹角表示刚体相对轨道坐标系 (O_c-XYZ) 的姿态, 方向余弦 $\alpha_i, \gamma_i\,(i=1,2,3)$ 为

$$\begin{gathered} \alpha_1 = \cos\psi,\ \ \alpha_2 = 0,\ \ \alpha_3 = \sin\psi \\ \gamma_1 = -\cos\vartheta\sin\psi,\ \ \gamma_2 = \sin\vartheta,\ \gamma_3 = \cos\vartheta\cos\psi \end{gathered} \tag{11.3.4}$$

角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 在 (O_c-xyz) 中的投影为

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\vartheta}\cos\psi - \omega_c\cos\vartheta\sin\psi \\ \omega_y &= \dot{\psi} + \omega_c\sin\vartheta \\ \omega_z &= \dot{\varphi} + \dot{\vartheta}\sin\psi + \omega_c\cos\vartheta\cos\psi \end{aligned} \tag{11.3.5}$$

令动坐标系角速度为 $\omega_{1z} = \omega_z - \dot{\varphi}$. 将式 (11.3.4), (11.3.5) 代入欧拉方程 (11.3.2), 令其中所有导数项为零, 得到坐标 ϑ, ψ 的驻值 ϑ_s, ψ_s 应满足的方程

$$(\lambda\beta - \cos\vartheta_s\cos\psi_s)\sin\vartheta_s = 0 \tag{11.3.6a}$$

$$\left\{\lambda\beta\cos\vartheta_s + \left[3(\lambda-1) - \cos^2\vartheta_s\right]\cos\psi_s\right\}\sin\psi_s = 0 \tag{11.3.6b}$$

其中量纲为一的参数 λ,β 分别为星体的惯性矩比和自旋角速度 ω_0 与圆轨道角速度 ω_c 之比

$$\lambda=\frac{C}{A},\quad \beta=\frac{\omega_0}{\omega_c} \tag{11.3.7}$$

方程组 (11.3.6) 存在 3 组解, 对应于星体的自旋轴相对轨道坐标系的 3 种平衡状态:

状态一：$\vartheta_s=0,\ \ \psi_s=0$：极轴平行于轨道平面的法线.

状态二：$\psi_s=0,\ \ \vartheta_s=\arccos(\lambda\beta)$: 极轴垂直于矢径 $\boldsymbol{r}$, 且相对轨道面法线倾斜 ϑ_s 角度.

状态三：$\vartheta_s=0,\ \ \psi_s=\arccos(\lambda\beta/(4-3\lambda))$：极轴垂直于轨道切线, 且相对轨道面法线倾斜 ψ_s 角度.

以上分析表明, 与无力矩状态不同, 卫星在地球引力矩作用下其自旋轴在轨道坐标系内只能取有限个相对平衡位置. 其中状态一称为**汤姆孙** (Thomson) **平衡**, 随着卫星质心的圆轨道运动, 自旋轴在惯性空间中的轨迹为圆柱面 (图 11.14(a)). 状态二和状态三称为**莱金斯–普林格尔** (Likins-Pringle) **平衡**, 自旋轴的轨迹分别为旋转双曲面 (图 11.14(b)) 和圆锥面 (图 11.14(c)). 3 种平衡状态中的状态一为自旋卫星的正常工作状态. 在此位置上作用于刚体的地球引力矩为零, 因此动量矩矢量 $\boldsymbol{H}$ 沿轨道面法线保持方向不变. 在状态二和状态三中, 地球引力矩引起星体的动量矩矢量 $\boldsymbol{H}$ 绕 Z 轴的进动恰好与轨道坐标系的转动同步.

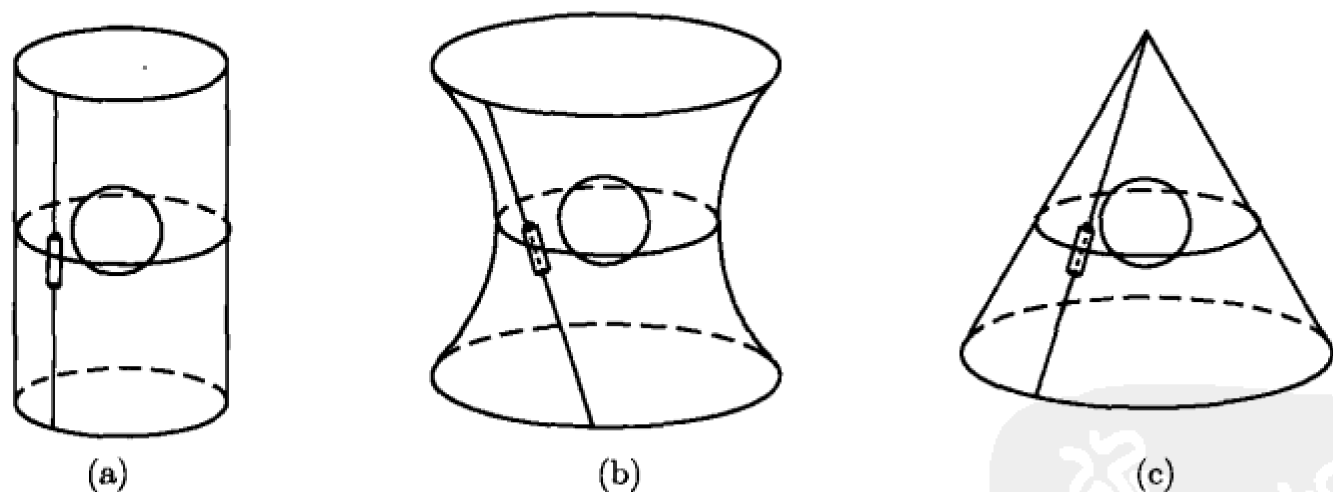


图 11.14　自旋卫星在轨道坐标系内的相对平衡状态

上述星体自旋轴的相对平衡位置 ϑ_s,ψ_s 也可依据相对势能 V^* 对广义坐标的导数为零的条件确定. 将式 (11.3.4), (11.3.5) 代入动能和势能公式 (11.2.12) 和 (11.2.16), 令刚体的相对角速度 ω' 的投影为

$$\omega_x'=\dot{\vartheta}\cos\psi,\ \ \omega_y'=\dot{\psi},\ \ \omega_z'=\omega_0-\omega_c\cos\vartheta\cos\psi \tag{11.3.8}$$

导出相对势能 V^*

$$V^* = \frac{1}{2}\omega_c^2\left[3(C-A)\sin^2\psi + A\cos^2\vartheta\cos^2\psi\right] - C\omega_0\omega_c\cos\vartheta\cos\psi \tag{11.3.9}$$

令 V^* 对 ϑ,ψ 的导数为零

$$\left(\frac{\partial V^*}{\partial\vartheta}\right)_{\vartheta_s,\psi_s} = 0,\quad \left(\frac{\partial V^*}{\partial\psi}\right)_{\vartheta_s,\psi_s} = 0 \tag{11.3.10}$$

解出驻值 ϑ_s,ψ_s 应满足的方程与式 (11.3.6) 完全相同.

11.3.2　自旋轴的稳定性充分条件

自旋轴在轨道坐标系中相对平衡的稳定性可应用李雅普诺夫直接方法判断. 将雅可比积分中的哈密顿函数 $\mathscr{H}$ 取作李雅普诺夫函数 $\mathscr{V}$，即

$$\mathscr{V} = A\left(\dot\vartheta^2\cos^2\psi + \dot\psi^2\right) + V^* \tag{11.3.11}$$

在平衡位置 $\vartheta=\vartheta_s$, $\psi=\psi_s$, $\dot\vartheta=\dot\psi=0$ 附近, $\mathscr{V}$ 函数关于变量 $\dot\vartheta$, $\dot\psi$ 为正定, 关于变量 ϑ, ψ 的正定性条件等价于 V^* 在平衡位置处的极小值条件, 可利用 V^* 的赫赛 (Hess) 矩阵 $\mathcal{H}$ 判断

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 V^*}{\partial\vartheta^2} & \dfrac{\partial^2 V^*}{\partial\vartheta\partial\psi} \\ \dfrac{\partial^2 V^*}{\partial\vartheta\partial\psi} & \dfrac{\partial^2 V^*}{\partial\psi^2} \end{pmatrix}_{\vartheta_s,\psi_s} \tag{11.3.12}$$

其中

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V^*}{\partial\vartheta^2} &= 2A\omega_c^2\cos\psi\,(\lambda\beta\cos\vartheta - \cos 2\vartheta\cos\psi) \\ \frac{\partial^2 V^*}{\partial\psi^2} &= 2A\omega_c^2\left\{\lambda\beta\cos\vartheta\cos\psi + \left[3(\lambda-1) - \cos^2\vartheta\right]\cos 2\psi\right\} \\ \frac{\partial^2 V^*}{\partial\vartheta\partial\psi} &= 2A\omega_c^2\sin\vartheta\sin\psi\,(2\cos\vartheta\cos\psi - \lambda\beta) \end{aligned} \tag{11.3.13}$$

令 $\det(\mathcal{H})$ 的各主子式大于零, 将以上导出的 ϑ_s, ψ_s 的 3 组解代入, 即得到各平衡位置的稳定性充分条件

$$\text{状态一：}\quad \lambda\beta - 1 > 0,\quad (3+\beta)\lambda - 4 > 0 \tag{11.3.14a}$$

$$\text{状态二：}\quad \lambda > 1,\quad \lambda\beta - 1 < 0 \tag{11.3.14b}$$

$$\text{状态三：}\quad \lambda < 1,\quad (3+\beta)\lambda - 4 < 0 \tag{11.3.14c}$$

根据此稳定性条件在 (β,λ) 参数平面内划分的稳定域如图 11.15 所示, 其中 D_1, D_2, D_3 依次为上述 3 种平衡状态的稳定域. 惯性矩比 λ 在 0 和 2 之间变动,

$\lambda=0$ 的星体为无限细杆, $\lambda=1$ 为轴对称体, $\lambda=2$ 为无限扁圆盘. 参数 $\beta=0$ 时星体在惯性空间中平动, $\beta=1$ 时星体在轨道坐标系内保持相对静止状态.

11.3.3 自旋轴的一次近似稳定性条件

在图 11.15 中, 状态一的稳定区位于 $\beta>0$ 的右半平面以内. 因此要保证自旋卫星的实际工作状态稳定, 自旋方向必须与轨道坐标系的转动方向一致. 由于稳定性充分条件确定的稳定域不一定能覆盖稳定域的全部, 为此再应用一次近似理论讨论状态一稳定性的其他可能性. 设自旋轴受扰后与 Z 轴有微小偏离, ϑ,ψ 为无限小量, 仅保留其一次项, 将式 (11.2.27) 代入欧拉方程 (11.3.2a), (11.3.2b) 使其线性化, 写作线性陀螺系统的普遍形式

$$\boldsymbol{J}\ddot{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{G}\dot{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \tag{11.3.15}$$

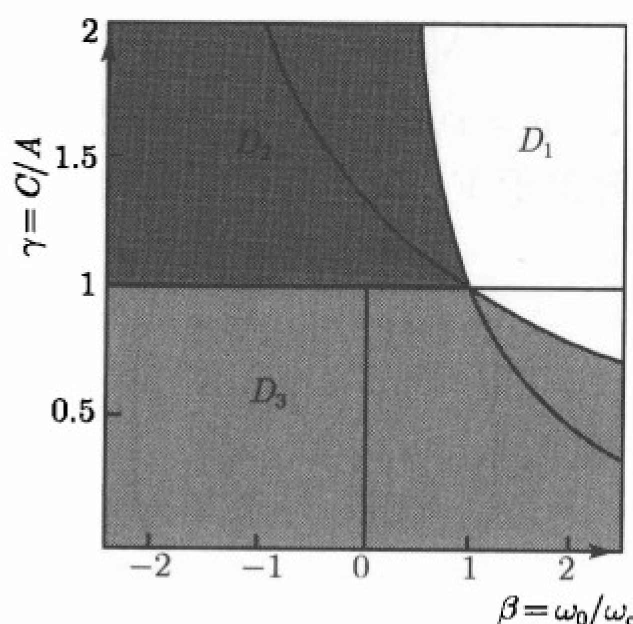


图 11.15 (β,λ) 参数平面内自旋卫星相对平衡的稳定域

各系数矩阵定义为

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\vartheta\\ \psi\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}A&0\\0&A\end{pmatrix}\\ &\boldsymbol{G}=(C\omega_0-2A\omega_c)\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\\ &\boldsymbol{K}=\omega_c\begin{pmatrix}C\omega_0-A\omega_c&0\\0&C\omega_0+(3C-4A)\,\omega_c\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{11.3.16}$$

其中的刚度阵 $\boldsymbol{K}$ 即式 (11.3.12) 定义的赫斯矩阵 $\mathcal{H}$. 因此稳定性条件 (11.3.14a) 等价于 $\boldsymbol{K}$ 矩阵的正定性条件, 即线性系统的稳定性充分条件. 陀螺项 $\boldsymbol{G}$ 的存在有可能使稳定性的范围扩大. 利用量纲为一的时间变量 $\tau=\omega_c t$, 令 $\vartheta=\vartheta_0\mathrm{e}^{s\tau}$, $\psi=\psi_0\mathrm{e}^{s\tau}$,

导出系统 (11.3.15) 的特征方程

$$s^2+as+b=0 \tag{11.3.17}$$

系数 a,b 为

$$\begin{aligned} a &= 3\lambda-1-2\lambda\beta+\lambda^2\beta^2 \\ b &= (\lambda\beta-1)\left[(3+\beta)\lambda-4\right] \end{aligned} \tag{11.3.18}$$

利用特征方程 (11.3.17) 的纯虚根条件 (11.2.35), 在 (β,λ) 参数平面上划分的稳定域如图 11.15 所示. 其中右侧大部分稳定域与图 11.14 的稳定域 D_1 重合, 陀螺项的稳定作用扩展出左侧的新稳定域.

分析图 11.16 可归纳出以下结论:

1) 当自旋角速度的绝对值 $|\omega_0|$ 超过轨道角速度 ω_c, 即 $|\beta|>1$ 时, 星体自旋产生的陀螺效应可加强自旋轴保持轨道面法线方向的稳定性. 自旋角速度愈大, 稳定域也愈大. 自旋方向与轨道坐标系转动方向一致时 $(\beta>0)$ 较方向相反时 $(\beta<0)$ 的稳定域略小, 但前者同时满足稳定性充分条件. 若考虑星体实际存在的阻尼因素, 则左侧稳定域转为不稳定, 右侧稳定域转为渐近稳定.

2) 扁平形星体 $(\lambda>1)$ 当 $|\omega_0|>\omega_c$, 即 $|\beta|>1$ 时总能保持稳定.

3) 细长形星体 $(\lambda<1)$ 仅当自旋角速度 $|\omega_0|$ 足够大时方能保证稳定性. 星体愈细长, 要求稳定的自旋角速度愈大.

4) 星体做平动运动时 $(\beta=0)$, 只有惯性矩比严格满足 $1<\lambda<1.33$ 条件的接近球形的星体方有可能稳定. 细长形或扁平形星体均不可能稳定.

5) 相对轨道坐标系静止的星体 $(\beta=1)$ 只有扁平形星体 $(\lambda>1)$ 可能稳定. 虽然细长形星体也存在 $0.854<\lambda<1$ 的狭小稳定域, 但不满足稳定性充分条件.

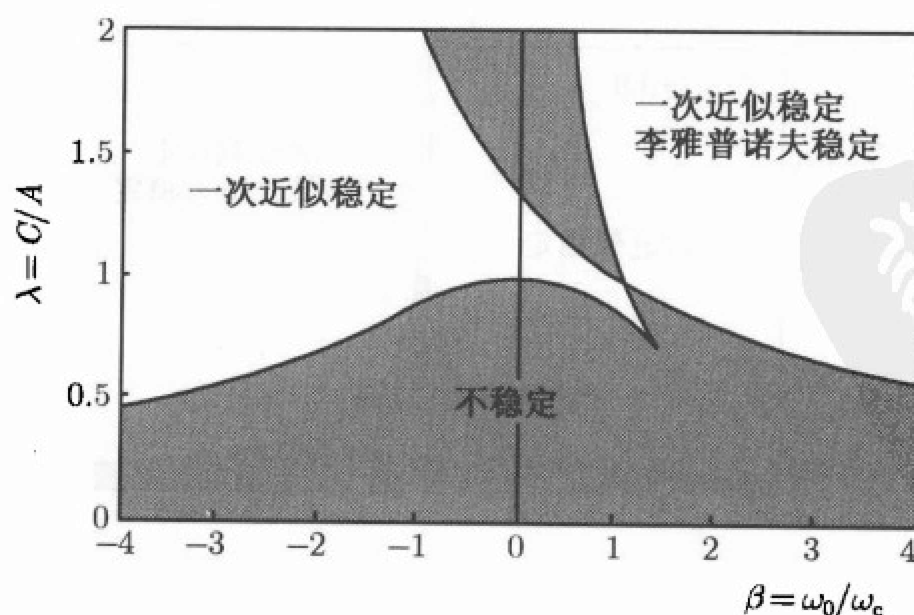


图 11.16　(β,λ) 参数平面内自旋卫星状态一的稳定域

11.3.4　地球引力场中的双自旋卫星

讨论轴对称陀螺体的运动时, 仅须将刚体的欧拉方程 (11.3.2) 中的 $C\omega_z$ 改为

$$C_{\mathrm{P}}\omega_z + C_{\mathrm{R}}\left(\omega_z + \Omega_{\mathrm{R0}}\right) = C\omega_z + C_{\mathrm{R}}\Omega_{\mathrm{R0}} = C^*\omega_z \tag{11.3.19}$$

因此将方程组 (11.3.2) 中的 C 以式 (11.1.28) 定义的陀螺体等效惯性矩 C^* 代替, 即转化为轴对称陀螺体在地球引力矩作用下的欧拉方程. 陀螺体自旋轴的相对平衡位置 $\vartheta_{\mathrm{s}}, \psi_{\mathrm{s}}$ 仍可利用式 (11.3.6) 确定, 仅须将其中的 λ 以 $\lambda^* = C^*/A$ 代替

$$(\lambda^*\beta - \cos\vartheta_{\mathrm{s}}\cos\psi_{\mathrm{s}})\sin\vartheta_{\mathrm{s}} = 0 \tag{11.3.20a}$$

$$\left\{\lambda^*\beta\cos\vartheta_{\mathrm{s}} + \left[3\left(\lambda^* - 1\right) - \cos^2\vartheta_{\mathrm{s}}\right]\cos\psi_{\mathrm{s}}\right\}\sin\psi_{\mathrm{s}} = 0 \tag{11.3.20b}$$

仍存在与上节类似的 3 种平衡状态, 以及各种状态的稳定性条件. 以 $\gamma_{\mathrm{R}} = C_{\mathrm{R}}\Omega_{\mathrm{R0}}/H$ 为参数, 图 11.17 为 (β, λ^*) 参数平面内 $\gamma_{\mathrm{R}} = 0.5$ 和 0.9 对应的状态一的稳定域. $\gamma_{\mathrm{R}} = 0$ 的特例即图 11.16 表示的自旋刚体的稳定域. 可从中看出稳定域随 γ_{R} 的增加, 即转子转速的提高而扩大.

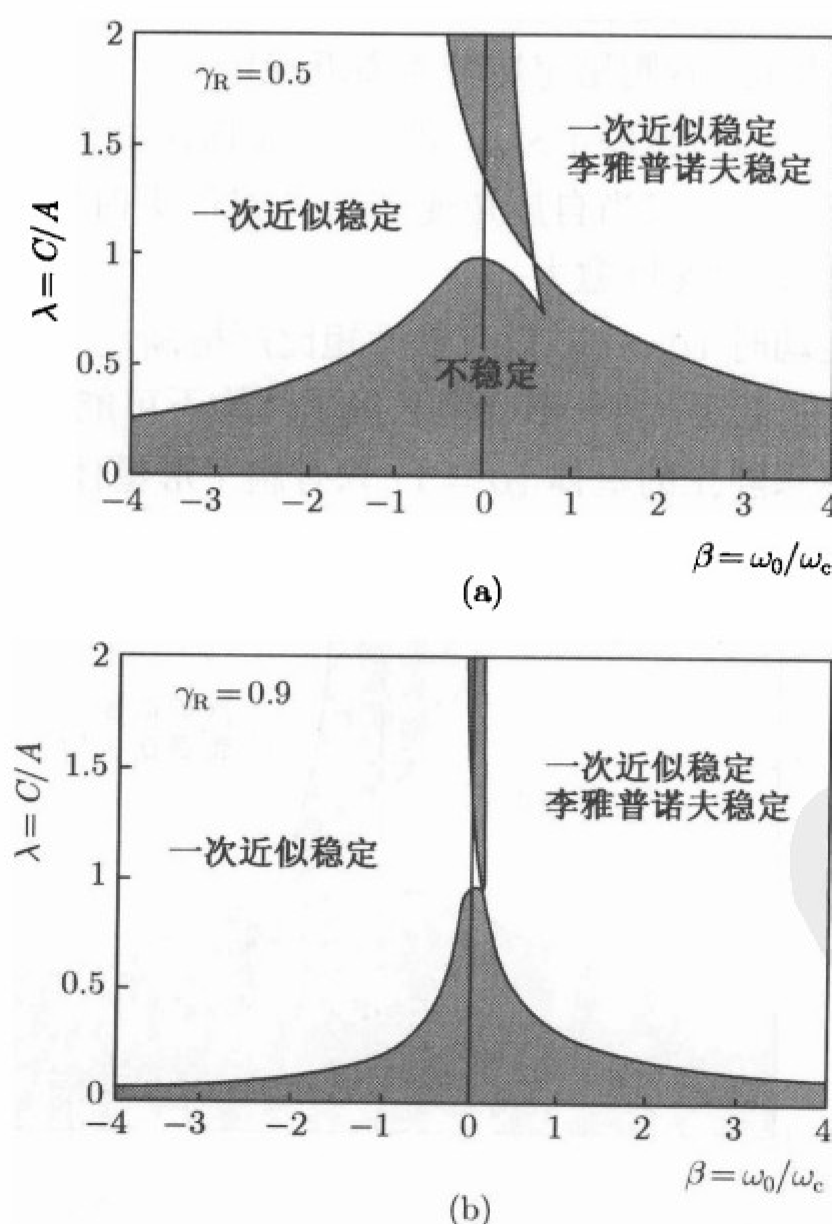


图 11.17　(β, λ^*) 参数平面内自旋陀螺体状态一的稳定域

11.4 自旋卫星的非稳态运动

11.4.1 起旋和消旋

卫星从静止状态转变为自旋状态的过程称为**起旋**, 必须依靠固定在星体上的喷气推力器施加力矩 $\boldsymbol{M}$ 实现. 与陀螺仪不同, 力矩 $\boldsymbol{M}$ 相对各连体坐标轴的分量 M_x, M_y, M_z 为时间的确定函数. 由于驱动力矩远大于微弱的地球引力矩, 后者可予忽略. 对于轴对称刚体, 令欧拉方程 (2.2.33) 中 $A=B$, 写作

$$A\dot{\omega}_x + (C-A)\omega_y\omega_z = M_x(t) \tag{11.4.1a}$$

$$A\dot{\omega}_y - (C-A)\omega_z\omega_x = M_y(t) \tag{11.4.1b}$$

$$C\dot{\omega}_z = M_z(t) \tag{11.4.1c}$$

其中方程 (11.4.1c) 可单独积分, 设星体绕极轴的初始角速度为 ω_0, 得到

$$\omega_z = \omega_0 + \frac{1}{C}\int_0^t M_z(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{11.4.2}$$

若 M_z 为常值, 星体自旋角速度的变化规律为

$$\omega_z = \omega_0 + \left(\frac{M_z}{C}\right)t \tag{11.4.3}$$

起旋过程中 M_z 与 ω_z 同号, 星体做匀加速转动. 利用 3.2.1 节中定义的卡尔丹角 α, β, φ 表示星体相对惯性坐标系 $(O_c-\xi\eta\zeta)$ 的姿态 (见图 3.4):

$$(O_c-\xi\eta\zeta) \underset{\xi,x_0}{\overset{\alpha}{\longrightarrow}} (O_c-x_0y_0z_0) \underset{y_0,y}{\overset{\beta}{\longrightarrow}} (O_c-xyz) \underset{z,z_R}{\overset{\varphi}{\longrightarrow}} (O_c-x_Ry_Rz_R)$$

仅保留自旋轴微小偏角 α, β 的一次项, 角速度分量近似为

$$\omega_x = \dot{\alpha}, \quad \omega_y = \dot{\beta}, \quad \omega_z = \dot{\varphi} \tag{11.4.4}$$

以 $\varphi=0$ 对应的时刻为初始时刻, 积分式 (11.4.3) 得到

$$\varphi = \int_0^t \omega_z(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{11.4.5}$$

将方程 (11.4.1a)、(11.4.1b) 的自变量 t 置换为 φ, 令

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \omega_z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi} \tag{11.4.6}$$

转化为以下非齐次线性方程组

$$\frac{\mathrm{d}\omega_x}{\mathrm{d}\varphi}+\sigma\omega_y=\mu_x(\varphi) \tag{11.4.7a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\omega_y}{\mathrm{d}\varphi}-\sigma\omega_x=\mu_y(\varphi) \tag{11.4.7b}$$

其中

$$\sigma=\frac{C}{A}-1,\quad \mu_x=\frac{M_x}{A\omega_z},\quad \mu_y=\frac{M_y}{A\omega_z} \tag{11.4.8}$$

引入复变量 u,μ

$$u=\omega_x+\mathrm{i}\omega_y,\quad \mu=\mu_x+\mathrm{i}\mu_y \tag{11.4.9}$$

将方程组 (11.4.7) 写作复数形式

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}-\mathrm{i}\sigma u=\mu(\varphi) \tag{11.4.10}$$

设 $u_0=\omega_{x0}+\mathrm{i}\omega_{y0}$ 为 $\varphi=0$ 时 u 的初值, 即极轴偏离稳态的初始扰动, 线性方程 (11.4.10) 的通解为

$$u(\varphi)=\left[u_0+\int_0^{\varphi}\mu(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma\xi}\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma\varphi} \tag{11.4.11}$$

如驱动力矩 $\boldsymbol{M}$ 严格沿极轴方向, $M_x=M_y=0$, 即 $\mu=0$, 上式简化为

$$u(\varphi)=u_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma\varphi} \tag{11.4.12}$$

上式在 u 的复数平面, 即 (ω_x,ω_y) 平面内表示以原点为圆心且通过初始扰动 u_0 的圆弧 (图 11.18). 星体的角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 沿圆锥面运动, 表明初始扰动可引起极轴的不衰减运动, 即星体的章动. 为判断驱动力矩 M_z 对星体稳定性的影响, 利用 9.3.1 节中描述的状态变量方程组中的式 (9.3.11d), 将 M_z 在 X,Y 轴上的投影代入后, 化作

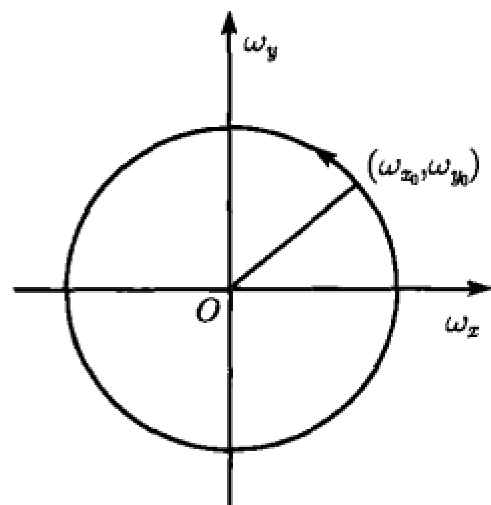


图 11.18　星体的章动

$$\dot{\vartheta}+\left(\frac{M_z}{H}\right)\sin\vartheta=0 \tag{11.4.13}$$

根据上式判断, $M_z>0$ 的驱动力矩可以保证章动角 ϑ 的稳定性.

星体从自旋状态转变为相对静止状态称为消旋. 令上述推力器施加的力矩 M_z 与 ω_z 异号, 则星体做匀减速转动. 但根据式 (11.4.13), $M_z<0$ 可导致章动角 ϑ 不稳定. 从节约能源考虑, 消旋宜采用被动方法实现. 最简单的方案是改变星体的惯

性矩. 设半径为 a 质量为 m_0 的圆柱形星体绕极轴做自旋运动, 星体上以变长度杆联系质量各为 m 的两个质量块, 沿径向对称地向外伸展, 与极轴的距离 x 不断增大 (图 11.19). 不计杆的质量, 星体与质量块组成的系统相对极轴的动量矩为

$$H_z = \left(J + 2mx^2\right)\omega_z \tag{11.4.14}$$

其中 $J = m_0a^2/2$ 为星体的极惯性矩. 忽略重力梯度力则矩动量矩守恒, H_z 为常值. 设初始时 $x = a$, 星体的初始角速度为 ω_0, 从上式导出自旋角速度 ω_z 的变化规律

$$\omega_z = \frac{\omega_0}{1 + k\left[(x/a)^2 - 1\right]} \tag{11.4.15}$$

其中常数 k 定义为

$$k = \frac{4m}{m_0 + 4m} \tag{11.4.16}$$

无限增加杆的长度, 方能使角速度衰减为零实现完全消旋.

悠悠消旋[①]是上述变长度杆方案的改进. 将质量块用两根柔索沿旋转方向缠绕在圆柱形星体上, 根部对称地固定于星体的外壁. 质量块先被锁定, 锁定装置打开后在离心力作用下向外运动使柔索逐渐释放. 设此时星体的角速度为 ω_0, 质量块的速度为 $a\omega_0$. 设柔索全部释放时刚体角速度被消除为零, 柔索长度为 l 且不可伸长, 则质量块速度 $\boldsymbol{v}$ 与柔索正交 (图 11.20). 根据动量矩守恒和机械能守恒定律分别列出

$$\left(J + 2ma^2\right)\omega_0 = 2mlv \tag{11.4.17}$$

$$\frac{1}{2}\left(J + 2ma^2\right)\omega_0^2 = 2 \times \left(\frac{1}{2}mv^2\right) \tag{11.4.18}$$

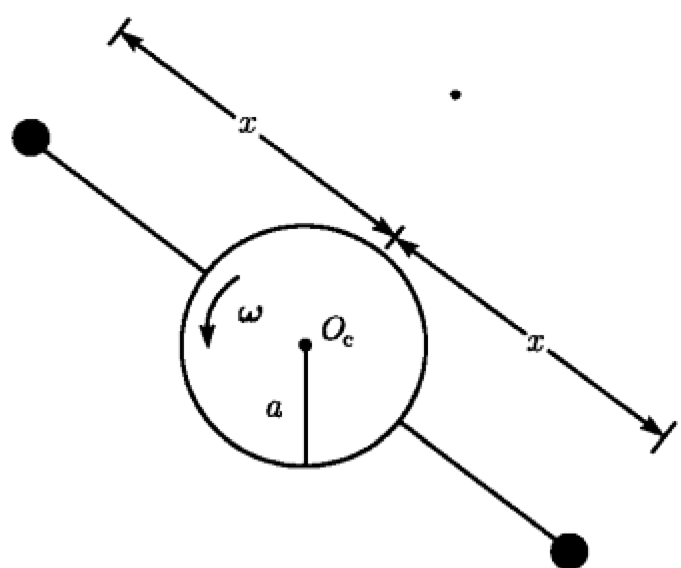


图 11.19　变长度杆消旋

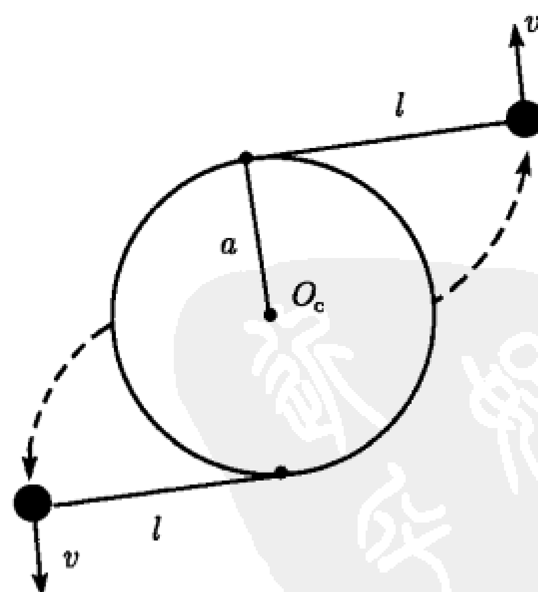


图 11.20　悠悠消旋

① 悠悠消旋的名称来自与悠悠球玩具的相似性. 悠悠球 (yo-yo) 是以短轴相连的一对圆盘. 将缠绕在短轴上的绳索一端绕在手指上, 松手后圆盘可沿绳上下滚动, 使悬绳不断改变长度.

从上式消去 v, 解出为保证完全消旋所必需的柔索长度 l

$$l=\frac{a}{\sqrt{k}} \tag{11.4.19}$$

长度 l 与初始角速度 ω_0 无关, 常数 k 的定义与式 (11.4.16) 相同.

双自旋卫星中转子的起旋和消旋可利用主体对转子的驱动电机实现. 由于为内力矩, 驱动过程对系统的总动量矩无影响. 转子的起旋, 即 $\Omega_{\mathrm{R}0}$ 增大必伴随主体转速 ω_0 减低, 反之, 转子消旋伴随主体转速 ω_0 增高. 对于无外力矩作用的轴对称陀螺体, 沿极轴方向的动量矩分量守恒, 记作 H_{z0}. 则 $\Omega_{\mathrm{R}0}$ 和 ω_0 的变化应满足

$$C\omega_0+C_{\mathrm{R}}\Omega_{\mathrm{R}0}=H_{z0} \tag{11.4.20}$$

利用上式消去式 (11.1.28) 定义的等效惯性矩 C^* 中的 $\Omega_{\mathrm{R}0}$, 化作

$$C^*=\frac{H_{z0}}{\omega_0} \tag{11.4.21}$$

由于 C^* 与 ω_0 成反比, 转子的起旋伴随稳定域扩大, 消旋使稳定域缩小.

11.4.2 章动的阻尼

上述自旋卫星在起旋过程中产生的章动必须采取阻尼措施予以消除. 在 5.1.3 节关于陀螺垂直仪径向修正的启示下, 可试图利用垂直于旋转轴的力矩起阻尼作用. 设

$$M_x=\text{常数},\quad M_y=\text{常数},\quad M_z=0 \tag{11.4.22}$$

则 $\omega_z=\omega_0$, 星体匀速自旋. 令方程 (11.4.11) 中 μ 为常值, 得到

$$u=\frac{\mathrm{i}\mu}{k}+\left(u_0-\frac{\mathrm{i}\mu}{k}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\varphi} \tag{11.4.23}$$

在 u 的复数平面内, 上式表示以偏离原点的 $(-\mu_y/k,\mu_x/k)$ 为圆心且通过初始扰动 u_0 的圆弧 (图 11.21). 角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 沿偏置的圆锥面运动, 未能起章动阻尼作用. 原因是径向修正力矩并非如陀螺垂直仪固定于壳体, 而是随同转子同步转动.

式 (11.4.23) 表明力矩的模愈大, 圆心偏离原点愈远. 若无限增大力矩, 则圆心必无限远离原点. $\boldsymbol{\omega}$ 矢量端点的圆弧轨迹趋近于直线 (图 11.22). 根据此现象, 可利用星体上的喷嘴产生一系列冲击力矩使 $\boldsymbol{\omega}$ 矢量朝预期方向运动. 令

$$\mu(\varphi)=\sum_j\mu_j\delta(\varphi-\varphi_j) \tag{11.4.24}$$

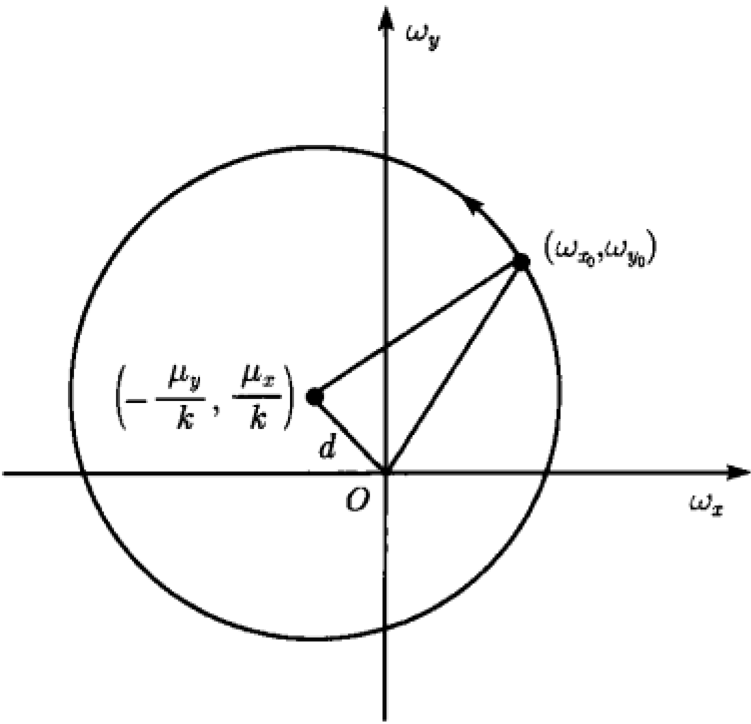


图 11.21　径向推力作用下的章动

其中 $\varphi_j=\omega_0 t_j$, t_j 为第 j 次冲击时间, μ_j 表示力矩的幅值, $\delta(\varphi)$ 为脉冲函数. 每次冲击产生的力矩冲量 P_j 为

$$P_j=\mu_j\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\xi-\xi_j)\mathrm{d}\xi=\mu_j 1(\varphi-\varphi_j) \tag{11.4.25}$$

其中 $1(\varphi)$ 为阶跃函数. 冲量 P_j 应与作用时刻的角速度 u_j 反向, 以保证每次冲击产生的角速度增量 $\Delta u_j=\omega_0 P_j$ 的实部或虚部为负值. 例如, 图 11.23 中的状态 1 应施加图 11.22 中编号为 1 的冲击力矩, 其余编号类推. 则 $\boldsymbol{\omega}$ 矢量以阶跃形式趋近原点, 章动随之消失.

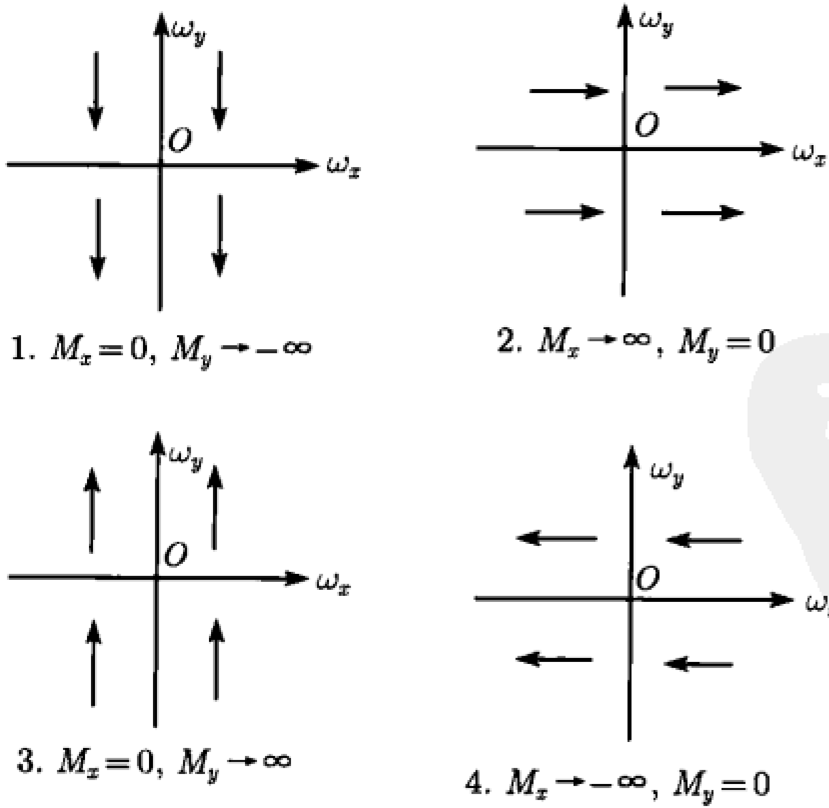


图 11.22　冲击力矩作用下极轴的运动趋势

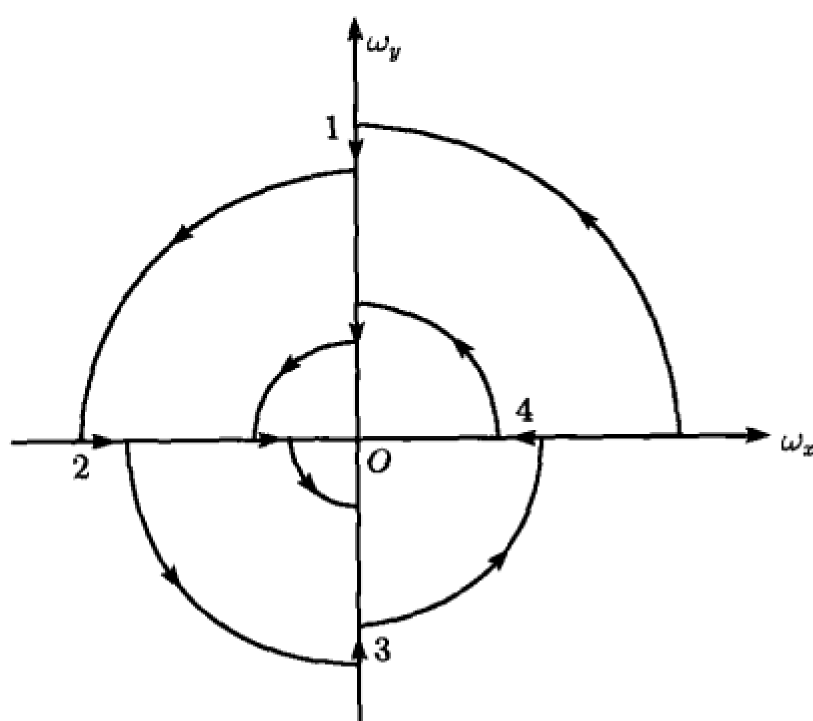


图 11.23　冲击力矩产生的章动阻尼

除上述施加力矩的主动阻尼方案以外, 根据 11.1.1 节的分析, 还可利用卫星内部的能量耗散起阻尼作用. 弹性附件或充液腔均存在耗散因素, 本节以液体阻尼环为例, 弹性附件的阻尼作用将在下节中讨论.

设圆环形细管内充满黏性液体, 圆环管在 $(y_{\text{R}}, z_{\text{R}})$ 坐标面内与星体固定, 以刚体质心 O_{c} 为中心, 半径为 a(图 11.24). 液体的质量为 m, 在主体旋转引起的惯性力作用下以角速度 $\dot{\gamma}$ 相对管壁做整体转动. 管壁对液体团的黏性阻力对质心的力矩与相对流速成正比, 阻尼力矩系数为 D, 其动力学方程为

$$ma^2\ddot{\gamma} + D\dot{\gamma} = -ma^2\dot{\omega}_{x_{\text{R}}} \tag{11.4.26}$$

其中 ω_x 为星体绕 x_{R} 轴的角速度分量. 设 $\omega_x = 0$ 时管内液体相对静止, 则对上式各项积分一次, 得到

$$T_\gamma\dot{\gamma} + \gamma = -T_\gamma\omega_x \tag{11.4.27}$$

其中 $T_\gamma = ma^2/D$. 将星体做自然规则进动时的角速度 (9.3.14) 作为零次近似, 投影到 x_{R} 轴, 且仅保留 ϑ 的一次项, 导出

$$\omega_x = \nu\vartheta\sin nt \tag{11.4.28}$$

其中 $n = \nu(1-\lambda)/\lambda$ 为星体自旋角速度. 将上式代入方程 (11.4.27), 参照 4.1.4 节导出的强阻尼摆的受迫振动特解 (4.1.49), 导出

$$\gamma = \gamma_0\sin(nt - \delta) \tag{11.4.29}$$

其中

$$\gamma_0 = \frac{\nu T_\gamma\vartheta}{\sqrt{1+n^2T_\gamma^2}}, \quad \delta = \arctan(nT_\gamma) + \pi \tag{11.4.30}$$

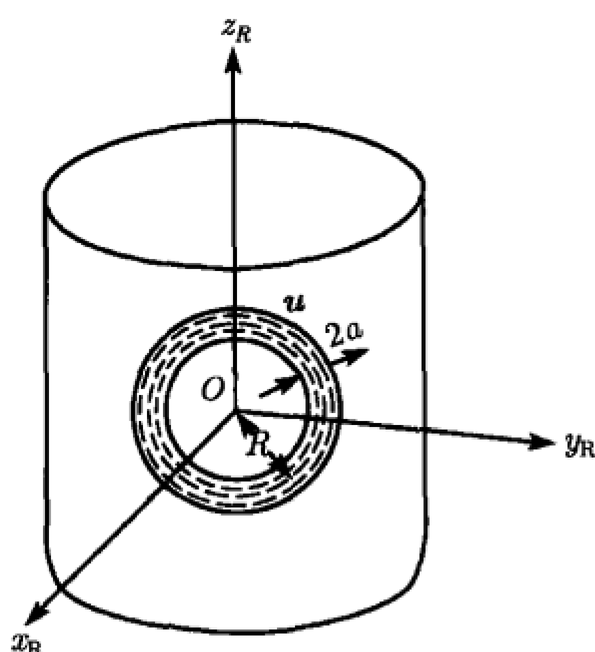


图 11.24　带液体阻尼环的自旋卫星

液体团在管内流动过程中, 每个自旋周期内管壁的黏性摩擦力所做的负功为

$$\Delta W = -\int_0^{2\pi/n} D\dot{\gamma}^2 \mathrm{d}t = -\pi D n^2 \gamma_0^2 \tag{11.4.31}$$

将 ΔW 与时间 $\Delta t = 2\pi/n$ 相除, 得到机械能的平均衰减率

$$\frac{\Delta W}{\Delta t} = -\frac{1}{2} D n^3 \gamma_0^2 = -\frac{D n^3 \nu^2 T_\gamma^2 \vartheta^2}{2\left(1 + n^2 T_\gamma^2\right)} \tag{11.4.32}$$

忽略阻尼环内的流体流动对卫星总体机械能公式的微小影响, 式 (9.3.17) 表示的动能 T 即星体的总机械能 E. 对时间求导后得到

$$\dot{E} = \frac{A\nu^2}{\lambda}(\lambda - 1)\vartheta\dot{\vartheta} \tag{11.4.33}$$

令上式与机械能的平均衰减率 (11.4.32) 互等, 导出 ϑ 的一阶方程

$$T_\vartheta \dot{\vartheta} + \vartheta = 0 \tag{11.4.34}$$

此方程确定章动阻尼过程, 衰减时间常数为

$$T_\vartheta = \frac{2A}{\nu^3 D T_\gamma^2}\left[\left(\frac{\lambda}{\lambda - 1}\right)^2 + \nu^2 T_\gamma^2\right] \tag{11.4.35}$$

11.5　弹性变形问题

11.5.1　带弹性附件的双自旋卫星

讨论带弹性附件的轴对称双自旋卫星的无力矩运动. 设主体带有弹性天线, 转子以常值角速度 Ω_{R0} 相对主体转动. 弹性天线简化为对称分布的 4 个无质量弹性

梁上的 4 个质点 P_j $(j=1,2,3,4)$. 各质点可沿极轴方向做微幅振动 (图 11.25). 采用 11.1.4 节定义的 $(O_\mathrm{c}-\xi\eta\zeta)$ 为参考坐标系, $O_\mathrm{c}\zeta$ 轴沿守恒的动量矩矢量 $\boldsymbol{H}$ 方向. 主体相对 $(O_\mathrm{c}-\xi\eta\zeta)$ 的姿态改用 1.1.3 节定义的欧拉角 ψ,ϑ,φ 表示, 转动次序为

$$(O_\mathrm{c}-\xi\eta\zeta)\ \underset{\zeta,z_0}{\overset{\psi}{\longrightarrow}}\ (O_\mathrm{c}-x_0y_0z_0)\ \underset{x_0,x}{\overset{\vartheta}{\longrightarrow}}\ (O_\mathrm{c}-xyz)\ \underset{z,z_\mathrm{R}}{\overset{\varphi}{\longrightarrow}}\ (O_\mathrm{c}-x_\mathrm{R}y_\mathrm{R}z_\mathrm{R})$$

上述欧拉角 ψ,ϑ,φ 与 2.4.1 节分析拉格朗日情形刚体定点运动时相同, 刚体的角速度公式也相同, 区别仅在于坐标系的原点由定点 O 改为质心 O_c (图 11.26).

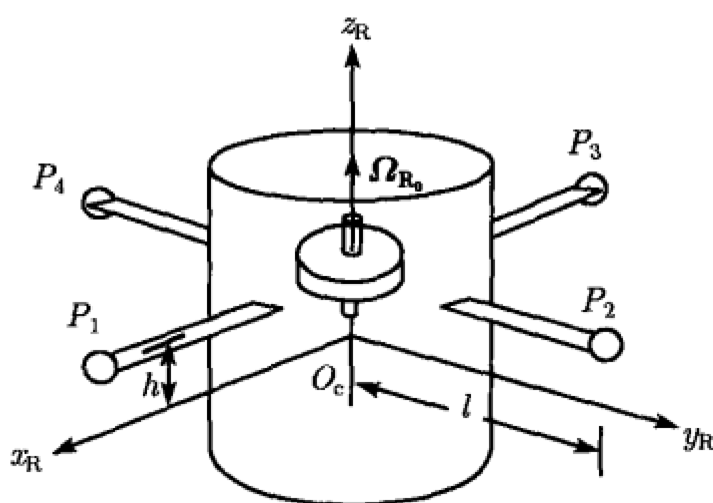


图 11.25　带弹性天线的双自旋卫星

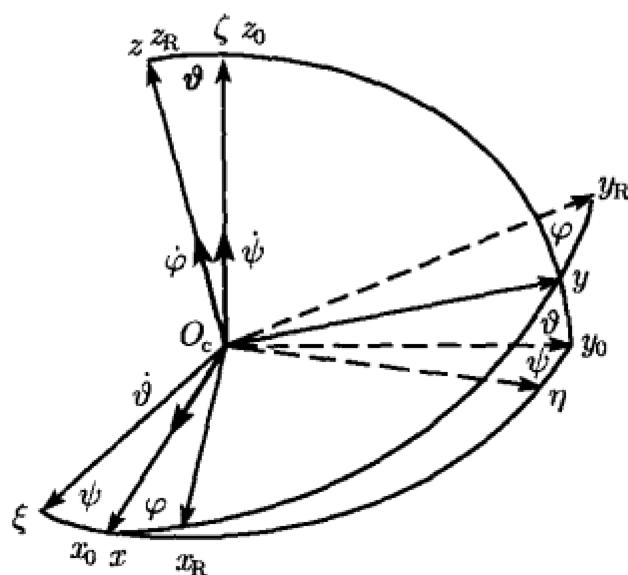


图 11.26　欧拉角

刚体的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 相对莱查坐标系 $(O-xyz)$ 的投影为

$$\omega_x=\dot\vartheta,\ \ \omega_y=\dot\psi\sin\vartheta,\ \ \omega_z=\dot\psi\cos\vartheta+\dot\varphi \tag{11.5.1}$$

设质点 P_j $(j=1,2,3,4)$ 的质量均为 m, 相对质心 O_c 的矢径为

$$\boldsymbol{r}_j=l\,(\cos\varphi_j\boldsymbol{i}+\sin\varphi_j\boldsymbol{j})+(h+z_j)\,\boldsymbol{k}\quad (j=1,2,3,4) \tag{11.5.2}$$

其中 $\varphi_j=\varphi+(j-1)\pi/2$ 为第 j 弹性梁相对 x 轴的角度, l 为弹性梁长度, h 为梁平面距质心的高度, z_j 为质点 P_j 偏离平衡位置的位移. 附件的弹性变形产生的惯性积为

$$J_{xz}=-\sum_{j=1}^{4}mlz_j\cos\varphi_j,\ \ J_{yz}=-\sum_{j=1}^{4}mlz_j\sin\varphi_j \tag{11.5.3}$$

计算附件静止时的刚体动量矩 $\boldsymbol{H}_0$, 将静止的附件视为主体的一部分, 利用式 (11.1.11) 的符号表示陀螺体及各部件的赤道惯性矩和极惯性矩, 得到

$$\boldsymbol{H}_0=(A\omega_x+J_{xz}\omega_z)\,\boldsymbol{i}+(A\omega_y+J_{yz}\omega_z)\,\boldsymbol{j}+(J_{xz}\omega_x+J_{yz}\omega_y+C\omega_z+C_\mathrm{R}\,\Omega_\mathrm{R0})\,\boldsymbol{k} \tag{11.5.4}$$

质点由于弹性变形引起相对运动时产生动量矩增量 $\Delta \boldsymbol{H}$, 仅保留 z_j 的一次项时导出

$$\Delta \boldsymbol{H} = \sum_{j=1}^{4} m\boldsymbol{r}_j \times \dot{z}_j \boldsymbol{k} = \sum_{j=1}^{4} ml\dot{z}_j \left(\sin\varphi_j \boldsymbol{i} - \cos\varphi_j \boldsymbol{j}\right) \tag{11.5.5}$$

卫星的总动量矩为 $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 + \Delta \boldsymbol{H}$. 将沿 ζ 轴方向的动量矩 $\boldsymbol{H}$ 向 $(O-xyz)$ 投影, 得到

$$\boldsymbol{H} = H\left(\sin\vartheta \boldsymbol{j} + \cos\vartheta \boldsymbol{k}\right) \tag{11.5.6}$$

应用逐次近似方法, 将 z_j 和 $\dot{z}_j$ 均为零的无弹性变形状态作为零次近似. 将式 (11.5.1) 代入式 (11.5.4), 令 J_{xz}, J_{yz} 为零, 与式 (11.5.6) 各项相等, 导出

$$\dot{\vartheta} = 0, \quad \dot{\psi} = \nu, \quad \dot{\varphi} = n \tag{11.5.7}$$

即式 (2.3.30) 描述的无力矩刚体的自然规则进动, ν 和 n 为无弹性变形时的章动频率和自旋角速度

$$\nu = \frac{H}{A}, \quad n = \frac{\nu}{\lambda}\left[(1-\lambda)\cos\vartheta - \gamma_{\mathrm{R}}\right] \tag{11.5.8}$$

其中 $\lambda = C/A$, $\gamma_{\mathrm{R}} = C_{\mathrm{R}}\Omega_{\mathrm{R}0}/H$. 对应的角速度零次近似值为

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = \nu\sin\vartheta, \quad \omega_z = \omega_{z0} = (\nu/\lambda)\left(\cos\vartheta - \gamma_{\mathrm{R}}\right) \tag{11.5.9}$$

考虑附件的弹性变形, 将上式代入式 (11.5.4), 与式 (11.5.5) 之和与式 (11.5.6) 各项相等, 其中 J_{xz}, J_{yz} 以式 (11.5.3) 代入, 得到欧拉角变化规律的一次近似式

$$\dot{\vartheta} = \frac{ml}{A}\sum_{j=1}^{4}\left(z_j\omega_{z0}\cos\varphi_j - \dot{z}_j\sin\varphi_j\right) \tag{11.5.10a}$$

$$\dot{\psi} = \nu + \frac{ml}{A\sin\vartheta}\sum_{j=1}^{4}\left(z_j\omega_{z0}\sin\varphi_j + \dot{z}_j\cos\varphi_j\right) \tag{11.5.10b}$$

$$\dot{\varphi} = n + \frac{ml}{C}\sum_{j=1}^{4} z_j\nu\sin\vartheta\cos\varphi_j \tag{11.5.10c}$$

其中 $\varphi_j = nt + (j-1)\pi/2$, ϑ, $\dot{\psi}$, $\dot{\varphi}$ 视为 t 的慢变函数.

刚体转动在质点 P_j 上引起惯性力 $\boldsymbol{F}_j^* \, (j=1,2,3,4)$

$$\boldsymbol{F}_j^* = -m\left[\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}_j + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_j) + 2\boldsymbol{\omega} \times \tilde{\dot{\boldsymbol{r}}}_j\right] \tag{11.5.11}$$

其中以波浪号表示相对动坐标系 $(O_{\mathrm{c}} - x_{\mathrm{R}}y_{\mathrm{R}}z_{\mathrm{R}})$ 的局部导数. $\boldsymbol{F}_j^*$ 沿极轴的分量 $F_{jz}^* \; (j=1,2,3,4)$ 驱使弹性梁做受迫振动. 设无质量弹性梁的刚度系数和阻尼系数均为 K 和 D, 列出质点 P_j 相对 $(O_{\mathrm{c}} - x_{\mathrm{R}}y_{\mathrm{R}}z_{\mathrm{R}})$ 的动力学方程

$$m\ddot{z}_j + D\dot{z}_j + Kz_j = F_{jz}^* \quad (j=1,2,3,4) \tag{11.5.12}$$

其中 $F_{jz}^* = \boldsymbol{F}_j^* \cdot \boldsymbol{k}$. 将式 (11.5.2) 和零次近似角速度 (11.5.9) 代入式 (11.5.11), 导出

$$F_{jz}^* = m\nu^2 \sin\vartheta \{h \sin\vartheta - (l/\lambda)[(2-\lambda)\cos\vartheta - 2\gamma_{\mathrm{R}}]\sin\varphi_j\} \tag{11.5.13}$$

代入方程 (11.5.12), 化作

$$\ddot{z}_j + 2\zeta k \dot{z}_j + k^2 z_j = k^2 F(t) \quad (j = 1,2,3,4) \tag{11.5.14}$$

其中

$$k = \sqrt{\frac{K}{m}}, \quad \zeta = \frac{D}{2\sqrt{mK}}, \quad F(t) = \frac{F_{jz}^*}{K} \tag{11.5.15}$$

参照 4.1.2 节的分析, 方程 (11.5.14) 的受迫振动特解为

$$z_j = \left\{ \left(\frac{\nu^2 h}{k^2}\right) \sin\vartheta - \left(\frac{\nu^2 l}{\lambda q^2}\right) [(2-\lambda)\cos\vartheta - 2\gamma_{\mathrm{R}}] \sin(\varphi_j - \delta_j) \right\} \sin\vartheta \tag{11.5.16}$$

其中参数 q 和相位差 δ_j 定义为

$$\begin{aligned} q &= k\left\{\left[1-\left(\frac{n}{k}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{2\zeta n}{k}\right)^2\right\}^{1/4} \\ \delta_j &= \arcsin\left(\frac{2\zeta nk}{q^2}\right) - (j-1)\frac{\pi}{2} \end{aligned} \tag{11.5.17}$$

由于质量弹簧系统的固有频率远大于自旋频率, $k \gg n$, 忽略 $(n/k)^2$, 简化为

$$q = k, \quad \delta_j = \arcsin\left(\frac{2\zeta n}{k}\right) - (j-1)\frac{\pi}{2} \tag{11.5.18}$$

其中 n 为 ϑ 的函数由式 (11.5.8) 定义.

11.5.2　带弹性附件双自旋卫星的稳定性

将式 (11.5.16) 代入式 (11.5.10a) 的右项, 分析附件弹性变形引起章动角 ϑ 的缓慢变化, 以判断运动状态的稳定性. 由于章动角的变化速度远慢于自旋角速度, 可将右项在周期 $2\pi/n$ 内平均化, ϑ 在平均过程的每个周期内保持常值. 得到

$$\langle\dot{\vartheta}\rangle = \frac{ml}{2\pi A}\int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^{4} (z_j \omega_{z0} \cos\varphi_j - \dot{z}_j \sin\varphi_j) \mathrm{d}\varphi_j \tag{11.5.19}$$

将式 (11.5.16) 代入上式, 略去平均化符号, 化作

$$\dot{\vartheta} + F(\vartheta) = 0 \tag{11.5.20}$$

函数 $F(\vartheta)$ 定义为

$$F(\vartheta)=L\sin\vartheta\left[(\lambda-1)\cos\vartheta+\gamma_{\mathrm{R}}\right]\left[(2-\lambda)\cos\vartheta-2\gamma_{\mathrm{R}}\right]^2 \tag{11.5.21}$$

常数 L 与阻尼系数 ζ 成正比

$$L=\frac{4ml^2H^4\zeta}{A^2C^3k^3} \tag{11.5.22}$$

先考察 $\gamma_{\mathrm{R}}=0$ 的特例, 即带弹性附件的自旋刚体卫星情形. 方程 (11.5.20) 简化为

$$\dot{\vartheta}+L(\lambda-1)(2-\lambda)^2\cos^3\vartheta\sin\vartheta=0 \tag{11.5.23}$$

令 $\dot{\vartheta}=0$, 解出方程的奇点 $S_j\ (j=1,2,3)$

$$\begin{aligned} S_1:&\ \vartheta_{\mathrm{s}1}=0\\ S_2:&\ \vartheta_{\mathrm{s}2}=\pi\\ S_3:&\ \vartheta_{\mathrm{s}3}=\pi/2 \end{aligned} \tag{11.5.24}$$

S_1,S_2 为绕极轴旋转的正常工作状态, S_3 为绕赤道轴旋转的倾覆状态. 稳态运动的稳定性可利用函数 $F(\vartheta_{\mathrm{s}})$ 的导数符号判断

$$F'(\vartheta_{\mathrm{s}})\begin{matrix}>0 & \text{渐进稳定}\\ <0 & \text{不稳定}\end{matrix} \tag{11.5.25}$$

导出以下稳定性条件

$$\lambda\begin{matrix}>1\\<1\end{matrix}\ \text{即}\ \begin{matrix}C>A: & S_1,\ S_2\ \ \text{渐进稳定}, & S_3\ \ \text{不稳定}\\ C<A: & S_1,\ S_2\ \ \text{不稳定}, & S_3\ \ \text{渐进稳定}\end{matrix} \tag{11.5.26}$$

即轴对称刚体绕最大惯性矩的极轴的永久转动稳定, 与 9.4.1 节中用能量法分析的结论一致. 图 11.27 为 $\dot{\vartheta}=-F(\vartheta)$ 的函数曲线, 稳定性条件 (11.5.26) 也可从 ϑ 随时间的变化趋势得出.

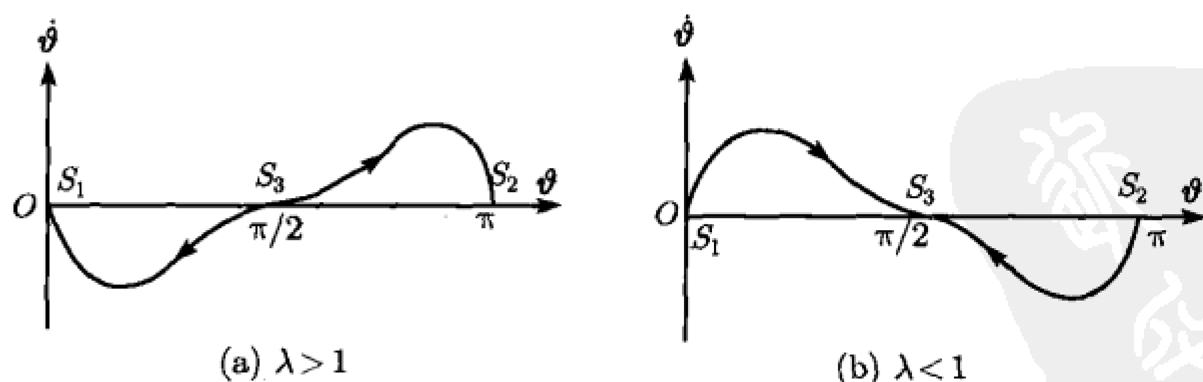


图 11.27 从 $(\dot{\vartheta},\vartheta)$ 函数曲线判断 ϑ 随时间的变化趋势

对于带弹性附件的双自旋卫星, 方程 (11.5.21) 的特解中 S_1,S_2 不变, S_3 不同于 $\pi/2$ 且增加奇点 S_4

$$\begin{aligned} S_3: \quad & \vartheta_{s3} = \arccos\left(\frac{\gamma_R}{1-\lambda}\right) \\ S_4: \quad & \vartheta_{s4} = \arccos\left(\frac{2\gamma_R}{2-\lambda}\right) \end{aligned} \tag{11.5.27}$$

奇点 S_3,S_4 对应的运动为章动角保持常值的自由规则进动. 不失一般性, 设 $1 > \gamma_R > 0$, $2 > \lambda > 0$, 则 S_3 仅在 $\lambda < 1 - \gamma_R$ 或 $\lambda > 1 + \gamma_R$ 条件下存在, S_4 仅在 $\lambda < 2(1-\gamma_R)$ 条件下存在. 利用 $F'(\vartheta)$ 的符号判断, 稳定性条件为

$$\lambda \begin{matrix} > 1-\gamma_R: & S_1 \text{ 渐进稳定} \\ < 1-\gamma_R: & S_1 \text{ 不稳定} \end{matrix} \tag{11.5.28a}$$

$$\lambda \begin{matrix} > 1+\gamma_R: & S_2 \text{ 渐进稳定} \\ < 1+\gamma_R: & S_2 \text{ 不稳定} \end{matrix} \tag{11.5.28b}$$

$$\lambda \begin{matrix} > 1: & S_3 \text{ 不稳定} \\ < 1: & S_3 \text{ 渐进稳定} \end{matrix} \tag{11.5.28c}$$

其中 S_1,S_2 的稳定性条件与 11.1.4 节中用能量法导出的条件 (11.1.32) 完全一致. 由于 $F'(\vartheta_{s4}) = 0$, S_4 对应的稳态运动处于随遇状态. 利用 $F(\vartheta)$ 的二阶导数判断, $F''(\vartheta_{s4}) < 0$, 此随遇状态也趋于不稳定. 图 11.28 为 $\gamma_R = 0.2$ 时 (ϑ_s, λ) 参数平面内的稳定域, 其中分别以空心线和实心线表示渐近稳定或不稳定状态, 不稳定的随遇状态 S_4 以虚线表示. 显示出自旋轴的个数、位置和稳定性随参数的变化而改变的**分岔**现象.

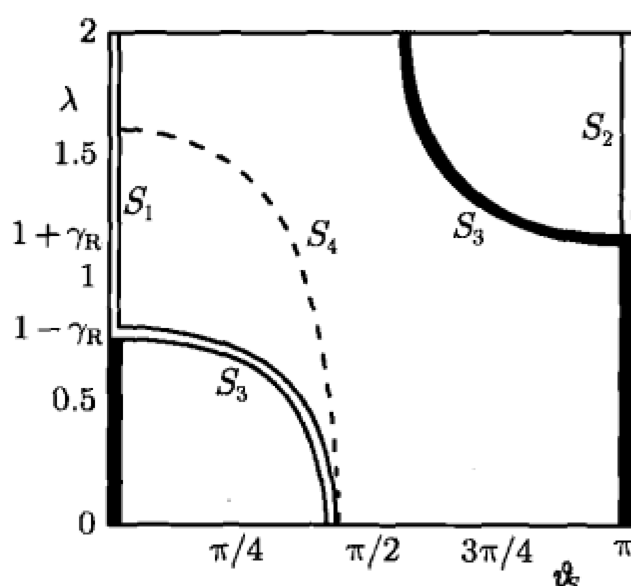


图 11.28　带弹性附件双自旋卫星的稳定域

仅保留 ϑ 的一次项, 式 (11.5.23) 的线性化方程为

$$T\dot{\vartheta} + \vartheta = 0 \tag{11.5.29}$$

衰减时间常数 T 为

$$T = \frac{1}{L(\lambda-1)(2-\lambda)^2} \tag{11.5.30}$$

11.5.3 弹性轴连接的双体卫星

讨论由弹性轴连接的两个分体组成的自旋卫星的无力矩运动. 连接轴的弹性变形改变分体之间相对位置, 使系统的质量几何发生变化. 其力学模型不同于质量几何固定不变的陀螺体.

讨论两个轴对称刚体 $\mathrm{B}_i\,(i=1,2)$ 以挠性轴联结组成的双体系统, 挠性轴简化为带弹簧的球铰 O(图 11.29). 刚体 B_i 的质心、质量、中心赤道惯性矩和极惯性矩分别为 O_i, m_i, A_i, C_i $(i=1,2)$, O_c 和 m 为系统的总质心和总质量. 忽略地球引力矩的影响, 以质心 O_c 为原点, 建立惯性空间中的平动坐标系 $(O_\mathrm{c}-\xi\eta\zeta)$, 以守恒的系统相对 O_c 的动量矩矢量 $\boldsymbol{H}$ 为 ζ 轴. 将 $(O_\mathrm{c}-\xi\eta\zeta)$ 平移至以 B_i 的质心 O_i 为原点, 记作 $(O_i-\xi_i\eta_i\zeta_i)$. 设 ψ_i, ϑ_i, φ_i $(i=1,2)$ 为 B_i 相对 $(O_i-\xi_i\eta_i\zeta_i)$ 的欧拉角 (图 11.30), $(O_i-x_iy_iz_i)$ 为刚体 B_i 的莱查坐标系, O_iz_i 为极轴, O_ix_i 与 O_iz_i 和 $O_i\zeta_i$ 组成的平面正交. 各坐标系之间的关系为

$$(O_i-\xi_i\eta_i\zeta_i)\ \underset{\zeta_i,\,z_{i0}}{\overset{\psi_i}{\longrightarrow}}\ (O_i-x_{i0}y_{i0}z_{i0})\ \underset{x_{i0},\,x_i}{\overset{\vartheta_i}{\longrightarrow}}\ (O_i-x_iy_iz_i)\ \underset{z_i,\,z_{i\mathrm{R}}}{\overset{\varphi_i}{\longrightarrow}}\ (O_i-x_{i\mathrm{R}}y_{i\mathrm{R}}z_{i\mathrm{R}})$$

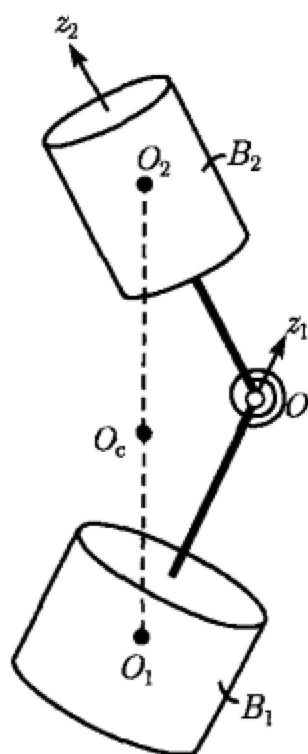


图 11.29　弹性连接的双体卫星

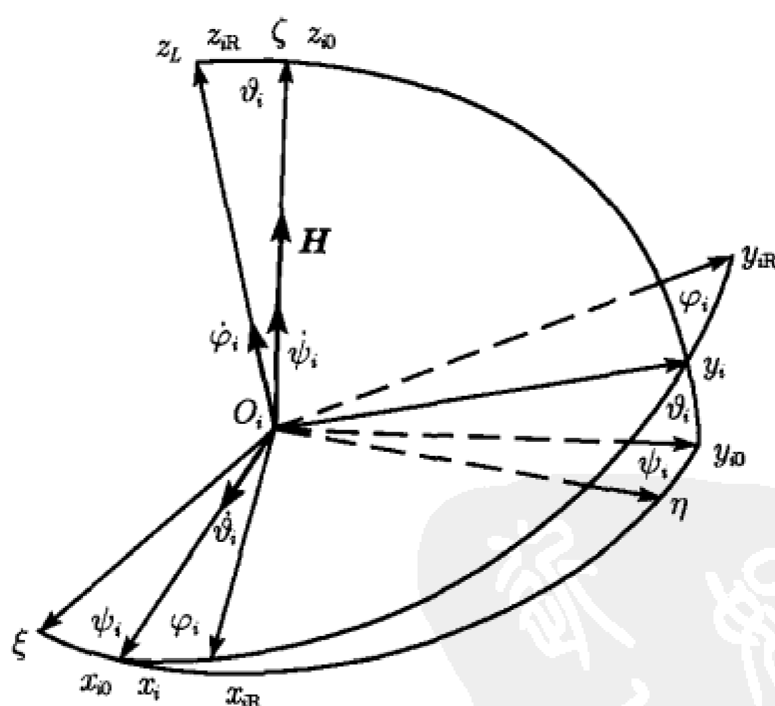


图 11.30　参考坐标系

系统的总动量矩 $\boldsymbol{H}$ 为各分体的动量矩的矢量和

$$\boldsymbol{H} = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{H}_i \tag{11.5.31}$$

其中 $\boldsymbol{H}_i\,(i=1,2)$ 为刚体 B_i 相对 O_c 的动量矩

$$\boldsymbol{H}_i=\boldsymbol{J}_{\mathrm{c}i}\cdot\boldsymbol{\omega}_i\quad(i=1,2)\tag{11.5.32}$$

$\boldsymbol{J}_{\mathrm{c}i}\,(i=1,2)$ 为 B_i 相对 O_c 的惯性张量, $\boldsymbol{\omega}_i\,(i=1,2)$ 为 B_i 的角速度. 设 O_c 至 O_i 的矢径为 $\boldsymbol{l}_i$, B_i 相对 O_i 的中心惯性张量为 $\boldsymbol{J}_i$, 则有

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{c}i}=\boldsymbol{J}_i+m_i\boldsymbol{l}_i\boldsymbol{l}_i\quad(i=1,2)\tag{11.5.33}$$

$\boldsymbol{\omega}_i$ 相对 $(O_i-x_iy_iz_i)$ 的投影 $\omega_{ij}\ \ (i=1,2,\ j=1,2,3)$ 可根据式 (11.5.1) 表示为

$$\omega_{ix}=\dot{\vartheta}_i,\ \omega_{iy}=\dot{\psi}_i\sin\vartheta_i,\ \omega_{iz}=\dot{\psi}_i\cos\vartheta_i+\dot{\varphi}_i\quad(i=1,2)\tag{11.5.34}$$

将式 (11.5.33), (11.5.34) 代入式 (11.5.32) 和 (11.5.31), 将守恒的动量矩 $\boldsymbol{H}$ 向 $(O_\mathrm{c}-\xi\eta\zeta)$ 各轴投影, 得到

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{2}\Big\{\Big[A_i\mathrm{c}\psi_i-\mu\left(\mathrm{c}\vartheta_i\mathrm{c}\vartheta_j\mathrm{c}\psi_i-\mathrm{s}\vartheta_i\mathrm{s}\vartheta_j\mathrm{c}\psi_j\right)\dot{\vartheta}_i\Big]\\&+\left[(C_i-A_i)\,\mathrm{c}\vartheta_i-\mu\mathrm{c}\vartheta_j\right]\dot{\psi}_i\mathrm{s}\vartheta_i\mathrm{s}\psi_i+C_i\dot{\varphi}_i\mathrm{s}\vartheta_i\mathrm{s}\psi_i\Big\}=0\end{aligned}\tag{11.5.35a}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{2}\Big\{\Big[2A_i\mathrm{c}^2\psi_i\mathrm{s}\psi_i-\mu\left(\mathrm{c}\vartheta_i\mathrm{c}\vartheta_j\mathrm{s}\psi_i-\mathrm{s}\vartheta_i\mathrm{s}\vartheta_j\mathrm{s}\psi_j\right)\dot{\vartheta}_i\Big]\\&+\left[(C_i-A_i)\,\mathrm{c}\vartheta_i-\mu\mathrm{c}\vartheta_j\right]\dot{\psi}_i\mathrm{s}\vartheta_i\mathrm{c}\psi_i+C_i\dot{\varphi}_i\mathrm{s}\vartheta_i\mathrm{c}\psi_i\Big\}=0\end{aligned}\tag{11.5.35b}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{2}\Big\{-\mu\mathrm{c}\vartheta_i\mathrm{s}\vartheta_j\mathrm{s}\left(\psi_i-\psi_j\right)\dot{\vartheta}_i+\Big[A_i\mathrm{s}^2\vartheta_i+C_i\mathrm{c}^2\vartheta_i\\&+\mu\mathrm{s}\vartheta_i\mathrm{s}\vartheta_j\mathrm{c}\left(\psi_i-\psi_j\right)\Big]\dot{\psi}_i+C_i\dot{\varphi}_i\mathrm{c}\vartheta_i\Big\}=H\end{aligned}\tag{11.5.35c}$$

其中 c, s 为 cos, sin 的简写符号, 且 $j=1,2\ (j\neq i)$, 参数 μ 定义为

$$\mu=\frac{m_1m_2l_1l_2}{m}\tag{11.5.36}$$

B_2 作用于 B_1 的力矩包括驱动力矩 $\boldsymbol{M}_m$ 和弹簧力矩 $\boldsymbol{M}_\mathrm{s}$. 驱动力矩 $\boldsymbol{M}_m=M_m\boldsymbol{k}_1$ 沿 B_1 的极轴. M_s 垂直于变形平面, 与联结铰 O 点的转角 δ 成正比, α 为弹性变形引起的二分体极轴之间的夹角. 设 $\boldsymbol{k}_i$ 为 O_iz_i 的基矢量, α 可利用 $\boldsymbol{k}_1$ 与 $\boldsymbol{k}_2$ 矢量积的模导出, 其中

$$\boldsymbol{k}_i=\sin\vartheta_i\left(-\sin\psi_i\boldsymbol{\xi}^0+\cos\psi_i\boldsymbol{\eta}^0\right)+\cos\vartheta_i\boldsymbol{\zeta}^0\quad(i=1,2)\tag{11.5.37}$$

导出

$$\alpha=\arcsin\left\{\left[\cos\vartheta_1\sin\vartheta_2\cos\left(\psi_1-\psi_2\right)-\sin\vartheta_1\cos\vartheta_2\right]^2+\sin^2\vartheta_2\sin^2\left(\psi_1-\psi_2\right)\right\}^{1/2}\tag{11.5.38}$$

设 K 为弹簧的刚度系数, 则弹簧力矩 $\boldsymbol{M}_s$ 为

$$\boldsymbol{M}_s = K\alpha\left(\sin\alpha\right)^{-1}\left(\boldsymbol{k}_1 \times \boldsymbol{k}_2\right) \tag{11.5.39}$$

单独列写分体 B_1 相对 $(O_i - \xi_i\eta_i\zeta_i)$ 的欧拉方程

$$\begin{aligned}&A_1\ddot{\vartheta}_1 + C_1\dot{\psi}_1\dot{\varphi}_1\mathrm{s}\vartheta_1 + \left(C_1 - A_1\right)\dot{\psi}_1^2\mathrm{c}\vartheta_1\mathrm{s}\vartheta_1 + \mu\Big\{\dot{\vartheta}_2\left[\mathrm{c}\vartheta_1\mathrm{s}\vartheta_2\mathrm{c}\left(\psi_1 - \psi_2\right)\right.\\&\left.+\mathrm{s}\vartheta_1\mathrm{s}\vartheta_2\right] + \ddot{\psi}_2\mathrm{c}\vartheta_1\mathrm{s}\vartheta_2\mathrm{s}\left(\psi_1 - \psi_2\right) - \left(\dot{\vartheta}_2^2 + \dot{\psi}_2^2\right)\mathrm{c}\vartheta_1\mathrm{s}\vartheta_2\mathrm{c}\left(\psi_1 - \psi_2\right) + \dot{\vartheta}_2^2\mathrm{s}\vartheta_1\mathrm{c}\vartheta_2\\&-2\dot{\vartheta}_2\dot{\psi}_2\mathrm{c}\vartheta_1\mathrm{c}\vartheta_2\mathrm{c}\psi_1\mathrm{s}\psi_2\Big\} = K\alpha\left(\sin\alpha\right)^{-1}\left[\mathrm{c}\vartheta_1\mathrm{s}\vartheta_2\mathrm{c}\left(\psi_1 - \psi_2\right) - \mathrm{s}\vartheta_1\mathrm{c}\vartheta_2\right]\end{aligned} \tag{11.5.40a}$$

$$\begin{aligned}&A_1\left(\ddot{\psi}_1\mathrm{s}\vartheta_2 + \dot{\psi}_1\dot{\vartheta}_1\mathrm{c}\vartheta_1\right) - C_1\dot{\varphi}_1\dot{\vartheta}_1 - \left(C_1 - A_1\right)\dot{\psi}_1\dot{\vartheta}_1\mathrm{c}\vartheta_1\\&+\mu\left[-\ddot{\vartheta}_2\mathrm{c}\vartheta_2 + \ddot{\psi}_2\mathrm{s}\vartheta_2\mathrm{c}\left(\psi_1 - \psi_2\right) + \left(\dot{\vartheta}_2^2 + \dot{\psi}_2^2\right)\mathrm{s}\vartheta_2\mathrm{s}\left(\psi_1 - \psi_2\right)\right.\\&\left.+2\dot{\vartheta}_2\dot{\psi}_2\mathrm{c}\vartheta_2\mathrm{s}\psi_1\mathrm{s}\psi_2\right] = K\alpha\left(\sin\alpha\right)^{-1}\mathrm{s}\vartheta_2\mathrm{s}\left(\psi_1 - \psi_2\right)\end{aligned} \tag{11.5.40b}$$

$$C_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\varphi}_1 + \dot{\psi}_1\mathrm{c}\vartheta_1\right) = M_\mathrm{a} \tag{11.5.40c}$$

11.5.4 双体卫星的永久转动

讨论双体系统做永久转动, 即两分体绕同一轴以同一角速度转动的可能性. 此时角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\omega}_2 = \boldsymbol{\omega}_0$ 与系统的动量矩矢量 $\boldsymbol{H}$ 方向一致. 令 $\dot{\vartheta}_i = \dot{\varphi}_i = 0,\ \dot{\psi}_i = \omega_0\ (i = 1, 2)$, 方程组 (11.5.35), (11.5.40) 简化为

$$\sum_{i=1}^{2}\left[\left(C_i - A_i\right)c\vartheta_i - \mu c\vartheta_j\right]s\vartheta_i s\psi_i = 0 \tag{11.5.41a}$$

$$\sum_{i=1}^{2}\left[\left(C_i - A_i\right)c\vartheta_i - \mu c\vartheta_j\right]s\vartheta_i c\psi_i = 0 \tag{11.5.41b}$$

$$\omega_0 = H\sum_{i=1}^{2}\left[A_i s^2\vartheta_i + C_i c^2\vartheta_i + 2\mu s\vartheta_i s\vartheta_j c\left(\psi_i - \psi_j\right)\right]^{-1} \tag{11.5.41c}$$

$$\begin{aligned}&\left(C_1 - A_1\right)\omega_0^2\mathrm{c}\vartheta_1\mathrm{s}\vartheta_1 - \mu\omega_0^2\mathrm{c}\vartheta_1\mathrm{s}\vartheta_2\mathrm{c}\left(\psi_1 - \psi_2\right)\\&+K\delta\left(\sin\delta\right)^{-1}\left[\mathrm{s}\vartheta_1\mathrm{c}\vartheta_2 - \mathrm{c}\vartheta_1\mathrm{s}\vartheta_2\mathrm{c}\left(\psi_1 - \psi_2\right)\right] = 0\end{aligned} \tag{11.5.41d}$$

$$\left[\mu\omega_0^2 + K\delta\left(\sin\delta\right)^{-1}\right]\mathrm{s}\vartheta_2\mathrm{s}\left(\psi_1 - \psi_2\right) = 0 \tag{11.5.41e}$$

$$M_\mathrm{a} = 0 \tag{11.5.41f}$$

方程 (11.5.41e) 要求 $\psi_1 = \psi_2$, (11.5.41c) 确定角速度 ω_0 为刚体姿态的函数, 方程 (11.5.41a), (11.5.41b), (11.5.41d) 化作

$$\sum_{i=1}^{2}[(C_i - A_i)\sin 2\vartheta_i] - 2\mu\sin(\vartheta_1+\vartheta_2) = 0 \tag{11.5.42a}$$

$$\begin{aligned}&(C_1 - A_1)\sin 2\vartheta_1 - 2\mu\cos\vartheta_1\sin\vartheta_2\\&+2\nu(\vartheta_1-\vartheta_2)\left[\sum_{i=1}^{2}\left(A_i\sin^2\vartheta_i + C_i\cos^2\vartheta_i\right)+2\mu\cos\vartheta_1\sin\vartheta_2\right]=0\end{aligned} \tag{11.5.42b}$$

其中 $\nu = K/H^2$. 方程组 (11.5.42) 有以下两组常值特解 $\vartheta_i = \vartheta_{is}\,(i=1,2)$, 分别以 S_1, S_2 表示其对应的永久转动

$$S_1:\quad \vartheta_{1s} = \vartheta_{2s} = 0 \tag{11.5.43a}$$

$$S_2:\quad \vartheta_{1s} = \vartheta_{2s} = \pi/2 \tag{11.5.43b}$$

S_1 为系统绕与刚体的极轴 $z_i\,(i=1,2)$ 重合的 $O_c\zeta$ 轴的正常永久转动. S_2 为永久转动轴与极轴 $z_i\,(i=1,2)$ 正交的陷阱状态.

在一定条件下, 方程组 (11.5.42) 还可能存在不同于 (11.5.43) 的非平凡解. 以两个相同刚体组成的双体系统为例, 设 B_1 和 B_2 有完全相同的质量几何. 令

$$A_1 = A_2,\quad C_1 = C_2 \tag{11.5.44}$$

则方程 (11.5.42a) 有不同于平凡解的两种特解, 所对应的永久转动分别以 S_3, S_4 表示

$$S_3:\quad \vartheta_{1s} = -\vartheta_{2s} \tag{11.5.45a}$$

$$S_4:\quad \vartheta_{1s} = \frac{\pi}{2}+\gamma,\quad \vartheta_{2s} = \frac{\pi}{2}-\gamma \tag{11.5.45b}$$

将式 (11.5.45a) 代入方程 (11.5.42b), 化作

$$F(\vartheta_{1s}) = (C_1 - A_1 + \mu)\sin 2\vartheta_{1s} + 16\nu\vartheta_{1s}\left[C_1 + (A_1 - C_1 - \mu)\sin^2\vartheta_{1s}\right]^2 = 0 \tag{11.5.46}$$

由于 $F(0)=0$, $F(\pi/2)>0$, 若 $F'(0)<0$, 则至少存在 ϑ_{1s} 的不同于零或 $\pi/2$ 的一个根. 由此导出 S_3 状态存在的充分条件

$$A_1 > C_1 + \mu + 8\nu C_1^2 \tag{11.5.47}$$

将式 (11.5.45b) 代入方程 (11.5.42b), 化作

$$G(\gamma) = (A_1 - C_1 + \mu)\sin 2\gamma + 16\nu\gamma\left[C_1 + (A_1 - C_1 - \mu)\sin^2\gamma\right]^2 = 0 \tag{11.5.48}$$

由于 $G(0)=0$, $G(\pi/2)>0$, 若 $G'(0)<0$, 则至少存在 γ 的不同于零或 $\pi/2$ 的一个根. 从而导出 S_4 状态存在的充分条件

$$C_1 > A_1 + \mu + 8\nu(A_1+\mu)^2 \tag{11.5.49}$$

S_3, S_4 状态的存在表明双体卫星存在与转动轴与极轴非正交的陷阱状态.

11.5.5　永久转动的稳定性

永久转动的稳定性可应用能汇法进行分析. 实践中难以避免的内阻尼使系统的总机械能衰减. 设卫星做永久转动时的总能量为 $E = T + V$, 量纲为一化为 $\hat{E}$

$$\hat{E} = \frac{2E}{H^2} = \left[\sum_{i=1}^{2}\left(A_i s^2\vartheta_i + C_i c^2\vartheta_i\right) + 2\mu s\vartheta_1 s\vartheta_2\right]^{-1} + \nu\left(\vartheta_2 - \vartheta_1\right)^2$$

系统做 $\vartheta_i = \vartheta_{is}$ $(i = 1, 2)$ 的永久转动时, 总能量 $\hat{E}$ 取极值的必要条件为

$$\left(\frac{\partial \hat{E}}{\partial \vartheta_1}\right)_{\vartheta_{is}} = \left(\frac{\partial \hat{E}}{\partial \vartheta_2}\right)_{\vartheta_{is}} = 0 \tag{11.5.50}$$

$$\left[\left(\frac{\partial^2 \hat{E}}{\partial \vartheta_1^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \hat{E}}{\partial \vartheta_2^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 \hat{E}}{\partial \vartheta_1 \partial \vartheta_2}\right)\right]_{\vartheta_{is}} > 0 \tag{11.5.51}$$

$\hat{E}$ 取极大值或极小值的充分条件为

$$\left(\frac{\partial^2 \hat{E}}{\partial \vartheta_1^2}\right)_{\vartheta_{is}} \begin{matrix} < 0 \\ > 0 \end{matrix} : \begin{matrix} \text{极大值} \\ \text{极小值} \end{matrix} \tag{11.5.52}$$

由于总机械能 $\hat{E}$ 随时间趋于减小, 当 $\hat{E}$ 为极大值时, 时间的推移必伴随扰动量的增大. 因此 $\hat{E}$ 的极大值条件为永久转动的失稳条件. 相反, $\hat{E}$ 取极小值时永久转动为渐近稳定. 对于正常永久转动 S_1, 令 $\vartheta_{is} = 0$ $(i = 1, 2)$, 条件 (11.5.50) 恒满足, 条件 (11.5.51) 和 (11.5.52) 化为

$$\begin{aligned} &(A_1 - C_1)\left[A_2 - C_2 - \nu\left(C_1 + C_2\right)^2\right] - \nu\left(A_2 - C_2\right)\left(C_1 + C_2\right)^2 \\ &- 2\nu\mu\left(C_1 + C_2\right)^2 - \mu^2 > 0 \end{aligned} \tag{11.5.53}$$

$$C_1 - A_1 + \nu\left(C_1 + C_2\right)^2 \begin{matrix} < 0 \\ > 0 \end{matrix} : \begin{matrix} \text{极大值, 不稳定} \\ \text{极小值, 渐进稳定} \end{matrix} \tag{11.5.54}$$

对于陷阱状态 S_2, 令 $\vartheta_{is} = \pi/2$ $(i = 1, 2)$, 条件 (11.5.50) 恒满足, 其余条件为

$$\begin{aligned} &(A_1 - C_1 + \mu)\left[A_2 - C_2 + \mu + \nu\left(A_1 + A_2 + 2\mu\right)^2\right] \\ &+ \nu\left(A_2 - C_2 + \mu\right)\left(A_1 + A_2 + 2\mu\right)^2 > 0 \end{aligned} \tag{11.5.55}$$

$$A_1 - C_1 + \nu\left(A_1 + A_2 + 2\mu\right)^2 \begin{matrix} < 0 \\ > 0 \end{matrix} : \begin{matrix} \text{极大值, 不稳定} \\ \text{极小值, 渐进稳定} \end{matrix} \tag{11.5.56}$$

对于上述两个相同刚体组成系统的特殊情形, 将式 (11.5.44) 代入式 (11.5.53), (11.5.54), 导出的正常状态失稳条件与非平凡解 (11.5.45a) 的存在条件 (11.5.47) 完全相同

$$A_1 > C_1 + \mu + 8\nu C_1^2 \tag{11.5.57}$$

将式 (11.5.44) 代入式 (11.5.55), (11.5.56), 导出的陷阱状态能量的极大值条件与非平凡解 (11.5.45b) 的存在条件 (11.5.49) 完全相同

$$C_1 > A_1 + \mu + 8\nu(A_1 + \mu)^2 \tag{11.5.58}$$

从而证明, 平凡解 (11.5.43) 对应的失稳条件 (11.5.57) 或 (11.5.58) 同时也是非平凡解 (11.5.45) 的存在条件.

令 $A_1 = A_2$, $C_1 = C_2$, $\vartheta_{1s} = \vartheta_{2s}$, $\mu/A_1 = 0.1$, $\nu A_1 = 0.02$, 用数值方法从方程组 (11.5.42) 解出永久转动轴位置且判断其稳定性. 在图 11.31 中以惯性矩比 C_1/A_1 随 ϑ_{1s} 的变化曲线表示. 其中以空心线和实心线表示稳定和不稳定的永久转动轴. 当参数 ν 和 μ 足够小时, 即弹簧足够软或铰点足够接近刚体的质心时, 永久转动轴的数目和位置出现分岔. 可看出细长型刚体 ($C_1 > A_1$) 与扁平型 ($C_1 < A_1$) 刚体的永久转动规律存在明显区别.

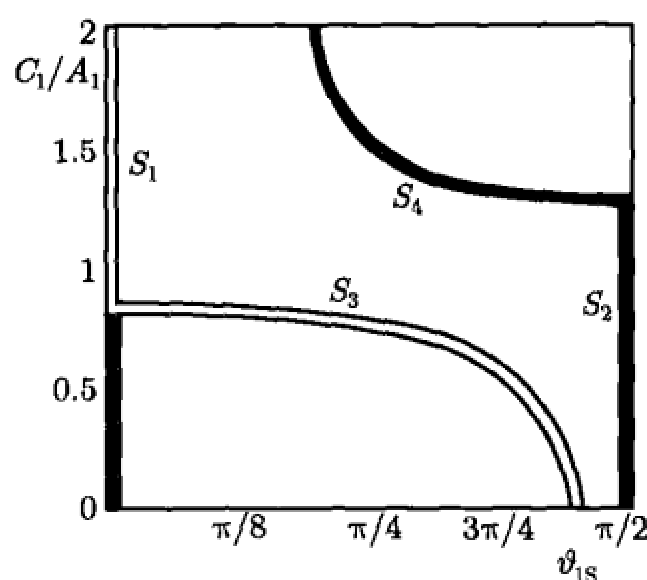


图 11.31　永久转动轴的分岔

11.6　卫星姿态的飞轮控制

11.6.1　陀螺体的姿态控制

利用陀螺体中转子的惯性效应, 可实现对主体的姿态控制. 起控制作用的转子称为**反作用飞轮**. 设陀螺体 G 由非轴对称的主体 P 和分别沿连体坐标系 ($O_c - xyz$) 的 x, y, z 轴的 3 个轴对称转子 $\mathrm{R}_i\,(i = 1, 2, 3)$ 组成 (见图 11.32), G* 为质量分布与 G 完全相同的刚体, $\boldsymbol{J}_{\mathrm{P}}$, $\boldsymbol{J}_{\mathrm{R}i}\,(i = 1, 2, 3)$ 分别为主体和转子相对质心 O_c 点的惯性

张量, $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{R}i}\,(i=1,2,3)$ 为主体和转子的角速度. 系统 G 相对 O_c 的动量矩 $\boldsymbol{H}$ 可利用式 (11.1.9) 写作

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\omega}+\sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{J}_{\mathrm{R}i}\cdot\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{R}i} \tag{11.6.1}$$

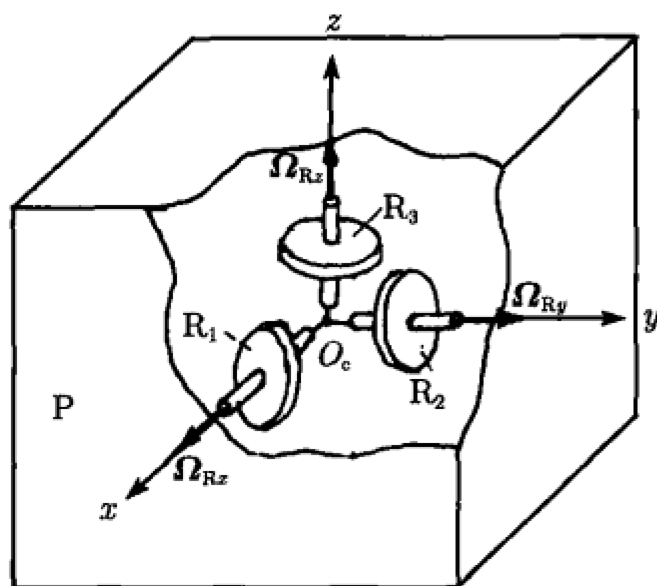


图 11.32　三转子陀螺体

其中

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}_{\mathrm{P}}+\sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{J}_{\mathrm{R}i},\quad \boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{R}i}=\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{R}i}-\boldsymbol{\omega}\quad(i=1,2,3)\\&\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{R}1}=\Omega_{\mathrm{R}x}\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{R}2}=\Omega_{\mathrm{R}y}\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{R}3}=\Omega_{\mathrm{R}z}\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{11.6.2}$$

设各转子有相同的极惯性矩 C_{R}, 各矢量符号以 $(O-xyz)$ 中的投影列阵代替, 动量矩 $\boldsymbol{H}$ 为

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega}+C_{\mathrm{R}}\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{R}} \tag{11.6.3}$$

将上式代入动量矩定理 (2.2.23), 忽略地球引力矩, 令 $\boldsymbol{\omega}_1=\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{M}=0$, 导出陀螺体动力学方程的投影式

$$\dot{\boldsymbol{H}}+\tilde{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{H}=0 \tag{11.6.4}$$

其中

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}A\omega_x+C_{\mathrm{R}}\Omega_{\mathrm{R}x}\\B\omega_y+C_{\mathrm{R}}\Omega_{\mathrm{R}y}\\C\omega_z+C_{\mathrm{R}}\Omega_{\mathrm{R}z}\end{pmatrix},\quad \tilde{\boldsymbol{\omega}}=\begin{pmatrix}0&-\omega_z&\omega_y\\\omega_z&0&-\omega_x\\-\omega_y&\omega_x&0\end{pmatrix} \tag{11.6.5}$$

将式 (11.6.4) 展开后, 得到陀螺体的欧拉方程

$$\dot{\Omega}_{\mathrm{R}x}+\omega_y\Omega_{\mathrm{R}z}-\omega_z\Omega_{\mathrm{R}y}=-C_{\mathrm{R}}^{-1}\left[A\dot{\omega}_x+(C-B)\,\omega_y\omega_z\right] \tag{11.6.6a}$$

$$\dot{\Omega}_{\mathrm{R}y}+\omega_z\Omega_{\mathrm{R}x}-\omega_x\Omega_{\mathrm{R}z}=-C_{\mathrm{R}}^{-1}\left[B\dot{\omega}_y+(A-C)\,\omega_z\omega_x\right] \tag{11.6.6b}$$

$$\dot{\Omega}_{\mathrm{R}z} + \omega_x \Omega_{\mathrm{R}y} - \omega_y \Omega_{\mathrm{R}x} = -C_{\mathrm{R}}^{-1}\left[C\dot{\omega}_z + (B - A)\,\omega_x\omega_y\right] \tag{11.6.6c}$$

对于预先设计的主刚体姿态运动规律 $\omega_x(t)$，$\omega_y(t)$，$\omega_z(t)$， 原则上可从方程组 (11.6.4) 解出各转子的转动规律 $\Omega_{\mathrm{R}x}(t)$，$\Omega_{\mathrm{R}y}(t)$，$\Omega_{\mathrm{R}z}(t)$ 以实现卫星预定的姿态运动. 在实施过程中还必须依靠控制系统保证控制过程的稳定性.

11.6.2　四元数描述的陀螺体动力学方程

一般情况下, 卫星的姿态运动为不受限制的大幅度运动. 为避免在运算过程中出现角度坐标的奇异值, 必须利用 1.3 节中叙述的有限转动四元数表示刚体的姿态. 为此将主刚体角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 改为用 4 阶列阵表示

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{11.6.7}$$

利用式 (1.3.25), 将 $\boldsymbol{\omega}$ 的四元数表达写作

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{L}\dot{\boldsymbol{\Lambda}} \tag{11.6.8}$$

式中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 为四元数的投影列阵, $\boldsymbol{L}$ 为 4 阶方阵, 定义为

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{L} = 2\begin{pmatrix} \lambda_0 & -\lambda_1 & -\lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_0 & -\lambda_1 \\ \lambda_3 & -\lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_0 \end{pmatrix} \tag{11.6.9}$$

将陀螺体的动力学方程 (11.6.4) 以式 (11.6.3) 代入后, 改写为

$$\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \tilde{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{u} \tag{11.6.10}$$

其中 $\boldsymbol{u}$ 为转子的惯性力矩, 即起控制作用的转子作用于主刚体的力矩

$$\boldsymbol{u} = -C_{\mathrm{R}}\left(\dot{\boldsymbol{\Omega}}_{\mathrm{R}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{R}}\right) \tag{11.6.11}$$

将式 (11.6.8) 代入方程 (11.6.10), 两边同乘 $\boldsymbol{J}^{-1}$, 导出

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{J}^{-1}\left(\tilde{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{L}\dot{\boldsymbol{\Lambda}} + \boldsymbol{u}\right) \tag{11.6.12}$$

定义以下 4 阶矩阵

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C \end{pmatrix}, \tilde{\boldsymbol{H}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -H_3 & H_2 \\ 0 & H_3 & 0 & -H_1 \\ 0 & -H_2 & H_1 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \tag{11.6.13}$$

对式 (11.6.8) 求逆, 得到

$$\dot{\boldsymbol{\Lambda}} = \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{\omega} \tag{11.6.14}$$

再对 t 求导, 得到

$$\ddot{\boldsymbol{\Lambda}} = \dot{\boldsymbol{L}}^{-1}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{L}^{-1}\dot{\boldsymbol{\omega}} \tag{11.6.15}$$

将式 (11.6.8), (11.6.12) 代入上式, 化作

$$\ddot{\boldsymbol{\Lambda}} = \dot{\boldsymbol{L}}^{-1}\boldsymbol{L}\dot{\boldsymbol{\Lambda}} + \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{J}^{-1}\left(\tilde{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{L}\dot{\boldsymbol{\Lambda}} + \boldsymbol{u}\right) \tag{11.6.16}$$

将上式两边左乘 $\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{L}$, 导出四元数形式的陀螺体姿态动力学方程

$$\boldsymbol{B}^{*}\ddot{\boldsymbol{\Lambda}} + \boldsymbol{C}^{*}\dot{\boldsymbol{\Lambda}} = \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u} \tag{11.6.17}$$

各矩阵定义为

$$\boldsymbol{B}^{*} = \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{L}, \quad \boldsymbol{C}^{*} = -\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{J}\boldsymbol{L}\dot{\boldsymbol{L}}^{-1} + \tilde{\boldsymbol{H}}\right)\boldsymbol{L} \tag{11.6.18}$$

其中 $\boldsymbol{B}^{*}$ 为对称阵, 还可证明 $\dot{\boldsymbol{B}}^{*} - 2\boldsymbol{C}^{*}$ 为反对称阵. 证明如下:

将 $\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^{-1} = \boldsymbol{E}$ 两边对 t 求导, $\boldsymbol{E}$ 为 4 阶单位阵, 导出

$$\dot{\boldsymbol{L}} = -\boldsymbol{L}\dot{\boldsymbol{L}}^{-1}\boldsymbol{L} \tag{11.6.19}$$

将式 (11.6.18) 代入 $\dot{\boldsymbol{B}}^{*} - 2\boldsymbol{C}^{*}$, 且将式 (11.6.19) 代入, 得到

$$\dot{\boldsymbol{B}}^{*} - 2\boldsymbol{C}^{*} = \dot{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{L} - \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{L}} + 2\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{L} \tag{11.6.20}$$

将上式转置, 考虑 $\boldsymbol{J}$ 的对称性和 $\tilde{\boldsymbol{H}}$ 的反对称性, 得到

$$\left(\dot{\boldsymbol{B}}^{*} - 2\boldsymbol{C}^{*}\right)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{L}} - \dot{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{L} - 2\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{L} \tag{11.6.21}$$

上式与式 (11.6.20) 仅相差负号, 证明 $\dot{\boldsymbol{B}}^{*} - 2\boldsymbol{C}^{*}$ 为反对称阵.

11.6.3 姿态控制规律

设要求卫星实现以四元数期望值 $\boldsymbol{\Lambda}^{(0)}$ 表示的预定姿态, 转子对主刚体作用力矩的控制规律设计为

$$\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{L}\left[\boldsymbol{K}_1\left(\boldsymbol{\Lambda} - \boldsymbol{\Lambda}^{(0)}\right) + \boldsymbol{K}_2\left(\dot{\boldsymbol{\Lambda}} - \dot{\boldsymbol{\Lambda}}^{(0)}\right)\right] \tag{11.6.22}$$

其中 $\boldsymbol{K}_1, \boldsymbol{K}_2$ 均为正定对称阵. 若要求卫星的期望姿态为稳态, 则 $\dot{\boldsymbol{\Lambda}}^{(0)}$ 为零. 应用李雅普诺夫直接方法可以证明此控制规律能保证系统的渐近稳定性.

构造以下正定函数为李雅普诺夫函数

$$\mathscr{V}=\frac{1}{2}\left[\dot{\boldsymbol{\Lambda}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{*}\dot{\boldsymbol{\Lambda}}+\left(\boldsymbol{\Lambda}-\boldsymbol{\Lambda}^{(0)}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{1}\left(\boldsymbol{\Lambda}-\boldsymbol{\Lambda}^{(0)}\right)\right] \tag{11.6.23}$$

将上式对 t 求导, 考虑 $\boldsymbol{B}^{*}$ 和 $\boldsymbol{K}_1$ 的对称性, 令 $\dot{\boldsymbol{\Lambda}}^{(0)}=0$, 得到

$$\dot{\mathscr{V}}=\dot{\boldsymbol{\Lambda}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{*}\ddot{\boldsymbol{\Lambda}}+\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\Lambda}}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{B}}^{*}\dot{\boldsymbol{\Lambda}}+\dot{\boldsymbol{\Lambda}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{1}\left(\boldsymbol{\Lambda}-\boldsymbol{\Lambda}^{(0)}\right) \tag{11.6.24}$$

将受扰运动方程 (11.6.17) 和控制规律 (11.6.22) 代入上式, 化作

$$\dot{\mathscr{V}}=-\dot{\boldsymbol{\Lambda}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{2}\dot{\boldsymbol{\Lambda}}+\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\Lambda}}^{\mathrm{T}}\left(\dot{\boldsymbol{B}}^{*}-2\boldsymbol{C}^{*}\right)\dot{\boldsymbol{\Lambda}} \tag{11.6.25}$$

由于 $\dot{\boldsymbol{B}}^{*}-2\boldsymbol{C}^{*}$ 为反对称, 上式右边的第二项为零, 简化为

$$\dot{\mathscr{V}}=-\dot{\boldsymbol{\Lambda}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{2}\dot{\boldsymbol{\Lambda}} \tag{11.6.26}$$

$\dot{\mathscr{V}}$ 为负定函数. 根据李雅普诺夫定理, 未扰运动对于变量 $\dot{\boldsymbol{\Lambda}}$ 为渐近稳定. 当 $\dot{\boldsymbol{\Lambda}}$ 渐近地趋近于零且停留在零值时, 必有 $\dot{\boldsymbol{\Lambda}}\equiv 0$, 由式 (11.6.16), (11.6.22) 推知

$$\ddot{\boldsymbol{\Lambda}}=\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{K}_{1}(\boldsymbol{\Lambda}-\boldsymbol{\Lambda}^{(0)})=0 \tag{11.6.27}$$

从而证明 $\boldsymbol{\Lambda}$ 渐近地收敛于期望值 $\boldsymbol{\Lambda}^{(0)}$.



第12章　滚动陀螺

在水平面上旋转滚动的刚体动力学问题是一个可追溯到达朗贝尔、欧拉和泊松的古老经典力学问题. 与前述各章不同, 平面上滚动陀螺绕质心的转动与质心运动之间存在耦合. 1904 年盖洛普 (Gallop) 首先注意到滑动摩擦对陀螺运动的影响. 1950 年格莱曼对陀螺运动的分析考虑了摩擦因素, 但不恰当地利用进动理论分析而得出错误结论. 早在 19 世纪末, 一种称为 tip-top 的玩具陀螺在旋转时突然翻转使重心自行升高的现象以及称为凯尔特石的非对称刚体在旋转中向后倒退的现象曾引起物理学界的浓厚兴趣. 这种奇特现象的产生均来源于摩擦力的推动. 1963 年康坦苏 (P. Contensou) 认为旋转刚体与接触平面之间摩擦力的平均效果满足与滑动速度成比例的线性规律. 1974 年马格努斯应用线性摩擦规律分析翻身陀螺和凯尔特石的稳定性. 1977 年科恩 (R.J. Cohen) 和 1978 年凯恩 (T.R. Kane) 等基于库仑摩擦的非线性规律, 对刚体的滚动过程作了数值仿真计算. 本章首先讨论陀螺在微粗糙平面上的运动, 以平面绝对光滑作为零次近似计算库仑摩擦力, 用于解释翻身陀螺现象. 对于平面上旋转的充液陀螺的讨论则采用线性摩擦规律. 最后基于纯滚动假定分析非轴对称刚体在粗糙平面上旋转时出现的特殊现象.

12.1　陀螺在光滑平面上的运动

12.1.1　陀螺绕极轴旋转的稳定性

与上一章讨论的自旋卫星类似, 在平面上旋转的陀螺也不存在固定点. 除光滑平面可解耦的特殊情形以外, 一般情况下, 刚体的质心运动与绕质心的转动存在耦合. 设刚体为轴对称体, 在 P 点处与光滑平面接触且绕极轴旋转. 接触点附近的刚体表面为球面, 半径为 r, 球面的中心 O 和刚体的质心 O_c 均在极轴上. 以质心 O_c 为原点建立参考坐标系 $(O_c-\xi\eta\zeta)$, ζ 轴沿地垂线向上, ξ,η 轴指向水平面内的确定方向. 不计地球的旋转效应且忽略 O_c 点的加速度时, 可认为 $(O_c-\xi\eta\zeta)$ 为惯性坐标系 (见图 12.1). 应用与 11.5.1 节相同的欧拉角确定陀螺受扰后的位置 (见图 11.24), 各坐标系之间的关系为

$$(O_c-\xi\eta\zeta)\ \underset{\zeta,z_0}{\overset{\psi}{\longrightarrow}}\ (O_c-x_0y_0z_0)\ \underset{x_0,x}{\overset{\vartheta}{\longrightarrow}}\ (O_c-xyz)\ \underset{z,z_R}{\overset{\varphi}{\longrightarrow}}\ (O_c-x_Ry_Rz_R)$$

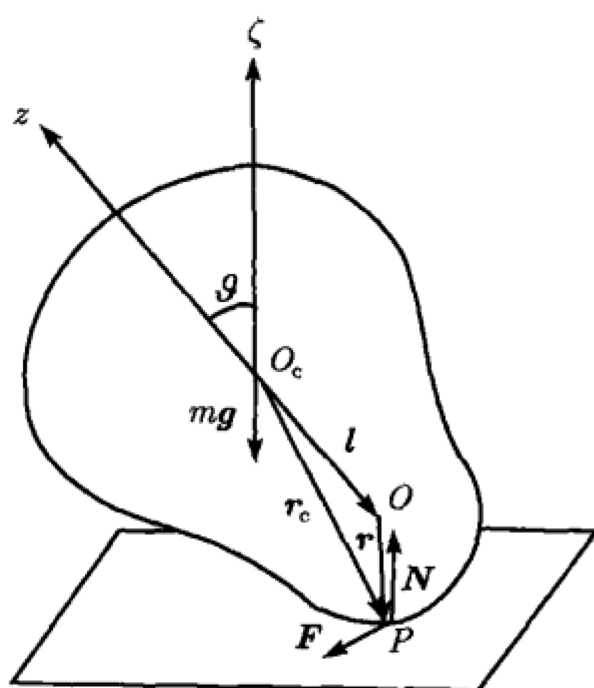


图 12.1 平面上绕极轴旋转的陀螺

将 O 点和 P 点相对质心 O_c 的矢径分别记作 $\boldsymbol{l}$ 和 $\boldsymbol{r}_c$, P 点相对 O 点的矢径为 $\boldsymbol{r}$, 则 $\boldsymbol{r}_c = \boldsymbol{l} + \boldsymbol{r}$. $h = r + l$ 为极轴垂直时的最大质心高度. 极轴的稳态运动为绕极轴的永久转动, 如 2.4.5 节所述. 设受扰后极轴仍在地垂线附近, ϑ 为小量. 在以下推导中仅保留 ϑ 及其导数的一次项. $\boldsymbol{r}_c$ 在 $(O_c - xyz)$ 中的投影式为

$$\boldsymbol{r}_c = -r\vartheta\boldsymbol{j} - h\boldsymbol{k} \tag{12.1.1}$$

利用式 (2.4.1) 写出刚体的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 相对 $(O_c - xyz)$ 的投影式

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\vartheta}\boldsymbol{i} + \dot{\psi}\vartheta\boldsymbol{j} + \omega_z\boldsymbol{k} \tag{12.1.2}$$

其中 $\omega_z = \dot{\psi} + \dot{\varphi}$. 刚体相对质心 O_c 的动量矩为

$$\boldsymbol{H} = A\left(\dot{\vartheta}\boldsymbol{i} + \dot{\psi}\vartheta\boldsymbol{j}\right) + C\omega_z\boldsymbol{k} \tag{12.1.3}$$

其中 A, C 为刚体对质心 O_c 的赤道惯性矩和极惯性矩. 由于光滑地面无摩擦力, 质心无水平加速度. 极轴在垂直轴附近时, 垂直速度和垂直加速度均为 ϑ 及其导数的二阶微量而忽略. 因此如质心 O_c 在初始时刻静止, 质心速度 $\boldsymbol{v}_0$ 在 $(O - xyz)$ 中的投影 v_{0x}, v_{0y}, v_{0z} 均保持为零.

由于垂直加速度忽略不计, 地面的法向约束力 $\boldsymbol{N}$ 与重力平衡. 设 m 为刚体的质量, 则有

$$\boldsymbol{N} = -m\boldsymbol{g} = mg\left(\vartheta\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}\right) \tag{12.1.4}$$

约束力 $\boldsymbol{N}$ 对 O_c 点的力矩为

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r}_c \times \boldsymbol{N} = mgl\vartheta\boldsymbol{i} \tag{12.1.5}$$

$(O_c - xyz)$ 坐标系的角速度为

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \dot{\vartheta}\boldsymbol{i} + \dot{\psi}\left(\vartheta\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}\right) \tag{12.1.6}$$

将 (12.1.3), (12.1.5), (12.1.6) 等式代入对质心的动量矩定理 (2.2.23), 其沿 z 轴的投影式有初积分

$$\omega_z = \omega_0 \tag{12.1.7}$$

将 $\dot{\psi}$ 记作 Ω, 沿 x, y 轴的投影式为

$$A\ddot{\vartheta} - \left(A\Omega^2 - C\omega_0\Omega + mgl\right)\vartheta = 0 \tag{12.1.8a}$$

$$A\dot{\Omega}\vartheta + \left(2A\Omega - C\omega_0\right)\dot{\vartheta} = 0 \tag{12.1.8b}$$

存在 ϑ 和 Ω 的常值特解, 对应于刚体的稳态运动. ϑ 不为零时, 特解 Ω 应满足

$$A\Omega^2 - C\omega_0\Omega + mgl = 0 \tag{12.1.9}$$

如 2.4.4 节所作的分析, Ω 的实数解条件为陀螺转速 ω_0 大于临界值 $\omega_{0,\mathrm{cr}}$, 即

$$\omega_{0,\mathrm{cr}} = \frac{2}{C}\sqrt{Amgl} \tag{12.1.10}$$

如陀螺转速 ω_0 足够大, $\omega_0 \gg \omega_{0,\mathrm{cr}}$, 仅保留 $(\omega_{0,\mathrm{cr}}/\omega_0)$ 的一次项时, 从式 (12.1.9) 解出 Ω 的如式 (2.4.28) 所示的两个实根

$$\Omega_1 = \frac{mgl}{C\omega_0}, \quad \Omega_2 = \frac{C\omega_0}{A} \tag{12.1.11}$$

此结果也可近似忽略式 (12.1.9) 的第一项 (若 $\Omega \ll 1$) 或第三项 (若 $\Omega \gg 1$) 直接得到.

以上分析表明, 陀螺的稳态运动为极轴以相对垂直轴的常值偏角 ϑ 和常值角速度 Ω 进动, 即 2.4.4 节中叙述的拉格朗日刚体的受迫规则进动. 区别仅在于对定点的主惯性矩 A, C 改为对质心的主惯性矩, 质心与定点的距离 l 改为质心与接触表面球心的距离.

12.1.2 陀螺绕赤道轴旋转的稳定性

设轴对称刚体的极轴处于水平位置, 绕直立的赤道轴旋转. 设过陀螺与地面接触点 P 的横截面与极轴的交点与陀螺的质心 O_c 重合, P 点处的子午线曲率中心 O 位于此横截面内 (图 12.2). 受扰后赤道轴仍在垂直轴附近, 定义 γ 为章动角 ϑ 偏离 $\pi/2$ 的角度

$$\vartheta = \pi/2 + \gamma \tag{12.1.12}$$

γ 为小量, 仅保留其一次项. 刚体的角速度公式应改为

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\gamma}\boldsymbol{i} + \dot{\psi}\boldsymbol{j} + \omega_z\boldsymbol{k} \tag{12.1.13}$$

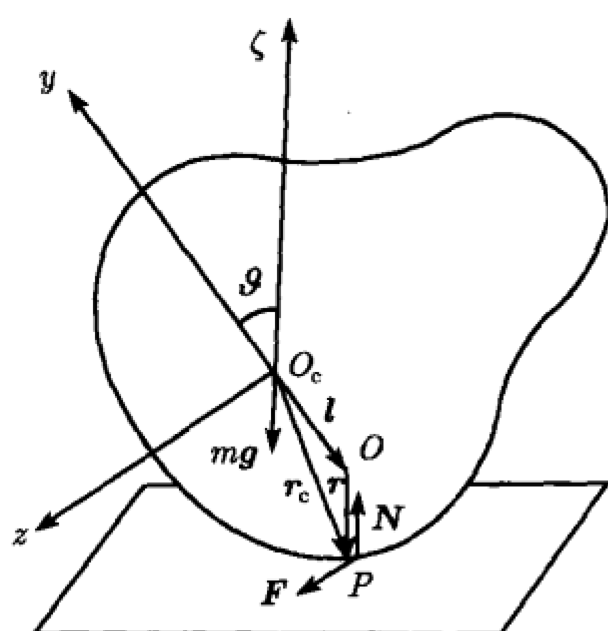


图 12.2　平面上绕赤道轴旋转的陀螺

其中刚体绕极轴的角速度为

$$\omega_z = \dot{\varphi} - \dot{\psi}\gamma \tag{12.1.14}$$

$(O_c - xyz)$ 坐标系的角速度改为

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \dot{\gamma}\boldsymbol{i} + \dot{\psi}(\boldsymbol{j} - \gamma\boldsymbol{k}) \tag{12.1.15}$$

设 r 为受扰后接触点 P 处子午线的曲率半径, l 为 O_c 至 O 点的距离, $h = r + l$ 为极轴水平时的最大质心高度, 即赤道圆的半径. 仍沿用以上定义的 $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{r}_c$, $\boldsymbol{r}$ 等符号, 其中 $\boldsymbol{r}_c$ 在 $(O_c - xyz)$ 中的投影式为

$$\boldsymbol{r}_c = -h\boldsymbol{j} + r\gamma\boldsymbol{k} \tag{12.1.16}$$

将上式代入式 (12.1.5) 计算约束力 $\boldsymbol{N}$ 对 O_c 点的矩, 得到

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r}_c \times \boldsymbol{N} = mgl\gamma\boldsymbol{i} \tag{12.1.17}$$

将 (12.1.13), (12.1.15), (12.1.17) 等式代入动量矩定理 (2.2.27), 其沿极轴的投影式也存在初积分 (12.1.7). 将 $\dot{\psi}$ 记作 Ω, 导出沿 x, y 轴的投影式

$$A\ddot{\gamma} + \left(A\Omega^2 - mgl\right)\gamma + C\omega_0\Omega = 0 \tag{12.1.18a}$$

$$A\dot{\Omega} - C\omega_0\dot{\gamma} = 0 \tag{12.1.18b}$$

也存在 γ 和 Ω 的常值特解, 满足

$$A\gamma\Omega^2 + C\omega_0\Omega - mgl\gamma = 0 \tag{12.1.19}$$

即特殊形式的受迫规则进动. 近似忽略上式第一项 (若 $\Omega \ll 1$) 或第三项 (若 $\Omega \gg 1$), 得到慢进动和快进动的近似值

$$\Omega_1 = \frac{mgl\gamma}{C\omega_0}, \quad \Omega_2 = -\frac{C\omega_0}{A\gamma} \tag{12.1.20}$$

12.2　陀螺在微粗糙平面上的运动

12.2.1　微粗糙平面上的滑动摩擦

对于在粗糙平面上滚动的刚体, 必须考虑接触点 P 处的地面摩擦力 $\boldsymbol{F}$. 依据库仑定律, $\boldsymbol{F}$ 沿滑动速度的反方向, 与正压力 N 成正比

$$\boldsymbol{F} = -\mu N \left(\frac{\boldsymbol{v}}{v}\right) \tag{12.2.1}$$

其中 μ 为动摩擦因数, 一般情况下为滑动速度 v 的函数

$$\mu = \varepsilon \left|f(v)\right| \tag{12.2.2}$$

设质心 $O_{\rm c}$ 以 $\boldsymbol{v}_{\rm c}$ 速度运动, P 点的滑动速度 $\boldsymbol{v}$ 为

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{\rm c} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{\rm c} \tag{12.2.3}$$

将式 (12.1.1), (12.1.2) 代入后, 导出

$$\boldsymbol{v} = \left[v_{{\rm c}x} + \left(\omega_z r - \dot{\psi} h\right)\vartheta\right]\boldsymbol{i} + \left(v_{{\rm c}y} + h\dot{\vartheta}\right)\boldsymbol{j} + v_{{\rm c}z}\boldsymbol{k} \tag{12.2.4}$$

在上节对于光滑平面的分析结果中, $\omega_z = \omega_0$ 和 $N = mg$ 不受摩擦力的影响. 应用逐次近似方法, 将 $\varepsilon = 0$, 即光滑平面的分析结果: $\dot{\psi} = \Omega$, $\dot{\vartheta} = 0$, $v_{{\rm c}x} = v_{{\rm c}y} = v_{{\rm c}z} = 0$ 作为零次近似, 代入式 (12.2.4) 计算滑动速度 $\boldsymbol{v}$ 在 $(O - xyz)$ 中的投影, 得到

$$v_x = (\omega_0 r - \Omega h)\,\vartheta, \quad v_y = v_z = 0 \tag{12.2.5}$$

利用式 (12.1.9) 消去 ω_0, 将 v_x 化作

$$v_x = \frac{A\Omega h\vartheta}{C}\left[\rho - \Lambda + \mu\,(1 - \rho)\right] \tag{12.2.6}$$

其中 $\Lambda = C/A$ 为惯性矩比, 量纲为一的参数 ρ 和 μ 定义为

$$\rho = \frac{r}{h}, \quad \mu = \frac{mgr}{A\Omega^2} \tag{12.2.7}$$

将式 (12.2.5) 代入式 (12.2.1) 计算摩擦力 $\boldsymbol{F}$, 令 $v = |v_x|$, 得到

$$\boldsymbol{F} = -\varepsilon mg \left|f(v)\right| {\rm sign} v_x \boldsymbol{i} \tag{12.2.8}$$

12.2.2　陀螺在微粗糙平面上的自旋稳定性

利用式 (12.1.1) 和 (12.1.18) 计算摩擦力对 O_c 点的力矩 $\boldsymbol{M}_f$

$$\boldsymbol{M}_f = \boldsymbol{r}_c \times \boldsymbol{F} = \varepsilon mgh\left|f(v)\right|\mathrm{sign}v_x\boldsymbol{j} \tag{12.2.9}$$

摩擦力矩的加入使刚体的运动不同于光滑平面情形的规则进动. 对于 ε 充分小的微粗糙平面, 相对微弱的摩擦力矩可视为对规则进动的扰动. 可以认为, 在较短时间间隔内刚体的运动仍遵循规则进动规律, 但对较长的时间过程, 除 ω_z 维持常值 ω_0 不变以外, ϑ 和 Ω 可能缓慢摄动. 在动量矩定理 (2.2.27) 中增加摩擦力矩 $\boldsymbol{M}_f$, $\dot\psi$ 仍以 Ω 表示, 导出

$$A\ddot\vartheta - \left(A\Omega^2 - C\omega_0\Omega + mgl\right)\vartheta = 0 \tag{12.2.10a}$$

$$A\dot\Omega\vartheta + \left(2A\Omega - C\omega_0\right)\dot\vartheta = \varepsilon mgh\left|f(v)\right|\mathrm{sign}v_x \tag{12.2.10b}$$

将 ε 视为小参数, 引入尺度缩小的时间变量 $\tau = \varepsilon t$, ϑ 和 Ω 均视为 τ 的函数. 此方程组化作

$$A\varepsilon^2\ddot\vartheta - \left(A\Omega^2 - C\omega_0\Omega + mgl\right)\vartheta = 0 \tag{12.2.11a}$$

$$\varepsilon\left[A\dot\Omega\vartheta + \left(2A\Omega - C\omega_0\right)\dot\vartheta\right] = \varepsilon mgh\left|f(v)\right|\mathrm{sign}v_x \tag{12.2.11b}$$

其中的点号改定义为相对 τ 的导数符号. 在 ε 的一次项精度前提下, 方程 (12.2.11a) 导致与 (12.1.9) 相同的关系式, Ω 仍为常值. 实际观察表明, 极轴在垂直轴附近的进动为快进动. 将式 (12.2.1) 中的 $\Omega = C\omega_0/A$ 代入方程 (12.2.11b), 令 $\dot\Omega = 0$, 消去两边的 ε, 化作

$$\dot\vartheta = \frac{mgh}{C\omega_0}\left|f(v)\right|\mathrm{sign}v_x \tag{12.2.12}$$

刚体绕直立的极轴永久转动的稳定性可根据 $\dot\vartheta$ 和 ϑ 为同号或异号确定. 利用式 (12.2.6) 可作出以下判断

$$\rho - \varLambda + \mu(1-\rho)\quad\begin{matrix} <0 & \text{渐进稳定} \\ >0 & \text{不稳定}\end{matrix} \tag{12.2.13}$$

此判据与摩擦规律 $f(v)$ 无关. 在 $(\varLambda,\rho)$ 参数平面上以直线 $\rho = 1$ 和 $\varLambda = \rho$ 划分为 4 个区域 $\mathrm{D}_i\ (i = 1,2,3,4)$ (见图 12.3):

$$\mathrm{D}_1\text{区}:\quad \varLambda > \rho > 1$$

$$\begin{aligned}&\text{D}_2\text{区}: && \Lambda < \rho < 1\\ &\text{D}_3\text{区}: && \rho > 1,\ \ \rho > \Lambda\\ &\text{D}_4\text{区}: && \rho < 1,\ \ \rho < \Lambda\end{aligned}$$

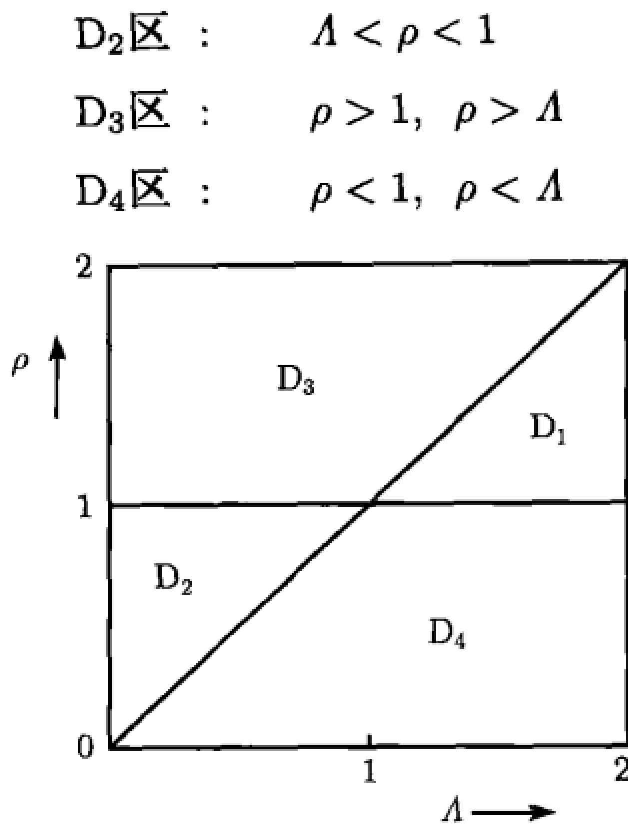


图 12.3　(Λ,ρ) 参数平面上的稳定域

D_1 区和 D_3 区内陀螺质心低于底部曲率中心, D_2 区和 D_4 区内陀螺质心高于底部曲率中心. 其中 D_1 为渐近稳定区, D_2 为不稳定区, D_3, D_4 区内陀螺的稳定性不仅与外形和质量几何有关, 而且取决于进动角速度 Ω. D_3 区内的稳定性条件为

$$\Omega \begin{array}{ll} < \Omega_{\text{cr}} & \text{渐进稳定} \\ > \Omega_{\text{cr}} & \text{不稳定} \end{array} \tag{12.2.14}$$

D_4 区内的稳定性条件恰好相反

$$\Omega \begin{array}{ll} < \Omega_{\text{cr}} & \text{不稳定} \\ > \Omega_{\text{cr}} & \text{渐进稳定} \end{array} \tag{12.2.15}$$

Ω 的临界值 Ω_{cr} 定义为

$$\Omega_{\text{cr}} = \sqrt{\frac{mgr}{A}\left|\frac{1-\rho}{\Lambda-\rho}\right|} \tag{12.2.16}$$

上述判据表明, 陀螺的稳定性取决于底部曲率半径和质心的相对位置. 质心低于底部曲率中心的陀螺, 一般情况下其绕直立轴的永久转动稳定 (图 12.4(a)). 但如底部曲率半径过大或质心过低, 则转速过快超过临界值时可丧失稳定性 (图 12.4(b)). 例如, 在桌面上快速捻转一只图钉或围棋子, 可观察到突然跃起的失稳现象. 相反, 如陀螺的质心高于底部曲率中心, 其绕直立轴的永久转动一般不稳定 (图 12.4(c)), 但如底部曲率半径过小或质心过高, 当转速升高到超过临界值时可转为稳定 (图 12.4(d)). 尖端触地的拉格朗日陀螺的稳定性即符合此规律.

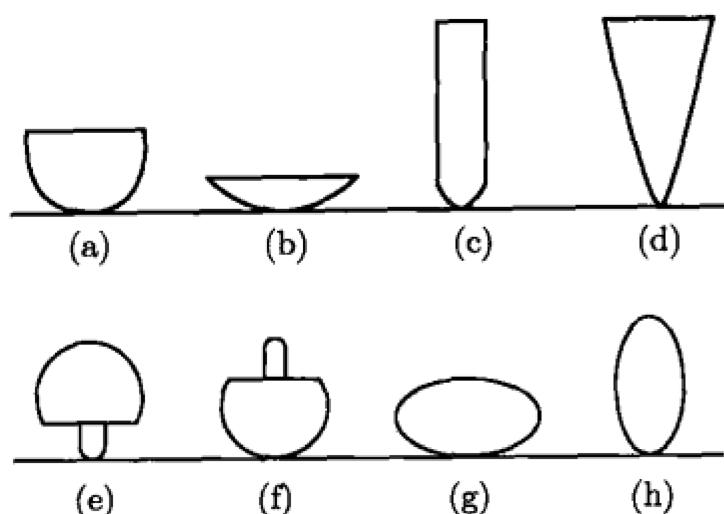


图 12.4 各种不同外形的陀螺

12.2.3 翻身陀螺

翻身陀螺是由截头球体和细柄构成的轴对称刚体, 两端为不同半径的大小球面. 钝端的球面半径 r_1 远大于细柄端部的曲率半径 r_2. 陀螺的质心 O_c 与两个球面的球心 O_1 和 O_2 均不重合. 当陀螺的短柄朝上, 钝端与地面接触时, 重心在球心的下方, 陀螺处于静态稳定 (图 12.4(e)). 此状态当陀螺缓慢旋转时仍可继续保持. 但快速旋转时钝端接触可由稳定转为不稳定, 陀螺突然翻转为柄端向下着地的状态继续旋转 (图 12.4(f)). 翻身后的陀螺重心高度上升, 势能随之上升, 这种奇特现象曾引起物理学界的巨大兴趣[①]. 根据上节的结论, 陀螺的钝端接触与尖端接触分别属于图 12.4 中的 D_3 区和 D_4 区, 当转速超过临界转速时 D_3 区不稳定而 D_4 区稳定. 因此应用稳定性判据 (12.2.13) 即可对此现象作出解释.

为从物理概念出发解释翻身陀螺的力学原理, 先观察一个在绝对光滑平面上绕垂直的极轴旋转的陀螺运动. 由于无水平力作用, 陀螺的质心 O_c 保持在同一垂直轴上. 在球形底面与地面接触点 P 处作用的法向约束力与重力共线, 不构成对质心的力矩. 陀螺匀速旋转且保持旋转轴的方位不变. 极轴 z, 角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 和相对质心的动量矩 $\boldsymbol{H}$ 均与垂直轴 ζ 一致.

若陀螺受到扰动以致极轴偏离垂直轴, 则角速度矢量和动量矩矢量均与极轴不共线而产生章动. 在章动过程中, 由于过 P 点的垂线不通过质心 O_c, 重力与法向约束力构成的力偶引起陀螺进动. 但在短暂时间内, 进动造成的动量矩矢量的角位移很小, 可以近似地认为角速度矢量和动量矩矢量仍接近垂直轴位置. 将短柄朝上大球面触地的状态作为状态 1(图 12.5), 短柄朝下触地的状态作为状态 2(图 12.6). 当陀螺绕 x_0 轴偏转 ϑ 角时, 由于状态 1 中大球面的球心 O_1 在陀螺质心的上方, P

① 翻身陀螺 (tip top) 为 20 世纪 50 年代丹麦人奥斯特伯格 (Østberg) 发明的玩具, 曾引起物理学界对其力学原理的讨论热潮. 除个别观点错误地认为此现象由质量分布不对称引起, 多数观点认为摩擦是引起陀螺翻身现象的根本原因. 1973 年马格努斯应用线性摩擦规律作出较严格的分析. 1978 年凯恩等考虑库仑摩擦的非线性, 用数值方法再现了陀螺的翻身过程.

点向 ζ 轴的左方偏移, 且由于陀螺的旋转而产生滑动, 滑动速度从纸面向外. 而在状态 2 中, 小球面的球心 O_2 在陀螺质心的下方, P 点向 ζ 轴的右方偏移, 滑动速度相反.

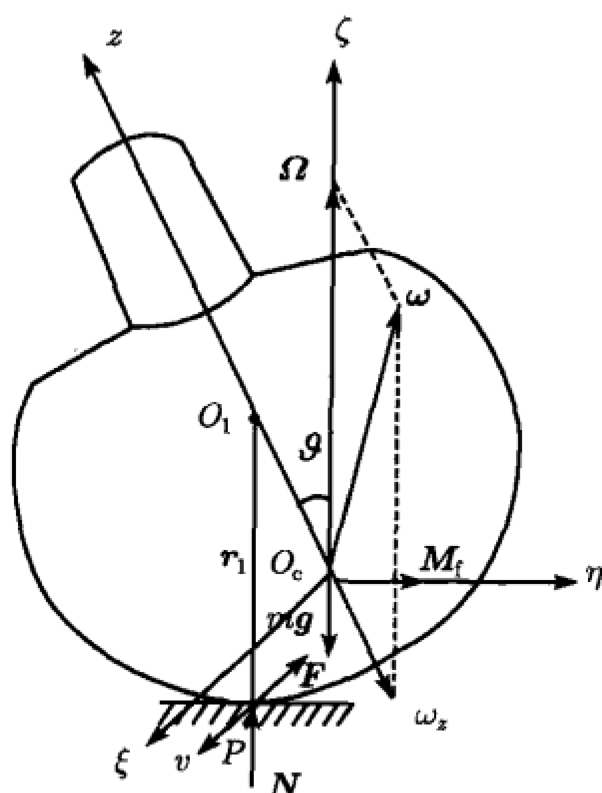


图 12.5 陀螺的状态 1

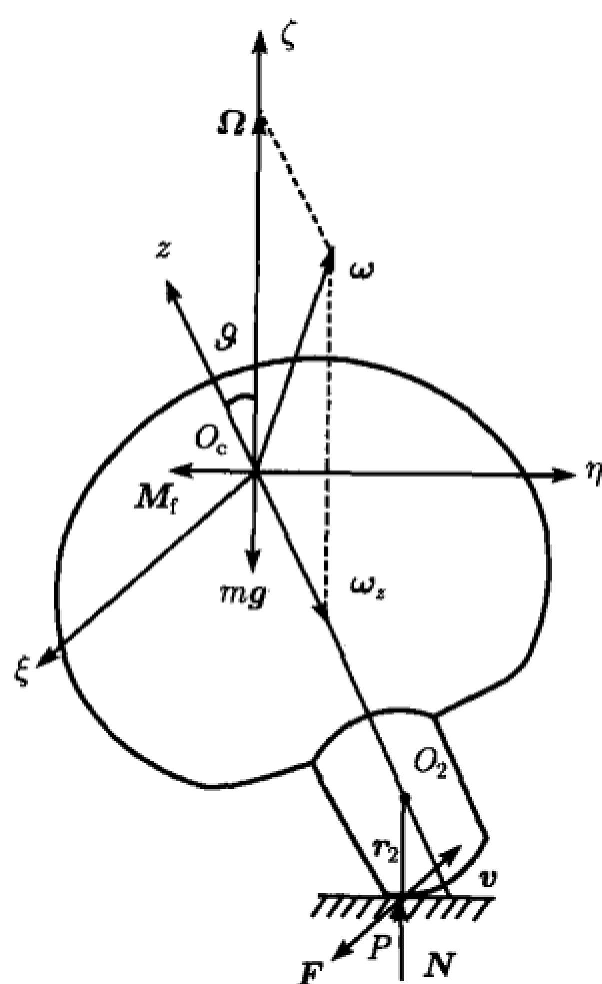
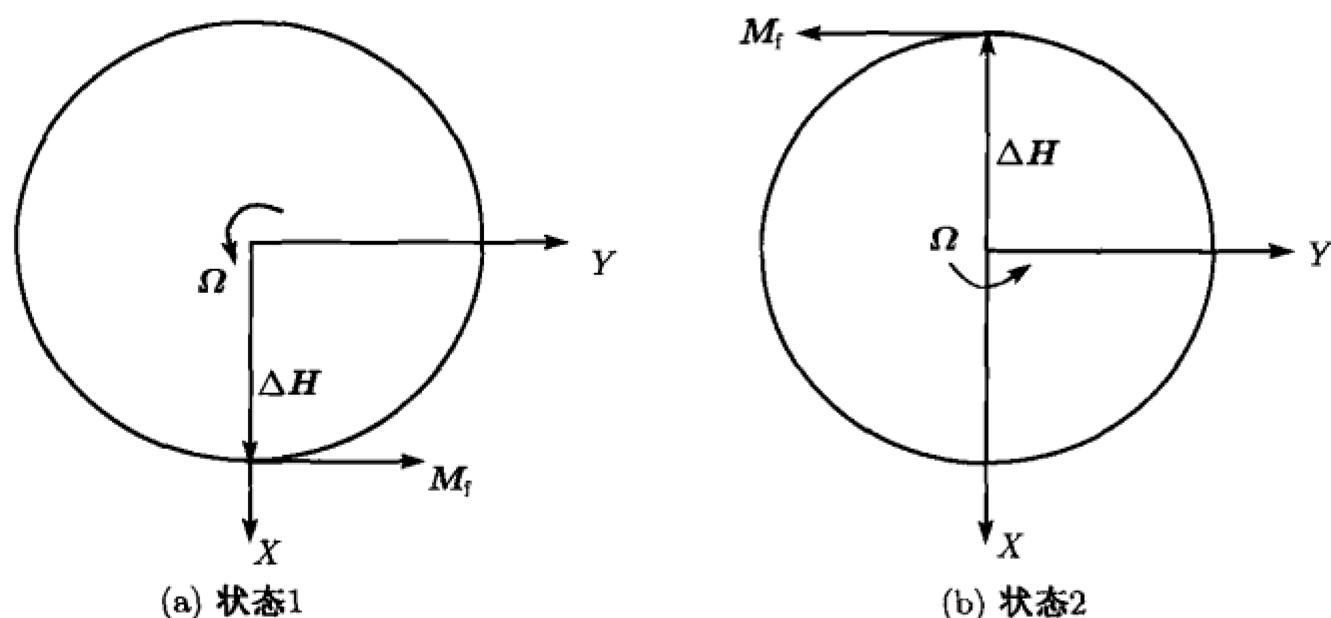


图 12.6 陀螺的状态 2

将上述平面绝对光滑作为零次近似, 讨论由此产生的摩擦力对陀螺运动的影响. 在状态 1 中, 摩擦力的方向指向纸面, 对质心产生向右的力矩. 状态 2 则相反, 摩擦力对质心产生向左的力矩. 将极轴 z 与 ζ 轴构成的平面, 即 (y_0, z_0) 坐标面记作 Π. Π 平面与陀螺同步转动, 摩擦力矩的方向亦随同转动. 根据动量矩定理, 摩擦力矩 $\boldsymbol{M}_{\mathrm{f}}$ 应等于动量矩 $\boldsymbol{H}$ 的变化率. 为此陀螺极轴 z 与 ζ 轴的夹角 ϑ 必须变化, 所产生的角速度 $\dot{\vartheta}$ 导致动量矩增量 $\Delta\boldsymbol{H}$, 使得在 Π 平面转动过程中, 动量矩增量 $\Delta\boldsymbol{H}$ 的矢端速度与摩擦力矩 $\boldsymbol{M}_{\mathrm{f}}$ 相等. 从图 12.8 可以清楚地看出, 向右的摩擦力矩 $\boldsymbol{M}_{\mathrm{f}}$ 要求动量矩增量 $\Delta\boldsymbol{H}$ 沿 x_0 轴, 向左的摩擦力矩 $\boldsymbol{M}_{\mathrm{f}}$ 要求 $\Delta\boldsymbol{H}$ 沿 x_0 轴的负方向. 因此状态 1 的章动角必须增大, 极轴向地面趋近; 状态 2 的章动角必须减小, 极轴向垂直轴趋近 (图 12.7). 从而证明, 大球面触地的状态 1 不稳定, 短柄触地的状态 2 稳定. 此即陀螺出现翻转现象的物理原因.



(a) 状态1　　(b) 状态2

图 12.7　附加动量矩 $\Delta\boldsymbol{H}$ 的矢端轨迹

12.2.4　绕赤道轴旋转的陀螺

对于在微粗糙平面上绕赤道轴旋转的陀螺, 利用式 (12.1.13), (12.1.16) 计算 P 点的滑动速度 $\boldsymbol{v}$

$$\boldsymbol{v} = (v_{\mathrm{cx}} + \omega_z h + \Omega r\gamma)\,\boldsymbol{i} - (v_{\mathrm{cz}} + h\dot{\gamma})\,\boldsymbol{k} \tag{12.2.17}$$

代入式 (12.2.1) 计算摩擦力 $\boldsymbol{F}$

$$\boldsymbol{F} = -\varepsilon mg\,|f(v)|\,[(v_x/v)\,\boldsymbol{i} + (v_z/v)\,\boldsymbol{k}] \tag{12.2.18}$$

代入式 (12.2.9) 计算摩擦力对 O_{c} 点的力矩 $\boldsymbol{M}_{\mathrm{f}}$

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{f}} = \varepsilon mgh\,|f(v)|\,[(v_z/v)\,\boldsymbol{i} - (v_x/v)\,(r\gamma\boldsymbol{j} + h\boldsymbol{k})] \tag{12.2.19}$$

在动量矩定理 (2.2.27) 中增加摩擦力矩 $\boldsymbol{M}_{\mathrm{f}}$, 导出动力学方程

$$A\ddot{\gamma}+\left(A\Omega^2-mgl\right)\gamma+C\omega_z\Omega=\varepsilon mgh\left|f\left(v\right)\right|\left(v_z/v\right) \tag{12.2.20a}$$

$$A\dot{\Omega}-C\omega_z\dot{\gamma}=0 \tag{12.2.20b}$$

$$C\dot{\omega}_z=-\varepsilon mgh\left|f\left(v\right)\right|\left(v_x/v\right) \tag{12.2.20c}$$

引入尺度缩小的时间变量 $\tau=\varepsilon t$, ϑ 和 Ω 均视为 τ 的函数. $\varepsilon=0$ 时, 从方程 (12.2.20a) 导出

$$A\gamma\Omega^2+C\omega_z\Omega-mgl\gamma=0 \tag{12.2.21}$$

即式 (12.1.19) 表示的拉格朗日情形规则进动, 其中 ω_z 的零次近似为 ω_0.

设质心速度的零次近似为零, 令式 (12.2.17) 中 $v_{0x}=v_{0z}=0$, $\dot{\gamma}=0$, 滑动速度 $\boldsymbol{v}$ 的一次近似值为

$$v_x=\left(\omega_z h+\Omega r\gamma\right)\vartheta,\quad v_y=v_z=0 \tag{12.2.22}$$

从式 (12.2.21) 解出 ω_z 代入式 (12.2.22), v_x 化作

$$v_x=\Omega h\gamma\left[\rho-\Lambda+\mu\left(1-\rho\right)\right] \tag{12.2.23}$$

其中 ρ 的定义同式 (12.2.7), Λ,μ 的定义改为

$$\Lambda=\frac{A}{C},\quad \mu=\frac{mgh}{C\Omega^2} \tag{12.2.24}$$

将式 (12.2.21) 各项对 τ 求导, 与方程 (12.2.20b), (12.2.20c) 联立, 仅保留 $\varepsilon,\gamma,\delta$ 的一次项, 导出与式 (12.2.12) 相似的摄动方程

$$\dot{\gamma}=\frac{mgh}{A\Omega}\left|f\left(v\right)\right|\mathrm{sign}v_x \tag{12.2.25}$$

对于刚体绕直立的赤道轴的永久转动, 可根据 $\dot{\gamma}$ 和 γ 为同号或异号判断其稳定性. 将式 (12.2.23) 代入式 (12.2.25), 得到与式 (12.2.13) 形式相同的稳定性判据. 图 12.4 所划分的稳定域以及式 (12.2.14) 至 (12.2.16) 各式也适用于绕赤道轴旋转的刚体, 但参数 Λ,μ 必须按照式 (12.2.24) 的定义.

绕赤道轴旋转的硬币或戒指 ($\Lambda\approx0.5$, $\rho\ll1$) 属于区域 D_4, 超过临界转速时稳定. 熟鸡蛋绕赤道轴旋转 ($\Lambda\approx1.5$, $\rho\approx2$)(图 12.4g) 和绕极轴旋转 ($\Lambda\approx0.7$, $\rho\approx0.6$)(图 12.4f) 分别属于区域 D_3 和区域 D_4, 超过临界转速时鸡蛋绕赤道轴的旋转失稳, 可从侧面接触突然跃起为尖端接触继续绕极轴稳定旋转. 这种被称为哥伦布蛋的有趣现象可由此得到理论解释.

12.3　平面上旋转的充液陀螺

12.3.1　动力学方程

设轴对称刚体带有旋转椭球形腔, 腔内充满理想液体, 腔的对称轴与刚体极轴共线 (图 12.8). 以充液刚体的质心 O_c 为原点, 建立平动坐标系 $(O_c-\xi\eta\zeta)$, ζ 轴沿地垂线向上, ξ,η 轴与水平面平行. 改用 3.2.1 节定义的卡尔丹角 α,β,φ 代替 12.1 节使用的欧拉角确定刚体受扰后位置 (见图 3.4). 转动次序为

$$(O_c-\xi\eta\zeta)\ \underset{\xi,x_0}{\overset{\alpha}{\rightarrow}}\ (O_c-x_0y_0z_0)\ \underset{y_0,y}{\overset{\beta}{\rightarrow}}\ (O_c-xyz)\ \underset{z,z_R}{\overset{\varphi}{\rightarrow}}\ (O_c-x_Ry_Rz_R)$$

设充液刚体在微粗糙平面上的稳态运动为绕直立的极轴旋转, 受扰后极轴仍在垂直轴附近. 以下分析中仅保留 α,β 的一次项.

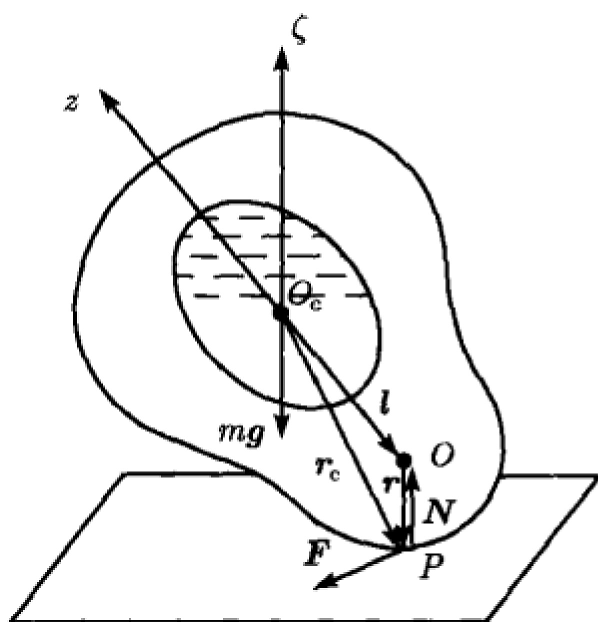


图 12.8　平面上转动的充液陀螺

设旋转椭球腔的赤道半轴和极半轴分别为 a 和 c, $\lambda=c/a$ 为半轴比. 刚体在 P 点处与平面接触, 接触点附近椭球面的曲率半径为 r, 曲率中心 O 在极轴上, 与质心 O_c 的距离为 l, 质心的最大高度为 $h=r+l$. 根据式 (10.1.32) 表示的椭球方程

$$F(x,y,z)=\lambda^2\left(x^2+y^2\right)+z^2-c^2=0 \tag{12.3.1}$$

P 点相对 O_c 的矢径 $\boldsymbol{r}_c$ 在 (O_c-xyz) 中的投影式为

$$\boldsymbol{r}_c=r(\beta\boldsymbol{i}-\alpha\boldsymbol{j})-h\boldsymbol{k} \tag{12.3.2}$$

刚体的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 相对 (O_c-xyz) 的投影式为

$$\boldsymbol{\omega}=\dot{\alpha}\boldsymbol{i}+\dot{\beta}\boldsymbol{j}+\dot{\varphi}\boldsymbol{k} \tag{12.3.3}$$

将质心速度 $\boldsymbol{v}_c$ 和式 (12.3.3), (12.3.4) 代入式 (12.2.3), 计算 P 点的滑动速度 $\boldsymbol{v}$ 在 (O_c-xyz) 中的投影. 得到

$$v_x = v_{cx} - h\dot{\beta} + r\dot{\varphi}\alpha,\ v_y = v_{cy} + h\dot{\alpha} + r\dot{\varphi}\beta,\ v_z = 0 \tag{12.3.4}$$

关于旋转刚体与接触平面之间的摩擦规律, 1963 年康坦苏认为高速旋转物体的接触摩擦不同于通常情况下的库仑摩擦, 其平均效果与滑动速度成比例. 利用此规律代替 1.2 节中的库仑摩擦, 滑动摩擦力 $\boldsymbol{F}$ 可写作

$$\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{v} \tag{12.3.5}$$

系数 k 取决于接触面的物理因素. 法向约束力 $\boldsymbol{N} = -m\boldsymbol{g}$ 的投影式为

$$\boldsymbol{N} = mg\,(-\beta\boldsymbol{i} + \alpha\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) \tag{12.3.6}$$

外力 $\boldsymbol{N}$ 和 $\boldsymbol{F}$ 对 O_c 点的力矩为

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r}_c \times (\boldsymbol{N} + \boldsymbol{F}) \tag{12.3.7}$$

导出 $\boldsymbol{M}$ 在 (O_c-xyz) 中的投影

$$M_x = mgl\alpha - khv_y,\ \ M_y = mgl\beta + khv_x,\ \ M_z = 0 \tag{12.3.8}$$

充液刚体的总动量由式 (10.2.28) 给出

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{J}'\cdot\boldsymbol{\Omega}' \tag{12.3.9}$$

其中惯性张量 $\boldsymbol{J}$ 和 $\boldsymbol{J}'$ 的定义见式 (10.2.8),(10.2.24). 利用式 (10.4.2) 规定的惯性矩符号表示充液刚体相对 O_c 的动量矩, 得到

$$\boldsymbol{H} = (A\dot{\alpha} + A'\Omega'_x)\,\boldsymbol{i} + \left(A\dot{\beta} + A'\Omega'_y\right)\boldsymbol{j} + C\dot{\varphi}\boldsymbol{k} \tag{12.3.10}$$

设 $\boldsymbol{\omega}_1$ 为动坐标系 (O_c-xyz) 的角速度

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \dot{\alpha}\boldsymbol{i} + \dot{\beta}\boldsymbol{j} \tag{12.3.11}$$

将 (12.3.7), (12.3.10), (12.3.11) 等式代入动量矩定理 (2.2.27), 其沿 z 轴的投影式有初积分

$$\dot{\varphi} = \omega_0 \tag{12.3.12}$$

引入量纲为一的时间 $\tau = \omega_0 t$, 仍保留原来的速度, 角速度和求导符号. 定义以下量纲为一的参数

$$\Lambda = \frac{C}{A},\ \ \gamma = \frac{A'}{A},\ \ \rho = \frac{r}{h},\ \ \mu = \frac{mgl}{A\omega_0^2},\ \ D = \frac{kh^2}{A\omega_0},\ \ D_0 = \frac{k}{m\omega_0} \tag{12.3.13}$$

导出沿 x 轴和 y 轴的欧拉方程

$$
\begin{aligned}
&\ddot{\alpha}+D\dot{\alpha}+\Lambda\dot{\beta}-\mu\alpha+\rho D\beta+(D/h)\,v_{cy}+\gamma\dot{\Omega}_x'=0\\
&\ddot{\beta}+D\dot{\beta}-\Lambda\dot{\alpha}-\mu\beta-\rho D\alpha-(D/h)\,v_{cx}+\gamma\dot{\Omega}_y'=0
\end{aligned}
\tag{12.3.14}
$$

将质心速度 $\boldsymbol{v}_c$ 和作用力 $\boldsymbol{F},\boldsymbol{N}$ 投影到 $(O_c-\xi\eta\zeta)$, 代入动量定理

$$
m\dot{\boldsymbol{v}}_c=\boldsymbol{N}+\boldsymbol{F}
\tag{12.3.15}
$$

得到质心 O_c 沿水平面运动的动力学方程

$$
\begin{aligned}
&\dot{v}_{c\xi}+D_0\omega_0(v_{c\xi}-h\dot{\beta}+r\alpha)=0\\
&\dot{v}_{c\eta}+D_0\omega_0(v_{c\eta}+h\dot{\alpha}+r\beta)=0
\end{aligned}
\tag{12.3.16}
$$

其中 $v_{c\xi},v_{c\eta}$ 为质心速度 $\boldsymbol{v}_c$ 沿 ξ,η 轴的投影, 与 v_{cx},v_{cy} 的区别为二阶微量. 引入以下复变量

$$
z=\alpha+\mathrm{i}\beta,\ \ w=\Omega_x'+\mathrm{i}\Omega_y',\ \ u=(v_{c\xi}+\mathrm{i}v_{c\eta})/h
\tag{12.3.17}
$$

方程组 (12.3.14), (12.3.16) 可合并为复数形式. 将椭球腔内液体的亥姆霍兹方程 (10.4.19b) 与之联立, 以量纲为一的时间 $\tau=\omega_0 t$ 为自变量, 得到封闭的复数方程组

$$
\ddot{z}+(D-\mathrm{i}\Lambda)\,\dot{z}-(\mu+\mathrm{i}\rho D)\,z-\mathrm{i}Du+\gamma\dot{w}=0
\tag{12.3.18a}
$$

$$
\ddot{z}-\mathrm{i}\dot{z}+\dot{w}-\mathrm{i}\Gamma w=0
\tag{12.3.18b}
$$

$$
D_0\,(\mathrm{i}\dot{z}+\rho z)+\dot{u}+D_0u=0
\tag{12.3.18c}
$$

其中参数 Γ 的定义见式 (10.3.37).

对于光滑平面上旋转的充液刚体, 令方程组 (12.3.18) 前二式中 $D=0$, 即与拉格朗日情形充液刚体的动力学方程 (10.4.38) 一致.

12.3.2　稳定性分析

陀螺极轴受扰后如保持在垂直轴附近做周期摆动, 则绕垂直轴的永久转动稳定. 方程组 (12.3.18) 的周期解与参数空间内渐近稳定与不稳定之间的临界状态相对应. 利用以下形式的周期解

$$
z=Z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma\tau},\ \ w=W\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma\tau},\ \ u=U\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma\tau}
\tag{12.3.19}
$$

代入方程组 (10.3.18), 导出此线性系统的频率方程

$$
\begin{aligned}
&\sigma\left[\gamma\sigma^2(1-\sigma)+(\sigma-\Gamma)\left(\sigma^2-\Lambda\sigma+\mu\right)\right]-\mathrm{i}\left[D_0\gamma\sigma^2(1-\sigma)\right.\\
&\qquad\left.+D_0(\sigma-\Gamma)\left(\sigma^2-\Lambda\sigma+\mu\right)+D\sigma(\sigma-\Gamma)(\sigma-\rho)\right]=0
\end{aligned}
\tag{12.3.20}
$$

此方程的实部和虚部应分别为零, 将二等式之差与之联立, 得到

$$\gamma\sigma^2(1-\sigma)+(\sigma-\Gamma)\left(\sigma^2-\Lambda\sigma+\mu\right)=0 \tag{12.3.21a}$$

$$D\sigma(\sigma-\Gamma)(\sigma-\rho)=0 \tag{12.3.21b}$$

在 $D \neq 0$ 条件下, 方程 (12.3.23b) 存在 σ 的 3 个根 $0, \Gamma, \rho$. 分别将其代入方程 (12.3.21a), 其中 $\sigma=0$ 和 $\sigma=\Gamma$ 仅存在于 $\Gamma=0$(球形腔) 或 $\Gamma=1$(无限细长腔) 的特殊情况. 将 $\sigma=\rho$ 代入, 引入重新定义的参数 μ

$$\mu=\frac{mgh}{A\omega_0^2}\left(\frac{h}{r}\right) \tag{12.3.22}$$

导出稳定域边界方程

$$(\rho-\Gamma)[\rho-\Lambda+\mu(1-\rho)]+\gamma\rho(1-\rho)=0 \tag{12.3.23}$$

作为特例, 令上式中 $\gamma=0$, 等号改为不等号, 即得到与 12.2 节中基于库仑摩擦规律的分析结果 (12.2.13) 形式相同的稳定性判据

$$\rho-\Lambda+\mu(1-\rho)\quad \begin{matrix} <0 & \text{渐进稳定} \\ >0 & \text{不稳定} \end{matrix} \tag{12.3.24}$$

因此基于两种不同摩擦规律分析微粗糙平面上旋转陀螺的稳定性, 可得出相同的定性结论, 仅参数 μ 和相应的转速临界值存在区别. 此区别随陀螺与球形的接近程度而减小, 如为球形陀螺, 则两种结论完全相同.

如忽略摩擦因素, 令方程 (12.3.20) 中 $D=D_0=0$, 即化作拉格朗日情形充液刚体的频率方程 (10.4.39) 及相应的稳定性条件 (10.4.41). 如忽略重力矩, 令 $\mu=0$, 则转化为欧拉情形充液刚体的频率方程 (10.4.22) 及相应的稳定性条件 (10.4.23).

一般情况下, 设 $\rho \neq \Gamma$, 从式 (12.3.23) 导出稳定性条件

$$\mu(1-\rho)<\Phi(\gamma, \Lambda, \rho) \tag{12.3.25}$$

其中函数 $\Phi(\gamma, \Lambda, \rho)$ 为

$$\Phi(\gamma, \Lambda, \rho)=\Lambda-\rho+\gamma\rho\left(\frac{\rho-1}{\rho-\Gamma}\right) \tag{12.3.26}$$

在 (γ, Λ, ρ) 三维参数空间内, 利用边界曲线 $1-\rho=0$ 和 $\Phi(\gamma, \Lambda, \rho)=0$ 划分为 4 个空间域 $\mathrm{D}_i\ (i=1,2,3,4)$. 球形腔情形 $(\Gamma=0)$ 的稳定域如图 12.9 所示. 陀螺的运动在 D_1 区内为渐近稳定, D_2 区内不稳定, 在 D_3 区和 D_4 区内陀螺的稳定性取决于转速 ω_0.

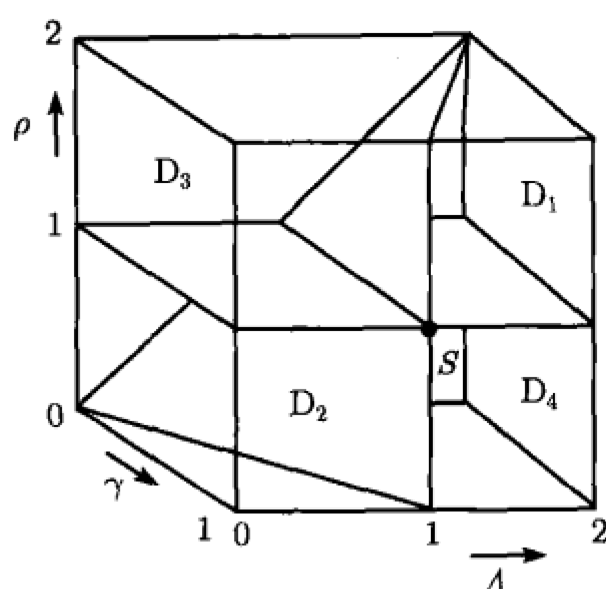


图 12.9 (γ, Λ, ρ) 参数空间中的稳定域

$$\mathrm{D_3}区：\quad \omega_0 \quad \begin{matrix} < \omega_{0,\mathrm{cr}} & 渐进稳定 \\ > \omega_{0,\mathrm{cr}} & 不稳定 \end{matrix} \tag{12.3.27a}$$

$$\mathrm{D_4}区：\quad \omega_0 \quad \begin{matrix} < \omega_{0,\mathrm{cr}} & 不稳定 \\ > \omega_{0,\mathrm{cr}} & 渐进稳定 \end{matrix} \tag{12.3.27b}$$

ω_0 的临界值 $\omega_{0,\mathrm{cr}}$ 定义为

$$\omega_{0,\mathrm{cr}} = \sqrt{\frac{mgl}{A\Phi}\left(\frac{h}{r}\right)} \tag{12.3.28}$$

可看出, 随着液体成分的增加, 稳定区 $\mathrm{D_1}$ 和不稳定区 $\mathrm{D_2}$ 扩大, 而条件稳定区 $\mathrm{D_3}$ 和 $\mathrm{D_4}$ 缩小.

10.4.2 节中对开尔文问题的理论解释仅限于无力矩条件. 如针对实际的实验条件, 必须考虑重力和摩擦力的影响. 忽略系统内薄壁壳体的质量, 参数 γ, Λ, ρ 可用椭球腔的半轴比 $\lambda = c/a$ 表示为

$$\gamma = \left(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right)^2, \quad \Lambda = \frac{2}{\lambda^2+1}, \quad \rho = \frac{1}{\lambda^2} \tag{12.3.29}$$

充液薄壁球壳为 $\lambda = 1$, $\gamma = \Lambda = \rho = 1$ 的特例, 对应于图 12.9 所示参数空间中的稳定域和不稳定域的交界点 S. 当陀螺外形趋向扁平时, λ 减小而 ρ, Λ 增大, S 点向区域 $\mathrm{D_1}$ 移动, 运动趋于稳定. 相反, 当陀螺外形趋向细长时, S 点向区域 $\mathrm{D_2}$ 移动, 运动趋于不稳定. 从而证明, 即使考虑重力和摩擦力因素, 薄壁充液球壳仍处于稳定性的临界状态. 关于开尔文问题的理论解释仍然适用. 此结论也可用于解释生鸡蛋绕极轴旋转的不稳定性. 将蛋内物质视为理想流体, 且忽略蛋壳的存在, 各参数近似取作 $\gamma \approx 0.9, \Lambda \approx 0.7$, $\rho \approx 0.5$, 参数空间中对应的相点位于不稳定的区域 $\mathrm{D_2}$ 内. 当鸡蛋自外部逐渐向内凝固时, 随着液体成分的减少, 参数空间内的 $\mathrm{D_4}$ 区由于

γ 减小而不断扩大, 相点逐渐从 D_2 区转入 D_4 区. $\gamma=0$ 时, 完全凝固的熟鸡蛋满足 12.2.4 节中得出的刚体稳定性条件, 即超过临界转速时绕极轴的旋转稳定.

12.4　粗糙平面上非轴对称刚体的运动

12.4.1　动力学方程

19 世纪发现的**凯尔特石**现象曾吸引了物理学界的浓厚兴趣, 大量研究论文和报告的发表未能停止对这一奇特力学现象的理论探索 [①]. 所谓凯尔特石是一个接近半椭球形的船形刚体, 其底部曲面沿纵向和横向有不同的曲率半径, 重心在曲率中心下方. 刚体绕垂直轴有最大主惯性矩, 但另外两个惯性主轴与底部曲面的曲率主轴不一致. 令凯尔特石在平面上绕垂直轴旋转或绕水平轴摆动, 可观察到以下现象:

现象一: 朝某个特定方向推动, 刚体做平稳转动. 但朝另一方向推动, 刚体的转动伴随剧烈的摆动, 很快减速, 停转, 并倒退朝相反方向旋转.

现象二: 静止的刚体受到叩击产生绕水平轴的摆动时, 能迅速转变为绕垂直轴的旋转, 旋转方向取决于叩击点的位置.

以刚体的质心 O_c 为原点建立平动坐标系 $(O_c-\xi\eta\zeta)$, ζ 轴沿地垂线向上, ξ,η 轴与水平面平行 (图 12.10). 设 $(O_c-\xi\eta\zeta)$ 绕 ζ 轴转过 ϕ 角的位置为 $(O_c-x_0y_0z_0)$, 绕 x_0 轴转过 α 角的位置为 $(O_c-x_1y_1z_1)$, 绕 y_1 转过 β 角与刚体底部曲面的曲率主轴坐标系 (O_c-xyz) 重合, x 轴沿纵向, y 轴沿横向. 继续绕 z 轴顺时针转过 δ 角后的位置为刚体的中心主轴坐标系 $(O_c-x_py_pz_p)$(图 12.11). α,β,ϕ 为表示 (O_c-xyz) 姿态的卡尔丹角, 但不同于 12.3 节的转动次序. 各坐标系之间的关系为

$$(O_c-\xi\eta\zeta)\ \underset{\zeta,z_0}{\overset{\phi}{\longrightarrow}}\ (O_c-x_0y_0z_0)\ \underset{x_0,x_1}{\overset{\alpha}{\longrightarrow}}\ (O_c-x_1y_1z_1)$$

$$\underset{y_1,y}{\overset{\beta}{\longrightarrow}}\ (O_c-xyz)\ \underset{z,z_p}{\overset{-\delta}{\longrightarrow}}\ (O_c-x_py_pz_p)$$

设刚体的稳态运动为绕 ζ 轴的角速度为 ω_0 的匀速转动. 受扰后刚体绕水平轴作微幅摆动. α,β 为无限小量, 仅保留其一次项, 则 $\dot{\phi}=\omega_0$. 刚体角速度 ω 在 (O_c-xyz)

① 凯尔特石 (Celtic stone) 的得名源于 19 世纪考古学家对凯尔特和埃及史前石器的发现. 也称为抖退石 (rattleback) 或振动石 (wobblestone). 凯尔特石的理论研究始于 1890 年, 此后涌现的大量研究论文提出各种理论解释, 包括将桌面视为理想光滑的错误解释. 马格努斯 (1971) 正确指出摩擦力的关键作用, 利用线性摩擦规律作了分析. 前苏联学者着重研究滚动的非轴对称刚体的稳定性. 凯恩 (1981) 等对凯尔特石的运动过程进行了数值仿真.

中的投影为

$$\omega_x = \dot{\alpha} - \omega_0 \beta, \ \ \omega_y = \dot{\beta} + \omega_0 \alpha, \ \ \omega_z = \omega_0 \tag{12.4.1}$$

图 12.10　平面上滚动的非轴对称刚体

图 12.11　参考坐标系

设刚体的质量为 m, 相对 $(O_c - x_p y_p z_p)$ 各轴的主惯性矩为 A_0, B_0, C_0, 满足 $C_0 > B_0 > A_0$. 刚体相对 $(O_c - xyz)$ 各轴的惯性矩 A, B, C 和惯性积 D 分别为

$$\begin{aligned} A &= A_0 \cos^2 \delta + B_0 \sin^2 \delta \\ B &= A_0 \sin^2 \delta + B_0 \cos^2 \delta \\ C &= C_0, \ \ D = -(B_0 - A_0) \cos \delta \sin \delta \end{aligned} \tag{12.4.2}$$

利用动量矩计算公式 (2.2.10), 刚体相对质心 O_c 的动量矩 $\boldsymbol{H}$ 为

$$\boldsymbol{H} = (A\omega_1 - D\omega_2)\,\boldsymbol{i} + (B\omega_2 - D\omega_1)\,\boldsymbol{j} + C\omega_0 \boldsymbol{k} \tag{12.4.3}$$

设稳态运动状态下 z 轴垂直, 刚体与平面的接触点 Q 与底部曲面的曲率中心 O_1(纵向) 和 O_2(横向) 均与过质心的主轴 z 共线. 受扰后接触点移至 P 处, $O_i\,(i=1,2)$ 至 O_c 和 P 点的矢径分别为 $\boldsymbol{l}_i$ 和 $\boldsymbol{r}_i\,(i=1,2)$, 其中 r_1, r_2 为底部曲面的纵向和横向曲率半径, $h=r_i-l_i\ \ (i=1,2)$ 为 z 轴垂直时刚体的质心高度. 设刚体质心低于底部曲面的曲率中心, 满足 $r_2>r_1>h$. 设刚体在粗糙平面上的运动为纯滚动, 则

$$\overrightarrow{QP}=r_1\beta\boldsymbol{i}-r_2\alpha\boldsymbol{j} \tag{12.4.4}$$

P 点相对质心 O_c 的矢径 $\boldsymbol{r}_c$ 为

$$\boldsymbol{r}_c=\overrightarrow{O_cQ}+\overrightarrow{QP}=r_1\beta\boldsymbol{i}-r_2\alpha\boldsymbol{j}-h\boldsymbol{k} \tag{12.4.5}$$

利用 P 点的滑动速度为零的条件计算受扰后的质心速度 $\boldsymbol{v}_c$, 得到

$$\boldsymbol{v}_c=-\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_c=\left(h\dot{\beta}-\omega_0 l_2\alpha\right)\boldsymbol{i}-\left(h\dot{\alpha}+\omega_0 l_1\beta\right)\boldsymbol{j} \tag{12.4.6}$$

将上式对 t 求导, 考虑动坐标系 (O_c-xyz) 的牵连角速度 $\boldsymbol{\omega}$, 得到质心加速度 $\dot{\boldsymbol{v}}_c$

$$\dot{\boldsymbol{v}}_c=\left(h\ddot{\beta}+\omega_0 b_2\dot{\alpha}+\omega_0^2 l_1\beta\right)\boldsymbol{i}-\left(h\ddot{\alpha}-\omega_0 b_1\dot{\beta}+\omega_0^2 l_2\alpha\right)\boldsymbol{j} \tag{12.4.7}$$

P 点处的法向约束力 $\boldsymbol{N}$ 和摩擦力 $\boldsymbol{F}$ 可根据动量定理导出, 得到

$$\boldsymbol{N}=mg\boldsymbol{k}_0,\quad \boldsymbol{F}=m\dot{\boldsymbol{v}}_c \tag{12.4.8}$$

计算外力对质心的力矩 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}_c\times(\boldsymbol{N}+\boldsymbol{F})$, 其在 (O_c-xyz) 中的投影为

$$\begin{aligned}
M_x&=-mh\left[h\ddot{\alpha}-\omega_0 b_1\dot{\beta}-\left(g+\omega_0^2 l_2\right)\alpha\right]\\
M_y&=-mh\left[h\ddot{\beta}+\omega_0 b_2\dot{\alpha}-\left(g+\omega_0^2 l_1\right)\beta\right]\\
M_z&=0
\end{aligned} \tag{12.4.9}$$

代入动量矩定理 (2.2.27), 导出非轴对称刚体的动力学方程, 以矩阵形式表示为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{G}\dot{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}=0 \tag{12.4.10}$$

各矩阵定义为

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix},\ \boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}A_* & -D\\ -D & B_*\end{pmatrix},\ \boldsymbol{G}=\begin{pmatrix}0 & -G_1\\ G_2 & 0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{K}=\begin{pmatrix}K_1 & -D\omega_0^2\\ -D\omega_0^2 & K_2\end{pmatrix}\\
A_*=A+mh^2,\ B_*=B+mh^2, G_i=\left(A+B-C+mhb_i\right)\omega_0\\
K_1=mgl_2+\left(C-A+mhl_2\right)\omega_0^2,\quad K_2=mgl_1+\left(C-B+mhl_1\right)\omega_0^2
\end{gathered} \tag{12.4.11}$$

其中 $b_i=r_i-2h\ \ (i=1,2)$.

12.4.2　旋转刚体的摆动稳定性

方程组 (12.4.10) 的特征方程为

$$a_0 s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4 = 0 \tag{12.4.12}$$

系数 $a_i\,(i=0,1,\cdots,4)$ 为

$$\begin{aligned} &a_0 = A_* B_* - D^2,\ \ a_1 = D\omega_0 mh\,(r_2 - r_1) \\ &a_2 = A_* K_2 + B_* K_1 + G_1 G_2 - 2D^2\omega_0^2 \\ &a_3 = D\omega_0^3 mh\,(r_2 - r_1)\,,\ a_4 = K_1 K_2 - D^2\omega_0^4 \end{aligned} \tag{12.4.13}$$

根据劳斯–赫尔维茨判据, 方程组 (12.4.10) 零解的渐近稳定性条件为

$$a_i > 0\ \ (i = 0,\cdots,4) \tag{12.4.14a}$$

$$a_3\,(a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_1^2 a_4 > 0 \tag{12.4.14b}$$

由于 $D<0$, $r_2>r_1$, 若 $\omega_0<0$ 则 a_1, a_3 为正值, 式 (12.4.15a) 的所有条件均得到满足. 若 $\omega_0>0$, 则 a_1, a_3 为负值, 摆动必不稳定. 从而证明, 粗糙平面上非轴对称刚体的不同旋转方向对应于不同的摆动稳定性. 顺时针转动刚体的摆动满足渐近稳定的必要条件, 逆时针转动刚体必伴随幅度不断增大的剧烈摆动.

12.4.3　刚体摆动引起的摩擦力矩

为分析地面摩擦力对刚体运动性态的影响, 将不旋转刚体的摆动规律作为零次近似, 计算摩擦力及力矩. 令方程组 (12.4.10) 中 $\omega_0=0$, 简化为

$$A_*\ddot{\alpha} - D\ddot{\beta} + mgl_1\alpha = 0 \tag{12.4.15a}$$

$$B_*\ddot{\beta} - D\ddot{\alpha} + mgl_2\beta = 0 \tag{12.4.15b}$$

令特征方程 (12.4.12) 中 $a_1=a_3=0$, 特征值的纯虚根条件除 $a_i>0\ \ (i=0,2,4)$ 恒满足以外, 另一条件亦得到满足

$$a_2^2 - 4a_0 a_4 = m^2 g^2\left[(B_* l_1 - A_* l_2)^2 + 4D^2 l_1 l_2\right] > 0 \tag{12.4.16}$$

表明不旋转刚体的受扰运动为等幅摆动. 由于 $D^2 \ll A_* B_*$, 仅保留 D^2/A_*B_* 的一次项时, 令 $s=\mathrm{i}\nu$, 解出摆动的固有角频率 $\nu=\nu_i\ (i=1,2)$

$$\begin{aligned} \nu_1^2 &= \frac{mgl_1}{A_*}\left[1 + \frac{D^2 l_1}{A_*\,(B_* l_1 - A_* l_2)}\right] \\ \nu_2^2 &= \frac{mgl_2}{B_*}\left[1 - \frac{D^2 l_2}{B_*\,(B_* l_1 - A_* l_2)}\right] \end{aligned} \tag{12.4.17}$$

设摆动角的幅值为 θ, 摆动轴相对 Ox_0 轴的倾角为 ψ, 将方程组 (12.4.15) 的解写作

$$\alpha = \theta\cos\psi\sin\nu t,\quad \beta = \theta\sin\psi\sin\nu t \tag{12.4.18}$$

由于狭长形刚体的摆动接近于绕纵轴即 x 轴进行, 根据刚体绕纵轴摆动的方程 (12.4.15a) 和对应的角频率 ν_1 计算摆动轴倾角 ψ, 由于接近半椭球形的狭长刚体满足 $B_*/A_* > l_2/l_1$, 导出

$$\tan\psi = \frac{Dl_1}{B_*l_1 - A_*l_2} < 0 \tag{12.4.19}$$

表明摆动轴位于 (x,y) 坐标面的第 2, 4 象限, 即最小惯性矩主轴 x_p 轴所在的象限.

刚体的摆动引起 P 点处的切向摩擦力 $\boldsymbol{F} = m\ddot{\boldsymbol{r}}$, 其在 $(O - x_0y_0z_0)$ 中的投影式为

$$\boldsymbol{F} = mh\left(\ddot{\beta}\boldsymbol{i}_0 - \ddot{\alpha}\boldsymbol{j}_0\right) \tag{12.4.20}$$

接触点 P 相对固定点 O_0 的矢径 $\boldsymbol{r}_{\rm P} = \overrightarrow{O_0P}$ 为

$$\boldsymbol{r}_{\rm P} = r_2\beta\boldsymbol{i}_0 - r_1\alpha\boldsymbol{j}_0 \tag{12.4.21}$$

摩擦力对固定点 O_0 的力矩 $\boldsymbol{M}$ 为 α,β 的二次微量

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r}_{\rm P}\times\boldsymbol{F} = mh\left(r_1\alpha\ddot{\beta} - r_2\beta\ddot{\alpha}\right)\boldsymbol{k}_0 \tag{12.4.22}$$

将式 (12.4.20), (12.4.21) 代入式 (12.4.22), 在每个摆动周期内平均化, 导出摩擦力矩的平均值

$$\langle M\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M\mathrm{d}(\nu t) = \frac{1}{4}mh(r_2 - r_1)\theta^2\nu^2\sin 2\psi \tag{12.4.23}$$

可见周期摆动引起的摩擦力矩平均值不为零, 其方向取决于 ψ, 即摆动轴在 (x,y) 坐标面内的方位. 前面已经证明摆动轴位于 (x,y) 坐标面的第 2, 4 象限, 则 $\sin 2\psi < 0$, 即 $\langle M\rangle < 0$. 摩擦力矩推动刚体产生绕垂直轴的顺时针方向角加速度, 从而解释了叩击静止刚体引起的摆动转化为绕垂直轴转动的现象. 逆时针方向旋转的刚体在顺时针方向摩擦力矩推动下必将减速, 停转, 最终转变为顺时针方向旋转. 若 $\delta < 0$, 最小惯性矩主轴 $x_{\rm p}$ 位于 (x,y) 坐标面的第 1, 3 象限, 则上述过程相反.

以上分析对凯尔特石现象提供了简明的物理解释: 刚体朝特定方向的旋转引起剧烈的摆动, 摆动引起的摩擦力矩推动刚体改变旋转方向产生倒退现象.

第 13 章　陀螺的混沌运动

在陀螺仪测试过程中, 常观察到与进动和章动等规则运动相伴随的无规则运动. 传统认为, 这种被称为陀螺仪随机漂移的现象来源于轴承摩擦、气体介质扰动等外界随机因素. 由于非线性科学在 20 世纪内取得的重大进展, 人类对混沌现象的认知逐渐深入. 混沌理论的研究表明, 不可积的确定性系统存在对于初始条件极端敏感的内禀随机性. 框架支承的自由陀螺仪仅在轴承为理想约束, 质心与支承中心重合, 转子匀速旋转等理想条件下, 其运动方程方为可积. 而理想条件的任何微小偏离均可能导致混沌运动. 本章以框架陀螺仪由于驱动的周期性扰动和基座匀速转动等因素导致的混沌运动以及陀螺体在转子存在偏心情况下出现的混沌运动为例, 说明陀螺仪的随机漂移也可来源于内禀随机性, 而不仅是外在随机因素作用的结果. 庞加莱截面图是直观地识别混沌运动的几何工具. 对于低维动力学系统, 还可用解析方法预测混沌的发生. 使用塞莱–安道耶状态变量可使刚体定点运动的数学模型降维, 有利于解析预测. 解析预测方法的理论根据和具体计算属于非线性动力学的专门问题, 未列入本章内容. 有兴趣的读者可参阅相关的文献.

13.1　混沌运动概述

13.1.1　内禀随机性

陀螺仪是遵循牛顿力学基本原理的确定性系统, 其运动规律由刚体的动力学微分方程, 即欧拉方程完全确定. 初始条件确定以后, 微分方程的唯一解完全确定陀螺的运动进程. 牛顿力学基本原理, 包括陀螺力学在内, 其正确性已被人类无数次实践所证实而毋庸置疑. 在陀螺仪的测试过程中, 常观测到与进动和章动等规则运动相伴随的无规则运动. 这种无规则的随机运动称为陀螺的**随机漂移**. 通常认为随机漂移来源于外界的各种随机因素, 如轴承的摩擦、气体介质的扰动等. 但随着混沌理论研究的深入, 人们发现, 外在随机性并非随机漂移的唯一来源, 因为陀螺仪本身存在着**内禀随机性**. 实验观测到的陀螺随机漂移是外在随机性和内禀随机性的综合表现. 陀螺基于内禀随机性所产生的无规则往复运动即陀螺的**混沌运动**.

混沌运动是由确定性系统产生的一种特殊的无规则的往复运动. 其特点是对于初始条件极端敏感而具有内禀随机性和长期预测的不可能性.

内禀随机性来源于对初始条件的极端敏感性, 这种敏感性存在于不可积的非线

性微分方程. 描述重力作用下刚体运动的欧拉方程是非线性微分方程, 仅在 3 种特殊情况下存在解析积分, 即第 2 章中叙述的欧拉, 拉格朗日和科瓦列夫斯卡娅等 3 种可积情况. 除这 3 种特殊情况以外, 欧拉方程均为不可积. 因此一般情况下的刚体定点运动存在内禀随机性.

13.1.2　状态变量和庞加莱映射

依据动力学原理建立的描述机械系统运动过程的微分方程组称为**动力学系统**. 根据 3.4 节的分析, 具有 n 个自由度的动力学系统的运动状态可用 n 个广义坐标 $q_j(j=1,2,\cdots,n)$ 和相应的广义速度 $\dot{q}_j(j=1,2,\cdots,n)$ 或广义动量 $p_j(j=1,2,\cdots,n)$ 描述. 描述动力学系统运动状态的上述 $2n$ 个变量称为**状态变量**[①].

作定点运动刚体的欧拉方程为自由度 $n=3$ 的动力学系统. 用欧拉角表达时, 状态变量为

$$\psi(t), \vartheta(t), \varphi(t), \dot{\psi}(t), \dot{\vartheta}(t), \dot{\varphi}(t) \tag{13.1.1}$$

如写作哈密顿正则方程形式, 状态变量改为

$$\psi(t), \vartheta(t), \varphi(t), p_{\psi}(t), p_{\vartheta}(t), p_{\varphi}(t) \tag{13.1.2}$$

状态变量所张成的 $2n$ 维空间称为系统的**状态空间或相空间**. 每个时刻系统的运动状态与相空间中的点相对应, 称为**相点**. 相点在相空间中随时间 t 的位置变化反映出系统的运动过程, 所描绘出的轨迹称为**相轨迹**. 根据相轨迹曲线的几何特征可以定性地判断系统的运动性态. 不难看出, 静止状态的相轨迹为不动的点, 周期运动的相轨迹为封闭曲线. 与无规则往复运动对应的相轨迹是迂回曲折永不封闭的曲线. 从状态变量中选择一对变量组成二维的**相平面**, 对应的相轨迹为平面曲线, 便于用图形直观地表示.

当周期运动的周期很长时, 仅根据相轨迹图难以区分周期运动和混沌运动. 不断延续永不重叠的相轨迹曲线在相空间或相平面内模糊一片而难以辨认. 为此可采用称做**庞加莱映射**的几何方法代替相轨迹图. 所谓庞加莱映射是在相空间 (或相平面) 内每隔一个时间间隔取相轨迹的一个点, 而将其余的相轨迹隐去. 于是连续的相轨迹曲线转变为不连续的点集. 一般采用外激励的周期作为映射的时间间隔. 可以想像, 周期运动的庞加莱图是单个或有限个孤立点, 而混沌运动的庞加莱图是无数个无规则分布永不重叠的点集. 因此可将庞加莱图作为识别混沌性态的直观工具. 混沌性态也可以根据测试数据判断, 有多种数值识别方法, 如李雅普诺夫指数等. 其具体计算方法可参阅非线性动力学的有关文献.

---

① 此处对状态变量的定义更具普遍性. 8.2.1 节和 13.2.1 节中叙述的塞莱–安道耶状态变量为特殊形式的状态变量.

13.1.3 关于混沌的解析预测

对于确定的动力学系统, 预测其运动在何种条件下出现混沌有重要的实际意义. 但这方面的理论研究目前还很不成熟. 既没有对非线性系统普遍适用的预测方法, 也不能建立出现混沌的充分条件. 对于单自由度的低维系统, 最常用的解析预测方法为 1963 年梅利尼科夫 (V.K. Melnikov) 提出的方法. 这种方法仅能判断受小扰动作用的二维可积系统. 根据受扰状态下系统的相轨迹特征, 构造特殊定义的梅利尼科夫函数. 当此函数存在简单零点时, 可以推测混沌运动存在的可能性. 对于多自由度的高维系统, 则必须变换为低维系统讨论. 例如, 下节中叙述的塞莱–安道耶状态变量就能对刚体定点运动的数学模型起降维作用. 梅利尼科夫方法的理论根据和具体计算属于非线性动力学的专门问题, 可参阅相关的文献.

13.2 刚体定点运动的混沌性态

13.2.1 塞莱–安道耶状态变量

塞莱–安道耶状态变量是表示刚体运动状态的一种状态变量. 类似的状态变量已在第 9 章中用于描述转子陀螺的姿态, 但仅针对轴对称刚体的特殊情形, 且角度坐标 α,β 不同于此处的定义. 本节给出塞莱–安道耶状态变量更具普遍性的定义.

设轴对称刚体绕固定点 O 运动. 以 O 为原点建立惯性坐标系 $(O-\xi\eta\zeta)$ 和动量矩坐标系 $(O-XYZ)$, 后者以刚体相对 O 点的动量矩矢量 $\boldsymbol{H}$ 的方向为 Z 轴. 设 $(O-\xi\eta\zeta)$ 绕 ζ 轴转动 β 角后的位置为 $(O-\xi_1\eta_1\zeta_1)$, 再绕 ξ_1 轴转动 α 角后的位置为 $(O-XYZ)$. α,β 为动量矩矢量 $\boldsymbol{H}$ 相对 $(O-\xi\eta\zeta)$ 位置的角度坐标. 坐标系之间的关系为 (图 13.1)

$$(O-\xi\eta\zeta)\ \underset{\zeta,\zeta_1}{\overset{\beta}{\rightarrow}}\ (O-\xi_1\eta_1\zeta_1)\ \underset{\xi_1,X}{\overset{\alpha}{\rightarrow}}\ (O-XYZ)$$

设 $(O-xyz)$ 为与刚体固结的主轴坐标系, 其相对动量矩坐标系 $(O-XYZ)$ 的姿态以欧拉角 ψ,ϑ,φ 表示, 转动顺序为 (图 13.2)

$$(O-XYZ)\ \underset{Z,Z_1}{\overset{\psi}{\rightarrow}}\ (O-X_1Y_1Z_1)\ \underset{X_1,x_1}{\overset{\vartheta}{\rightarrow}}\ (O-x_1y_1z_1)\ \underset{z_1,z}{\overset{\varphi}{\rightarrow}}\ (O-xyz)$$

以上利用动量矩坐标系定义的 5 个角度坐标 $\alpha,\beta,\psi,\vartheta,\varphi$ 与动量矩模 H 共 6 个变量定义为**塞莱–安道耶状态变量**[①].

① 在塞莱–安道耶的原始定义中, 状态变量 $H,\alpha,\beta,\psi,\vartheta,\varphi$ 分别以 G,δ,h,g,σ,l 符号表示.

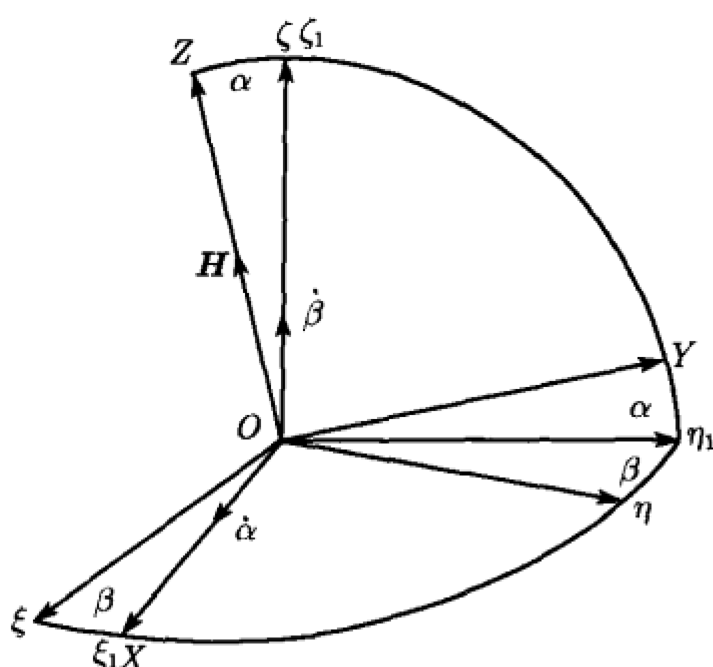


图 13.1 动量矩坐标系与惯性坐标系

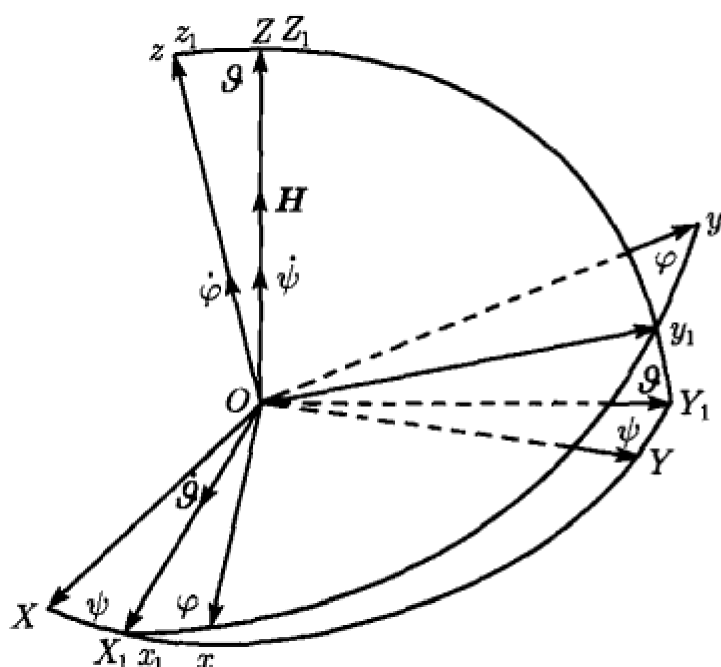


图 13.2 刚体主轴坐标系与动量矩坐标系

计算刚体的绝对角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 在转子坐标系 $(O-xyz)$ 中的投影 ω_x, ω_y, ω_z, 得到

$$\begin{aligned}\omega_x =&\dot\psi \mathrm{s}\vartheta \mathrm{s}\varphi+\dot\vartheta \mathrm{c}\varphi+\dot\alpha\left(\mathrm{c}\psi \mathrm{c}\varphi-\mathrm{c}\vartheta \mathrm{s}\psi \mathrm{s}\varphi\right)\\ &+\dot\beta\left[\mathrm{s}\alpha\left(\mathrm{s}\psi \mathrm{c}\varphi+\mathrm{c}\vartheta \mathrm{c}\psi \mathrm{s}\varphi\right)+\mathrm{c}\alpha \mathrm{s}\vartheta \mathrm{s}\varphi\right]\end{aligned} \tag{13.2.1a}$$

$$\begin{aligned}\omega_y =&\dot\psi \mathrm{s}\vartheta \mathrm{c}\varphi-\dot\vartheta \mathrm{s}\varphi-\dot\alpha\left(\mathrm{c}\psi \mathrm{s}\varphi+\mathrm{c}\vartheta \mathrm{s}\psi \mathrm{c}\varphi\right)\\ &+\dot\beta\left[\mathrm{s}\alpha\left(\mathrm{c}\vartheta \mathrm{c}\psi \mathrm{c}\varphi-\mathrm{s}\psi \mathrm{s}\varphi\right)+\mathrm{c}\alpha \mathrm{s}\vartheta \mathrm{c}\varphi\right]\end{aligned} \tag{13.2.1b}$$

$$\omega_z =\dot\varphi+\dot\psi \mathrm{c}\vartheta+\dot\alpha \mathrm{s}\psi \mathrm{s}\vartheta+\dot\beta\left(\mathrm{c}\alpha \mathrm{c}\vartheta-\mathrm{s}\alpha \mathrm{s}\vartheta \mathrm{c}\psi\right) \tag{13.2.1c}$$

其中 s,c 为 sin, cos 的简写符号. 设 A,B,C 为刚体相对 $(O-xyz)$ 各轴的主惯性

矩, 将刚体相对 O 点的动量矩 $\boldsymbol{H}$ 向 $(O-xyz)$ 投影, 得到

$$\begin{aligned} H_x &= A\omega_x = H\sin\vartheta\sin\varphi \\ H_y &= B\omega_y = H\sin\vartheta\cos\varphi \\ H_z &= C\omega_z = H\cos\vartheta \end{aligned} \tag{13.2.2}$$

式 (13.2.1) 代入式 (13.2.2) 后成为限制状态变量的 3 个非完整约束条件. 因此描述刚体定点运动的 6 个变量 $H,\alpha,\beta,\psi,\vartheta,\varphi$ 中只有 3 个是独立的. 列写刚体运动的拉格朗日函数 L

$$L = \frac{1}{2}\left(A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2\right) - V \tag{13.2.3}$$

其中 V 为势能. 1967 年德普利 (Deprit) 选择 φ,ψ,β 为 3 个独立变量, 其对应的广义动量 p_ψ,p_φ,p_β 可利用式 (13.2.1), (13.2.2) 化简为

$$\begin{aligned} p_\psi &= \frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}} = H \\ p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = H\cos\vartheta = H_z \\ p_\beta &= \frac{\partial L}{\partial\dot{\beta}} = H\cos\alpha = H_\zeta \end{aligned} \tag{13.2.4}$$

从而证明, p_ψ 等于动量矩 $\boldsymbol{H}$ 的模, p_φ,p_β 分别等于 $\boldsymbol{H}$ 矢量在 z 和 ζ 轴上的投影. $\varphi,\psi,\beta,H,H_z,H_\zeta$ 可作为描述刚体姿态的 6 个正则变量, 从而使刚体的定点运动过程在六维相空间 $(\varphi,\psi,\beta,H,H_z,H_\zeta)$ 中得到反映. 利用式 (13.2.3), (13.2.4) 列写刚体的哈密顿函数 $\mathscr{H}$, 其中的 $H\sin\vartheta$ 以 $\sqrt{H^2-H_z^2}$ 代替, 得到

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin^2\varphi}{A} + \frac{\cos^2\varphi}{B}\right)\left(H^2 - p_\varphi^2\right) + \frac{p_\varphi^2}{2C} + V(\varphi,\psi,\beta) \tag{13.2.5}$$

与广义坐标 φ,ψ,β 对应的 6 个正则方程完全确定刚体定点运动规律

$$\dot{q}_j = \frac{\partial\mathscr{H}}{\partial p_j},\quad \dot{p}_j = -\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial q_j}\quad (j=1,2,3) \tag{13.2.6}$$

其中

$$\begin{aligned} &q_1=\varphi,\ \ q_2=\psi,\ \ q_3=\beta \\ &p_1=p_\varphi,\ \ p_2=p_\psi,\ \ p_3=p_\beta \end{aligned} \tag{13.2.7}$$

13.2.2 欧拉情形刚体定点运动

对于无力矩状态的特殊情形, 即欧拉情形, 略去上式中的 V, 令 H 为常值, 哈密顿函数 (13.2.5) 中仅含自旋角 φ 和对应的广义动量 $p_\varphi=H_z$. 于是欧拉情形刚

体定点运动转化为单自由度动力学系统. 相应的哈密顿正则方程为

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p_\varphi} = p_\varphi \left(\frac{1}{C} - \frac{\sin^2 \varphi}{A} - \frac{\cos^2 \varphi}{B} \right) \tag{13.2.8a}$$

$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \varphi} = \frac{1}{2} \left(H^2 - p_\varphi^2 \right) \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A} \right) \sin 2\varphi \tag{13.2.8b}$$

由于哈密顿函数不显含时间 t, 存在雅可比积分, 即哈密顿函数 $\mathscr{H}$ 为常值. 将方程 (13.2.8b) 和 (13.2.8a) 相除消去时间微分, 化作一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}p_\varphi}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{C(A-B)\left(H^2 - p_\varphi^2 \right) \sin 2\varphi}{p_\varphi \left[AB - C\left(A\cos^2 \varphi + B\sin^2 \varphi \right) \right]} \tag{13.2.9}$$

方程 (13.2.9) 确定 (φ, p_φ) 相平面内的相轨迹 (图 13.3). 在 φ 的 $[0, \pi]$ 区间内相轨迹存在 3 个奇点 S_1, S_2 和 S_3

$$\begin{aligned} S_1: &\quad \varphi_\mathrm{s} = 0, \qquad p_{\varphi\mathrm{s}} = 0 \\ S_2: &\quad \varphi_\mathrm{s} = \pi/2, \quad p_{\varphi\mathrm{s}} = 0 \\ S_3: &\quad \varphi_\mathrm{s} = \pi, \qquad p_{\varphi\mathrm{s}} = 0 \end{aligned} \tag{13.2.10}$$

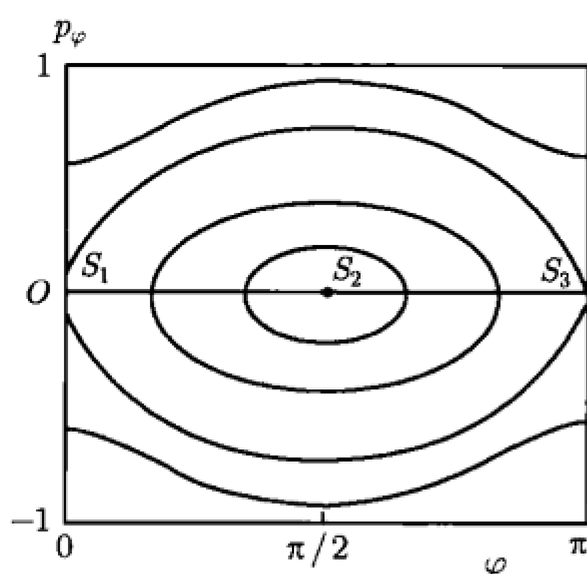


图 13.3　(φ, p_φ) 相平面内的相轨迹

不失一般性, 设 $A > B > C$ 或 $A < B < C$, 利用方程 (13.2.9) 的一次近似式判断, S_1, S_3 为鞍点, S_2 为中心. $p_\varphi = 0$ 即 $H_z = 0$ 要求 $\vartheta = \pi/2$, 则鞍点 S_1, S_3 对应于刚体绕 Oy 轴正方向或负方向的不稳定永久转动, 中心 S_2 对应于绕 Ox 轴的稳定永久转动. 于是从另一途径证明了 2.3.3 节的结论: 绕最大或最小惯性矩主轴的永久转动稳定, 绕中间惯性矩主轴的永久转动不稳定. 若刚体为轴对称, 令 $A = B$, 哈密顿函数 (13.2.5) 简化为

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2A} \left(H^2 - p_\varphi^2 \right) + \frac{p_\varphi^2}{2C} \tag{13.2.11}$$

由于函数 $\mathscr{H}$ 不显含 φ, 对应的循环积分要求 p_φ 守恒, 即 ϑ 守恒. 刚体作章动角为常值的自由规则进动.

将刚体的量纲为一的主惯性矩 A, B, C 分别取为 1.5, 1.0, 0.75, 令 $H = 0.5$, $\mathscr{H} = 0.7$, 用龙格–库塔方法从不同初始条件出发, 对正则方程 (13.2.9) 作数值积分. 利用解出的 $\varphi(t)$ 和 $p_\varphi(t)$, 以 2π 为周期在 (φ, p_φ) 相平面内构成的庞加莱图, 如图 13.4 所示. 图中的点集沿图 13.3 的相轨迹有序排列, 所形成的两种类型不动点即上述奇点 $S_i\,(i = 1, 2, 3)$.

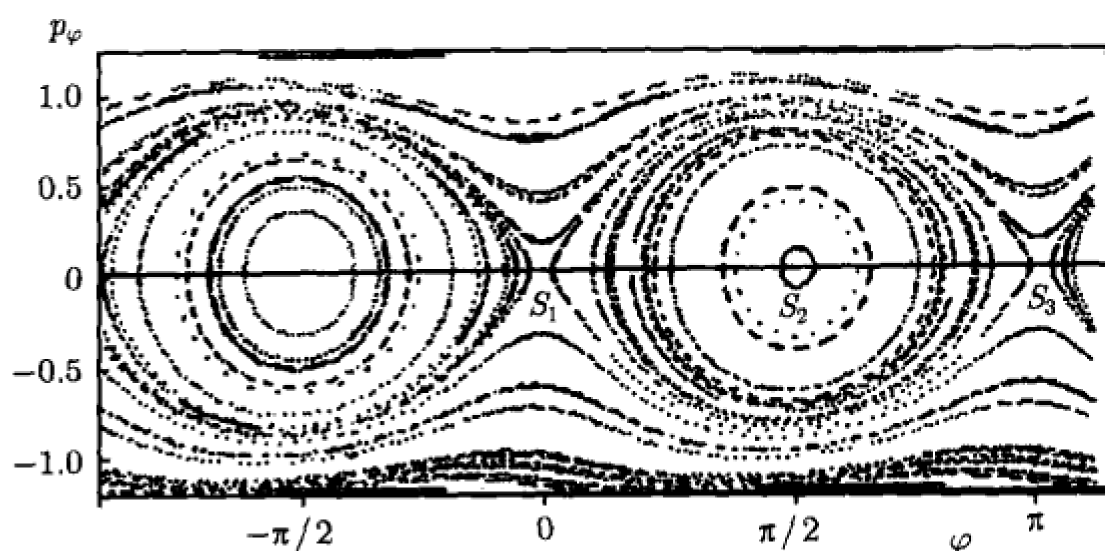


图 13.4 欧拉情形刚体定点运动的庞加莱图 (引自文献 [79])

13.2.3 径向偏心刚体的定点运动

设刚体的质心沿 x 轴偏离定点 l 距离, 由于重力矩的出现, 上述简化的单自由度系统已不可用. 将表示刚体姿态的 ψ, ϑ, φ 改定义为 $(O - xyz)$ 相对惯性坐标系 $(O - \xi\eta\zeta)$ 的欧拉角, 设重力 mg 沿 ζ 轴的负方向, 列出刚体的欧拉方程

$$A\dot{\omega}_x + (C - B)\omega_y\omega_z = 0 \tag{13.2.12a}$$

$$B\dot{\omega}_y + (A - C)\omega_z\omega_x = mgl\cos\vartheta \tag{13.2.12b}$$

$$C\dot{\omega}_z + (B - A)\omega_x\omega_y = mgl\sin\vartheta\cos\psi \tag{13.2.12c}$$

其中

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\psi}\sin\vartheta\sin\varphi + \dot{\vartheta}\cos\varphi \\ \omega_y &= \dot{\psi}\sin\vartheta\cos\varphi - \dot{\vartheta}\sin\varphi \\ \omega_z &= \dot{\psi}\cos\vartheta + \dot{\varphi} \end{aligned} \tag{13.2.13}$$

欧拉方程 (13.2.12) 不可积. 将量纲为一的距离取为 1.0, 量纲为一的重力 mg 取为 0.5, 利用数值积分得到的庞加莱图如图 13.5 所示. 图中的鞍点附近出现无规则分

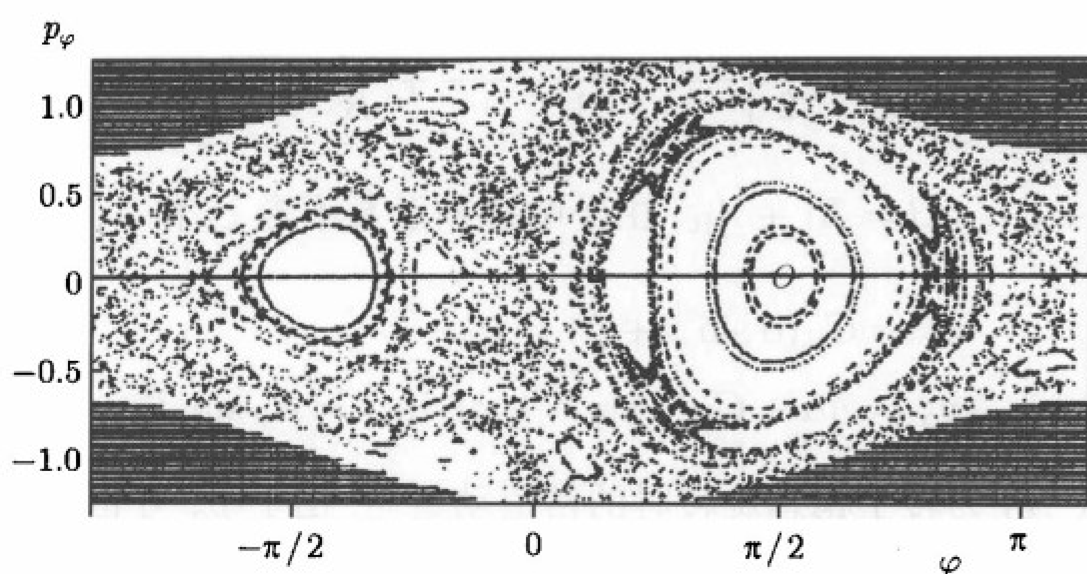


图 13.5　质心偏离定点的刚体定点运动的庞加莱图 (引自文献 [79])

布的点集, 显示出刚体运动的混沌性态. 从而证实欧拉方程不可积情形对应的运动为混沌运动.

虽然自由陀螺或陀螺摆的理想模型属于可积的欧拉情形和拉格朗日情形. 但考虑到陀螺仪并非仅受重力作用, 各种形式的支承系统和基座牵连运动的存在更使数学模型复杂化, 其运动规律与欧拉情形和拉格朗日情形的解析积分存在差别, 更何况比自由陀螺或陀螺摆更复杂的陀螺装置. 因此一般情况下, 陀螺运动存在内禀随机性是不言而喻的.

仔细观察庞加莱图, 还可发现在模糊一片的点集中存在着类似岛屿的某种规律性结构. 这种无序中的有序现象是内禀随机性区别于外在随机性的重要属性.

13.3　框架陀螺的混沌运动

13.3.1　框架陀螺的理想状态

框架支承陀螺仪由由外环 B_0、作为内环的陀螺壳体 B_1 和转子 B_2 组成 (见图 3.3). 以框架和转子的转轴交点 O 为原点, 建立基座坐标系 $(O-\xi\eta\zeta)$ 和各分体 $\mathrm{B}_j\,(j=0,1,2)$ 的连体坐标系 $(O-x_jy_jz_j)$. 外环、内环和转子的转角 α,β,φ 是确定转子相对基座位置的卡尔丹角, 如 3.2.1 节的定义. 各分体的主惯性矩亦采用 3.2.1 节规定的符号. 设陀螺除外环约束力矩以外无外力矩作用, 以 α,β,φ 为广义坐标, $p_\alpha,p_\beta,p_\varphi$ 为对应的广义动量. 为使计算适当简化, 设陀螺的质量几何满足

$$A_1+A_{\mathrm{R}}-C_1=0 \tag{13.3.1}$$

则式 (3.2.15) 中定义的 $A\,(\beta)$ 为常值. 系统的哈密顿函数如式 (3.5.6), 略去其中的常值势能 V. 写作

$$\mathscr{H}=\frac{1}{2}\left[\frac{(p_\alpha-p_\varphi\sin\beta)^2}{A}+\frac{p_\beta^2}{B}+\frac{p_\varphi^2}{C_{\rm R}}\right] \tag{13.3.2}$$

其中 $A=A_0+C_1$, $B=B_1+A_{\rm R}$. 由于哈密顿函数不含 φ 和 α, 有以下循环积分

$$p_\varphi=C_{\rm R}(\dot\alpha\sin\beta+\dot\varphi)=H_0 \tag{13.3.3}$$

$$p_\alpha=A\dot\alpha+C_{\rm R}(\dot\alpha\sin\beta+\dot\varphi)\sin\beta=H_0\sin\beta^* \tag{13.3.4}$$

其中积分常数 H_0 为转子稳态旋转时的常值动量矩. 由于 p_α 守恒, 常数 β^* 由内环转角和外环角速度的初值 β_0 和 $\dot\alpha_0$ 确定

$$\sin\beta^*=\sin\beta_0+(A/H_0)\dot\alpha_0 \tag{13.3.5}$$

H_0 足够大时, β^* 与 β_0 的值接近. 循环积分 (13.3.3), (13.3.4) 的存在使系统的自由度减为 1, 以 β, p_β 为独立变量列出正则方程

$$\dot p_\beta=-\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\beta}=\frac{\nu^2}{B}\cos\beta(\sin\beta^*-\sin\beta) \tag{13.3.6a}$$

$$\dot\beta=\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial p_\beta}=\frac{p_\beta}{B} \tag{13.3.6b}$$

其中参数 $\nu^2=H_0^2B/A$. 将方程 (13.3.6a) 和 (13.3.6b) 相除, 得到 (β,p_β) 相平面内的微分方程

$$\frac{{\rm d}p_\beta}{{\rm d}\beta}=\frac{\nu^2\cos\beta(\sin\beta^*-\sin\beta)}{p_\beta} \tag{13.3.7}$$

上式与 7.3.1 节基于欧拉方程导出的方程 (7.3.6) 完全相同, 仅其中变量 y 改记为 p_β. 内环无初始角速度时 p_β 的初值为零, 从方程 (13.3.6) 积分得到的相轨迹方程也与式 (7.3.8) 相同

$$p_\beta^2+\nu^2(\sin\beta^*-\sin\beta)^2=AB\dot\alpha_0^2 \tag{13.3.8}$$

根据 7.3.1 节的分析, 在 β 的 $[-\pi/2,\pi/2]$ 区间内相轨迹存在一个中心 S_1 和两个鞍点 S_2, S_3

$$\begin{aligned}
S_1:&\quad \beta_{\rm s}=\beta^*,\ \ p_{\beta{\rm s}}=0\\
S_2:&\quad \beta_{\rm s}=\pi/2,\ \ p_{\beta{\rm s}}=0\\
S_3:&\quad \beta_{\rm s}=-\pi/2,\ \ p_{\beta{\rm s}}=0
\end{aligned} \tag{13.3.9}$$

相轨迹如图 7.10 或图 13.6 所示.

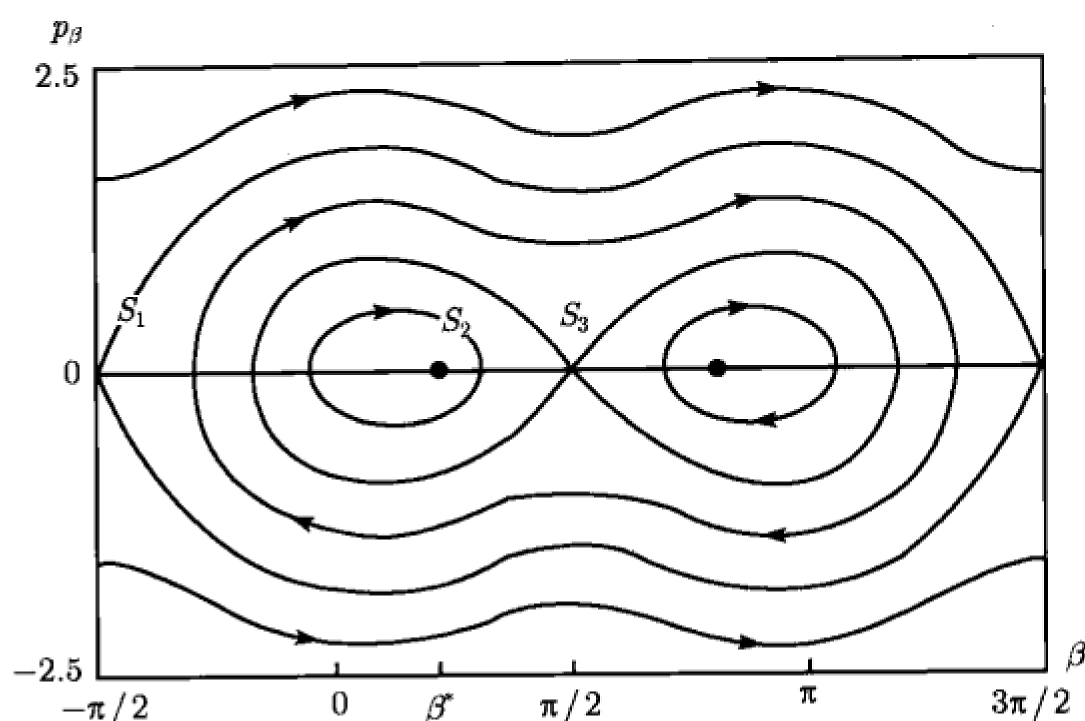


图 13.6　框架陀螺未扰运动在 (β, p_β) 平面内的相轨迹图

13.3.2　驱动的周期性扰动导致的混沌性态

设由于陀螺仪驱动存在周期扰动, 使转子动量矩出现微小周期分量. 式 (13.3.3) 改为

$$p_\varphi = C_{\rm R}(\dot{\alpha}\sin\beta + \dot{\varphi}) = H_0(1 + \varepsilon\sin\omega_0 t) \tag{13.3.10}$$

代入式 (13.3.2) 计算受扰后陀螺的哈密顿函数, 只保留 ε 的一次项, 得到

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_0 + \varepsilon\mathscr{H}_1 \tag{13.3.11}$$

其中 $\mathscr{H}_0$ 为无扰情形的哈密顿函数, $\mathscr{H}_1$ 为扰动引起的增量

$$\mathscr{H}_0 = \frac{1}{2B}\left[p_\beta^2 + \nu^2(\sin\beta^* - \sin\beta)^2\right] \tag{13.3.12}$$

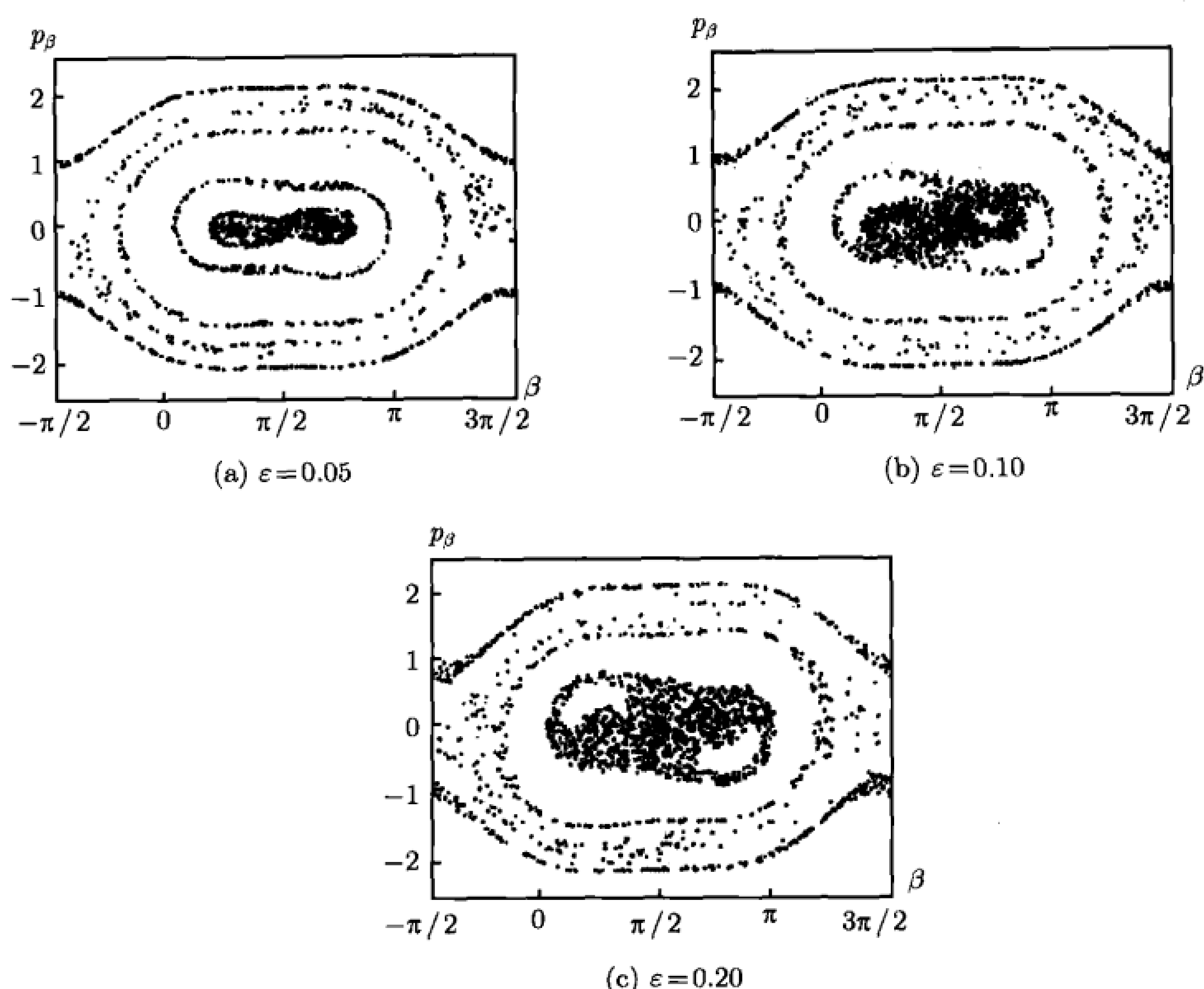
$$\mathscr{H}_1 = \frac{\nu^2}{B}\left[\sin\beta(\sin\beta - \sin\beta^*) + \frac{A}{C_{\rm R}}\right]\sin\omega_0 t \tag{13.3.13}$$

利用哈密顿函数 (13.3.11) 列出受扰运动的正则方程

$$\dot{p}_\beta = \frac{\nu^2}{B}\cos\beta\left[\sin\beta^* - \sin\beta + \varepsilon(2\sin\beta - \sin\beta^*)\sin\omega_0 t\right] \tag{13.3.14a}$$

$$\dot{\beta} = \frac{p_\beta}{B} \tag{13.3.14b}$$

令 $B = 1$, $\sin\beta^* = 0.8$, $\omega_0 = 1$, $\nu^2 = 1$, 应用龙格–库塔方法对方程组 (13.3.14) 作数值积分, 在 (β, p_β) 相平面内作周期 2π 的庞加莱图, 显示出在周期扰动作用下陀螺仪运动的混沌性态 (图 13.7).



(a) $\varepsilon=0.05$

(b) $\varepsilon=0.10$

(c) $\varepsilon=0.20$

图 13.7 驱动存在周期扰动时框架陀螺的庞加莱图

13.3.3 基座转动导致的混沌性态

设陀螺仪的基座绕 ζ 轴以角速度 Ω_0 匀速转动. 其在 $(O-xyz)$ 中的投影为

$$
\begin{aligned}
\Omega_{0x} &= -\Omega_0 \cos\alpha \sin\beta \\
\Omega_{0y} &= \Omega_0 \sin\alpha \\
\Omega_{0z} &= \Omega_0 \cos\alpha \cos\beta
\end{aligned}
\tag{13.3.15}
$$

设陀螺的质量几何仍满足简化条件 (13.3.1), 考虑基座的牵连角速度 $\boldsymbol{\Omega}_0$, 计算各分体的动能, 相加后得到陀螺仪的动能

$$
\begin{aligned}
T =& \frac{1}{2}\left\{A\dot{\alpha}^2 + B\dot{\beta}^2 + C_{\mathrm{R}}\left(\dot{\varphi} + \dot{\alpha}\sin\beta + \Omega_0\cos\alpha\cos\beta\right)^2\right. \\
&\left. + 2B\Omega_0\dot{\beta}\sin\alpha + \Omega_0^2\left[(B_0+B)\sin^2\alpha + (C_0+C_1)\cos^2\alpha\right]\right\}
\end{aligned}
\tag{13.3.16}
$$

计算系统的广义动量, 得到

$$
p_\alpha = A\dot{\alpha} + C_{\mathrm{R}}\left(\dot{\varphi} + \dot{\alpha}\sin\beta + \Omega_0\cos\alpha\cos\beta\right)\sin\beta
$$

$$p_\beta = B\left(\dot\beta + \Omega_0\sin\alpha\right) \tag{13.3.17}$$

$$p_\varphi = C_{\rm R}\left(\dot\varphi + \dot\alpha\sin\beta + \Omega_0\cos\alpha\cos\beta\right)$$

基座的转动构成非定常约束, 系统的哈密顿函数可利用式 (3.4.19) 写出

$$\begin{aligned}\mathscr{H} =& \frac{1}{2}\left\{A\dot\alpha^2 + B\dot\beta^2 + C_{\rm R}\left(\dot\varphi + \dot\alpha\sin\beta\right)^2 - \Omega_0^2\left[(B_0+B)\sin^2\alpha\right.\right.\\ &\left.\left. + \left(C_0 + C_1 + C_{\rm R}\cos^2\beta\right)\cos^2\alpha\right]\right\}\end{aligned} \tag{13.3.18}$$

考虑循环积分 $p_\varphi = H_0$, 将哈密顿函数中的广义速度用广义动量表示, 化作

$$\begin{aligned}\mathscr{H} =& \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{A}\left(p_\alpha - H_0\sin\beta\right)^2 + \frac{1}{B}\left(p_\beta - B\Omega_0\sin\alpha\right)^2 + \frac{1}{C_{\rm R}}\left(H_0 - C_{\rm R}\Omega_0\cos\alpha\cos\beta\right)^2\right.\\ &\left. - \Omega_0^2\left[(B_0+B)\sin^2\alpha + \left(C_0+C_1+C_{\rm R}\cos^2\beta\right)\cos^2\alpha\right]\right\}\end{aligned} \tag{13.3.19}$$

代入方程组 (3.4.28), 导出哈密顿正则方程

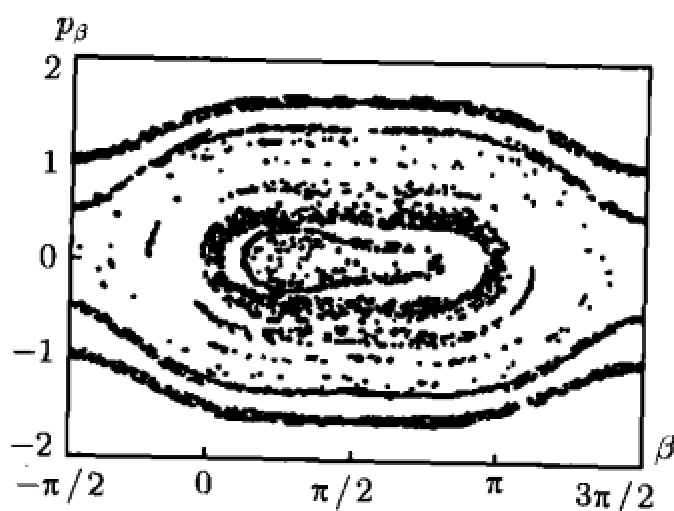
$$\dot\alpha = \frac{1}{A}\left(p_\alpha - H_0\sin\beta\right) \tag{13.3.20a}$$

$$\dot p_\alpha = \Omega_0\left[p_\beta\cos\alpha - \left(H_0\cos\beta + C\Omega_0\cos\alpha\right)\sin\alpha\right] \tag{13.3.20b}$$

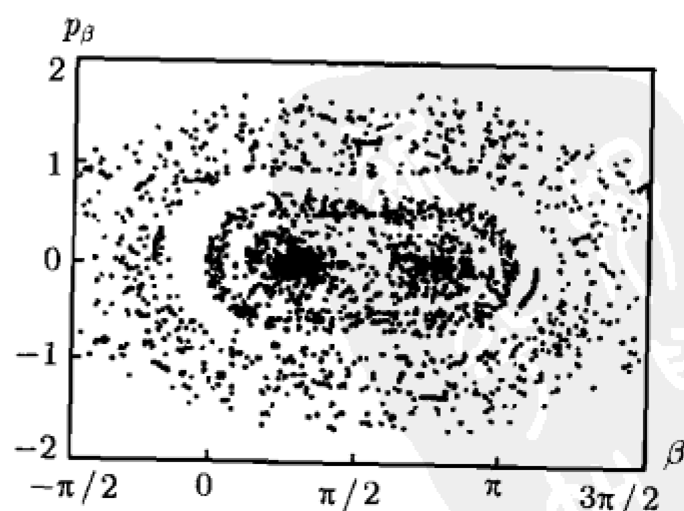
$$\dot\beta = \frac{1}{B}\left(p_\beta - B\Omega_0\sin\alpha\right) \tag{13.3.20c}$$

$$\dot p_\beta = \frac{H_0}{A}\cos\beta\left(p_\alpha - H_0\sin\beta\right) - \Omega_0 H_0\cos\alpha\sin\beta \tag{13.3.20d}$$

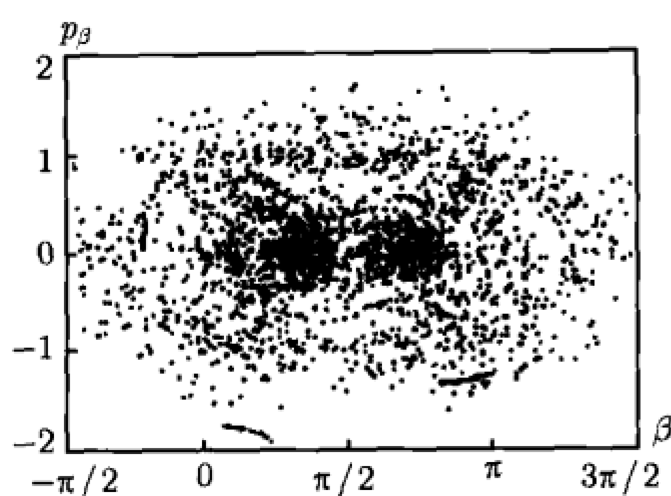
其中 $C = C_0 + C_1 - B_0$. 令 $A = 2,\ C = 1,\ B = 1,\ p_\alpha = 0.8,\ H_0 = 1$, 应用龙格–库塔方法作数值积分, 对于不同的基座角速度 Ω_0, 在 (β, p_β) 相平面内作庞加莱图. 反映出基座匀速转动导致的陀螺仪混沌运动 (图 13.8).



(a) $\Omega_0=0.03$



(b) $\Omega_0=0.08$



(c) $\Omega_0=0.13$

图 13.8　基座有牵连转动时框架陀螺的庞加莱图

以上分析表明, 转子对匀速旋转的微小偏离或基座的匀速转动均可使陀螺仪运动呈现混沌性态. 从而证明, 陀螺仪的随机漂移也可来源于内禀随机性, 而不仅是外在随机因素的作用结果.

13.4　陀螺体的混沌运动

13.4.1　动量矩分量表示的欧拉方程

刚体定点运动的欧拉方程 (2.2.33) 以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 在刚体的主轴坐标系 $(O-xyz)$ 中的投影 $\omega_x,\omega_y,\omega_z$ 为变量. 利用角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 与动量矩 $\boldsymbol{H}$ 之间的关系 (2.2.11) 可导出

$$\omega_x=\frac{H_x}{A},\ \ \omega_z=\frac{H_y}{B},\ \ \omega_z=\frac{H_z}{C} \tag{13.4.1}$$

在无力矩状态下代入方程 (2.2.33), 化作以动量矩 $\boldsymbol{H}$ 投影 H_x,H_y,H_z 为变量的欧拉方程

$$\dot{H}_x+\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{C}\right)H_yH_z=0 \tag{13.4.2a}$$

$$\dot{H}_y+\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{A}\right)H_zH_x=0 \tag{13.4.2b}$$

$$\dot{H}_z+\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)H_xH_y=0 \tag{13.4.2c}$$

无力矩刚体的动量矩积分 (2.3.3) 和能量积分 (2.3.2) 分别用动量矩分量表示为

$$H_x^2+H_y^2+H_z^2=H^2 \tag{13.4.3}$$

$$\frac{H_x^2}{A}+\frac{H_y^2}{B}+\frac{H_z^2}{C}=2T \tag{13.4.4}$$

式 (13.4.3) 表明动量矩 $\boldsymbol{H}$ 的矢量端点受以 H 为半径的球面的限制, 其在球面上的极迹为式 (13.4.4) 确定的能量椭球与球面的交线. 所形成的曲线族与惯性椭球上的本体极迹有相似的几何特征, 也存在与刚体永久转动对应的 3 个奇点 (图 13.9).

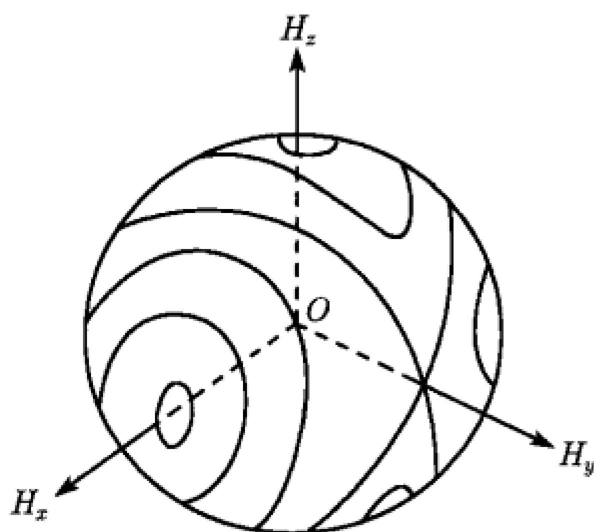


图 13.9　无力矩刚体动量矩矢量的端点极迹

对于无力矩陀螺体情形, 令方程组 (11.1.14) 中的力矩项为零, 欧拉方程为

$$A\dot{\omega}_x + (C-B)\,\omega_y\omega_z + C_{\mathrm{R}}\Omega_{\mathrm{R0}}\omega_y = 0 \tag{13.4.5a}$$

$$B\dot{\omega}_y + (A-C)\,\omega_z\omega_x - C_{\mathrm{R}}\Omega_{\mathrm{R0}}\omega_x = 0 \tag{13.4.5b}$$

$$C\dot{\omega}_z + (B-A)\,\omega_x\omega_y = 0 \tag{13.4.5c}$$

其中 A, B, C 的定义见式 (11.1.11). 将式 (13.4.1) 中的 ω_z 改为

$$\omega_z = \frac{1}{C}\left(H_z - C_{\mathrm{R}}\Omega_{\mathrm{R0}}\right) \tag{13.4.6}$$

即适用于陀螺体. 导出用动量矩分量表示的陀螺体欧拉方程

$$\dot{H}_x + \left(\frac{1}{B}-\frac{1}{C}\right)H_yH_z + \left(\frac{C_{\mathrm{R}}\Omega_{\mathrm{R0}}}{C}\right)H_y = 0 \tag{13.4.7a}$$

$$\dot{H}_y + \left(\frac{1}{C}-\frac{1}{A}\right)H_xH_z - \left(\frac{C_{\mathrm{R}}\Omega_{\mathrm{R0}}}{C}\right)H_x = 0 \tag{13.4.7b}$$

$$\dot{H}_z + \left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)H_xH_y = 0 \tag{13.4.7c}$$

无力矩陀螺体仍存在与式 (13.4.3) 相同的动量矩积分. 陀螺体的运动性态可根据动量矩矢量 $\boldsymbol{H}$ 在球面上的极迹曲线的几何特征作出定性描述. 极迹的奇点数目和性质随转子转速 Ω_{R0} 改变的规律如 11.1.4 节所作的分析. 在 (H_x, H_y, H_z) 三维空间中取不同断面, 动量矩矢量 $\boldsymbol{H}$ 在断面上的极迹为平面曲线, 也可代替相轨迹作类似的庞加莱图以识别混沌性态.

13.4.2　带偏心转子陀螺体的混沌运动

设转子的质心沿 $x_{\rm R}$ 轴偏离 z 轴, 偏心距为 e, $x_{\rm R}$ 轴与 x 轴的夹角为 φ, 转子的质量为 m(见图 13.10). 则由于质量偏心导致的动量矩增量 $\Delta \boldsymbol{H}$ 在 $(O-xyz)$ 中的投影为

$$\begin{aligned}
\Delta H_x &= me^2\left(\omega_x \sin^2\varphi - \omega_y \cos\varphi\sin\varphi\right)\\
\Delta H_y &= me^2\left(-\omega_x \cos\varphi\sin\varphi + \omega_y \cos^2\varphi\right)\\
\Delta H_z &= me^2\omega_z
\end{aligned}\tag{13.4.8}$$

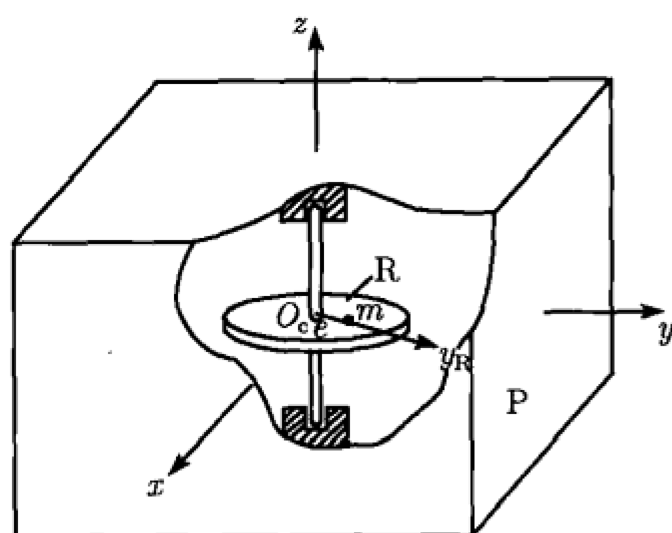


图 13.10　带偏心转子的陀螺体

将 $\Delta \boldsymbol{H}$ 附加于陀螺体的总动量矩 $\boldsymbol{H}$, 得到

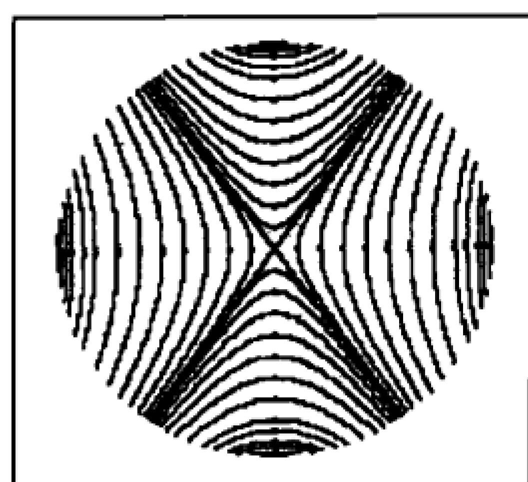
$$\begin{aligned}
H_x &= \left(A + me^2\sin^2\varphi\right)\omega_x - \left(me^2\cos\varphi\sin\varphi\right)\omega_y\\
H_y &= -\left(me^2\cos\varphi\sin\varphi\right)\omega_x + \left(B + me^2\cos^2\varphi\right)\omega_y\\
H_z &= \left(C + me^2\right)\omega_z
\end{aligned}\tag{13.4.9}$$

从中解出

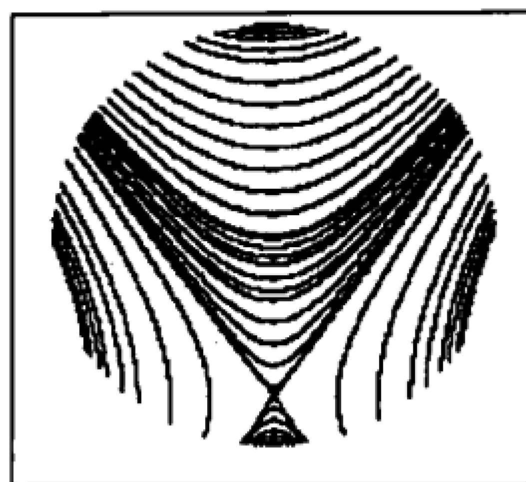
$$\begin{aligned}
\omega_x &= \frac{\left(B + me^2\cos^2\varphi\right)H_x + \left(me^2\cos\varphi\sin\varphi\right)H_y}{AB + me^2\left(A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi\right)}\\
\omega_y &= \frac{\left(me^2\cos\varphi\sin\varphi\right)H_x + \left(A + me^2\sin^2\varphi\right)H_y}{AB + me^2\left(A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi\right)}\\
\omega_z &= \frac{H_z}{C + me^2}
\end{aligned}\tag{13.4.10}$$

令上式中 $\varphi = \Omega_{\rm R0}t$, 代入陀螺体的欧拉方程 (13.4.7), 令 $A=1, B=1.5, C=2, H_0=15$, 利用龙格–库塔方法作数值积分. 利用转子旋转周期 $2\pi/\Omega_{\rm R0}$, 在 (H_x, H_y, H_z) 三维空间中的 (H_x, H_z) 断面上作庞加莱图. 对于 $e=0$ 的理想状态, 无力矩陀螺体的欧拉方程为可积情形, 庞加莱图具有规则的几何结构 (图 13.11(a)). 随着转子旋转速度的增加, 鞍点朝一侧偏移, 使转子旋转轴对应的中心周围稳定区域增大,

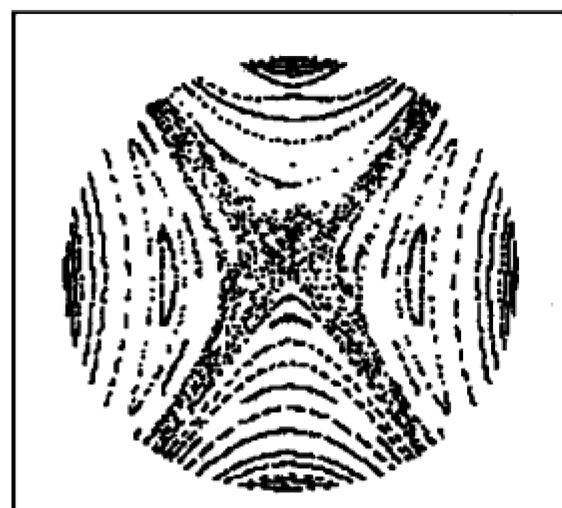
体现出转子旋转所产生的陀螺效应 (图 13.11(b)). 转子存在偏心时, 在过鞍点的相轨迹附近逐渐出现无规则分布的点集, 且随着偏心距 e 或转速 Ω_{R0} 的增加而扩大 (图 13.11(c)~(f)). 从而证实, 转子偏心距的存在可使陀螺体的运动出现混沌性态.



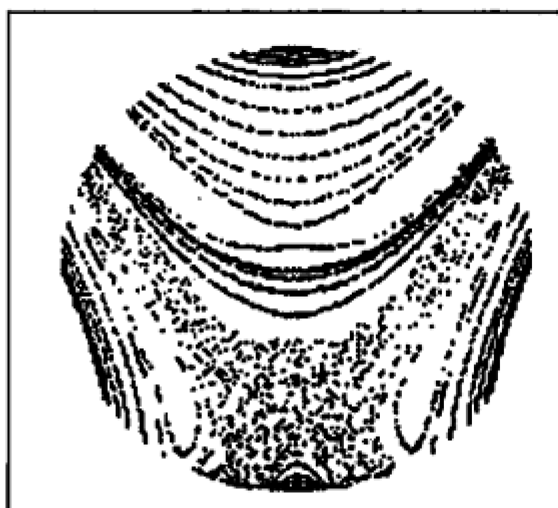
(a) $m=0,\ e=0,\ \Omega_{R0}=0,\ C_R=0.5$



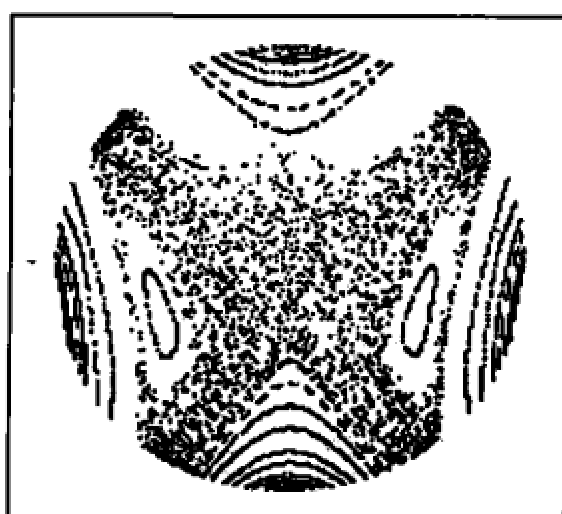
(b) $m=0,\ e=0,\ \Omega_{R0}=2.0,\ C_R=0.5$



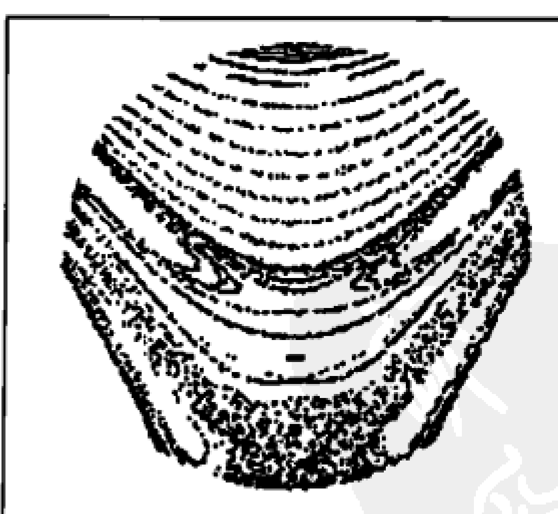
(c) $m=0.3,\ e=0.1,\ \Omega_{R0}=0,\ C_R=0.5$



(d) $m=0.3,\ e=0.1,\ \Omega_{R0}=2,\ C_R=0.5$



(e) $m=0.3,\ e=0.3,\ \Omega_{R0}=2,\ C_R=0.5$



(f) $m=0.1,\ e=0.3,\ \Omega_{R0}=3,\ C_R=0.5$

图 13.11　带偏心转子陀螺体的动量矩矢量端点的庞加莱图

参考文献

第 1~7 章

[1] MacMillan W D. Dynamics of Rigid Bodies. New York: MacGraw-Hill, 1936

[2] Grammel R. Der Kreisel, Seine Theorie und Seine Anwendungen. New York: Springer, 1950
(中译本：格莱曼, 回转仪的理论和应用, 北京：科学出版社, 1959)

[3] Булгаков Б В. Прикладная теория гироскопов. М. Гостехиздат, 1955
(中译本：布尔加科夫. 陀螺仪实用理论, 北京：国防工业出版社, 1961)

[4] Меркин Д Р. Гироскопические системы. М. Гостехиздат, 1956
(中译本：麦尔金. 陀螺系统. 北京：国防工业出版社, 1959)

[5] Scarborough J B. The Gyroscope, Theory and Applications. New York: Interscience Publishers. 1957
(中译本：斯卡勃罗. 陀螺仪理论与应用. 北京：国防工业出版社, 1964)

[6] Arnold R N, Maunder N. Gyrodynamics. New York: Academic Press, 1961

[7] Ишлинский, А. Ю. Механика гироскопическзх систем. М. Изд. АН СССР. 1963

[8] Николаи Е Л. Гироскоп в карданновом подвесе. М. Наука, 1964

[9] 陆元九. 陀螺及惯性导航原理 (上册). 北京：科学出版社, 1964

[10] Leimanis E. The General Problem of the Motion of Coupled Rigid Bodies About a Fixed Point. New York: Springer, 1965

[11] Magnus K. Kreisel, Theorie und Anwendungen. New York: Springer, 1971
(中译本：马格努斯. 陀螺理论与应用. 北京：国防工业出版社, 1983)

[12] Ищлинский, А.Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М. Наука, 1976

[13] 肖尚彬, 董秋泉. 陀螺力学. 北京：人民教育出版社, 1981

[14] 贾书惠. 刚体动力学. 北京：高等教育出版社, 1987

[15] Magnus K. Beiträge zur Dynamik des Kräftfreien, Kardanisch gelagerten Kreisels. Z. Angew. Math. u .Mech., 1955, **35** : 1-2

[16] Goodstein R. A perturbation solution of the equations of motion of a gyroscope, Trans. ASME, J. Appl. Mech. 1959, **26**(3)

[17] 陈滨. 自由陀螺仪漂移理论及有关的某些一般问题. 力学学报, 1964, **7**(3): 171-183

[18] 刘延柱. 万向支架陀螺仪的摄动理论. 力学与实践, 1982, **4**(3): 145-154

[19] 刘延柱. 万向支架弹性对陀螺仪章动漂移的影响. 固体力学学报, 1984, 5 (1): 125-129

[20] 刘延柱. 关于刚体姿态的数学表达. 力学与实践, 2008, **30**(1): 98-101

第 8 章

[21] Craig R J G. Theory of operation of an elastically supported, tuned Gyroscope, IEEE Trans. 1972, AES-**8**(3) : 280-288

[22] Craig R J G. Theory of errors of a multigimbal, elastically supported, tuned gyroscope, IEEE Trans. 1972, AES-**8**(3) : 289-297

[23] Fox C H J, Burdes J S. The dynamics of a Hooke's joint gyroscope with non-orthogonal flexure axes. J. Mech. Engng. Sci., 1978, **20**(2)

[24] 刘延柱. 动力调谐陀螺仪动力学. 上海交通大学学报, 1979, **13**(2) : 35-46

[25] 刘延柱. 非理想动力调谐陀螺仪动力学问题. 上海交通大学学报, 1980, **14**(3) : 21-32

[26] 刘延柱. 动力调谐陀螺仪的章动运动. 固体力学学报, 1981, 2 (3): 337-342

[27] 易元吉, 刘延柱. 动力调谐陀螺仪的动力学问题. 惯性导航与仪表, 1982, (1) : 51-57

[28] 刘延柱, 杨海兴. 振动基座上动力调谐陀螺仪的运动. 惯性导航与仪表, 1982, (4) : 37-42

[29] 林士谔等. 动力调谐陀螺仪. 北京: 国防工业出版社, 1983

[30] Cain J S, Staley D A, Heppler G R, McPhee J. Stability analysis of a dynamically tuned gyroscope. J. Guidance, Control, & Dynamics, 2006, **29**(4): 965-969

第 9 章

[31] 刘延柱. 静电陀螺仪动力学. 北京: 国防工业出版社, 1979, 8

[32] Мартыненко Ю Г. Движение твёрного тела в электрических и магнитных полях. М. Наука, 1988

[33] Nordsieck A T. Principles of ESVG, ARS-Guidance & Control Conference, 1961, 7-9

[34] Clavelloux N, Mathy R. Analyse mathématiques de quelques problèmes posès par le gyroscope Électrostatique. Doc-air-Espace, 1966, 100

[35] МартыненкоЮ Г. Уходыэлектростатического гироскопа вызываемые несферичностью ротора. Изв АН СССР, МТТ, 1970, **6**(1): 10-18

[36] Lange B. Active damping of ESG rotor with mass unbalance.J Spacecraft & Rockets, 1972, **9**(2): 96-102

[37] Климов Д М, Космодемьянская Г Н, Черноусько Ф Л. О движении гироскопа с неконтактным подвесом Изв АН СССР, МТТ, 1972, **7**(2): 3-8

[38] Мартыненко Ю Г. Движение несбалансирового гироскопа с неконтактным подвесом. Изв АН СССР, МТТ, 1974, **9**(4): 13-19

[39] 刘延柱. 静电陀螺仪大范围漂移运动. 上海交通大学学报, 1978, (12) , 1: 177-185

[40] 刘延柱. 微型静电陀螺仪动力学问题. 惯性导航与器件, 1978, (4): 28-38

[41] 刘延柱. 球型自由转子陀螺常值漂移的数学模型. 惯性导航与器件, 1979, (3): 27-44

[42] 刘延柱. 磁场中自由转子陀螺的运动. 力学学报, 1981, **13** (1): 49-55

[43] 刘延柱, 薛纭. 径向质量偏心的自由转子陀螺的漂移运动. 应用数学和力学, 2004, **25**(7): 718-722
(英文版: Liu Yan-zhu, Xue Yun. Drift motion of free-rotor gyroscope with radial mass-unbalance. Applied Math. & Mechanics, 2004, **25**(7): 786-791)
[44] 刘延柱. Serret-Andoyer 变量描述的刚体定点运动. 力学与实践, 2007, **29**(5): 61-62

第 10 章

[45] Моисеев Н Н, Румянцев В В. Динамика тела с полостью содержащими жидкостью . М. Наука. 1965
(英译本: Moiseev N N, Rumjantsev V V. Dynamic Stability of Bodies Containing Fluid. New York: Springer, 1968)
(中译本: 莫依舍夫, 鲁面采夫. 充液刚体动力学. 北京: 宇航出版社, 1992)
[46] 王照林, 刘延柱. 充液系统动力学. 北京: 科学出版社, 2002. 3
[47] Pfeiffer F. Ein Näherungsverfahren für Flüssigkeitsgefüllte Kreisel, Ingenieur-Archiv, 1974, **43**
[48] Pfeiffer F. Problems of contained rotating fluids with respect to aerospace applications. Proceedings CNES-ESA, 1977, ESA SP-129
[49] 刘延柱. 轴对称充液刚体的自旋稳定性. 上海交通大学学报, 1984, **18** (5): 1-8
[50] 黄怡, 刘延柱. 带充液腔的自旋卫星稳定性问题. 宇航学报, 1988, (1): 56-64
[51] Liu Yanzhu. On the generation of dynamical equations of a rigid body containing fluid. Z. of Angew. Math. u. Mech., 1990, **70** (3): 199-200
[52] 刘延柱. 带充液腔重刚体的自旋稳定性. 力学学报, 1992, **24** (3): 368-371
[53] 刘延柱. 球形流体转子陀螺仪动力学分析. 上海交通大学学报, 1993, **27** (4): 1-6
[54] 刘延柱. 关于 Kelvin 问题. 力学与实践, 1994, **16** (3): 43-45

第 11 章

[55] Белецкий, В.В. Движение искуственного спутника относительно центра масс. М. Наука. 1965
[56] Rimrott F P J. Introductory Attitude Dynamics. New York: Springer, 1988
[57] 刘延柱. 航天器姿态动力学. 北京: 国防工业出版社, 1995
[58] 黄训圭. 航天器姿态动力学. 长沙: 国防科技大学出版社, 1997
[59] 屠善澄. 卫星姿态动力学与控制. 北京: 宇航出版社, 2001
[60] 刘延柱. 自由陀螺体永久转动的稳定性及分叉. 上海力学, 1986, **7**(3): 20-25
[61] Liu Y.Z., Rimrott, F.P.J.. Global motion of a dissipative asymmetric gyrostat. Archive of Applied Mechanics, 1992, (62): 329-337
[62] Liu Yanzhu, Rimrott, F.P.J.. Global motion of a torque-free flexible multispin satellite. Trans. of CSME, 1993, **17** (1): 17-27

[63] Liu Y.Z., Rimrott, F.P.J.. On the permanent rotation of a torque-free two-body system with a flexible connection. ASME Trans., J. of Applied Mechanics, 1994, **61**: 199-202

[64] Liu Y.Z.. Global dynamical behavior of a two-body satellite with flexible connection in the gravitational field. Technische Mechanik, 1994, **14** (2): 141-146

[65] 刘延柱, 成功. 万有引力场中充液卫星的姿态稳定性. 空间科学学报, 1995, **15** (1): 19-23

[66] 成功, 刘延柱. 万有引力场中带挠性附件充液卫星的姿态稳定性. 空间科学学报, 1997, **17** (4): 367-371

[67] 刘延柱, 马晓敏. 基于四元数的带飞轮航天器的自适应姿态控制. 上海交通大学学报, 2003, **37** (12): 1957-1960

第 12 章

[68] Magnus K. Zur Theorie der Keltischen Wackelsteine. Z. Angew. Math. u. Mech., 1974, **54**: 54-55

[69] Cohen R J. The tippe top revisited. Amer. J. Physics, 1977. **45**(1): 12-17

[70] Kane T R, Levinson D A. A realistic solution of the symmetric top problem. Trans. ASME, J. Appl. Mechanics, 1978, **45**(4): 903-909

[71] Kane T R, Levinson D A. Realistic mathematical modeling of the rattleback. Int. J. Nonlinear Mechanics, 1982, **17**(3): 175-186

[72] 刘延柱. 退旋刚体的动力学解释. 上海力学, 1982, **3** (4): 19-24

[73] Liu Yanzhu. On the motion of an asymmetrical rigid body rolling on a horizontal plane. Z. Angew. Math. u. Mech., 1985, **65**: 180-184

[74] 刘延柱. 粗糙平面上陀螺的稳定性. 力学学报, 1987, **19** (3): 239-245
(英文版: Liu Yanzhu. The stability of a top rotating on a rough horizontal plane. Acta Mechanica Sinica, 1987, **3** (3): 278-285)

[75] 刘延柱, 张文. 刚性球体在粗糙平面上旋转的全局运动. 应用力学学报, 1988, **5** (1): 1-5

[76] Liu, Y.Z.. The stability of a fluid-filled top rotating on a horizontal plane. Archive of Applied Mechanics, 1992, **62**: 487-494

[77] 刘延柱. 充液 Chaplygin 球的稳定性. 上海力学, 1993, **14** (2): 8-11

第 13 章

[78] 刘延柱, 陈立群. 非线性振动. 北京: 高等教育出版社, 2001

[79] Broucke R A. On the use of Poincaré surfaces of section in rigid-body motion. J. Aeronautical Sciences, 1993, **41**(4): 593-601

[80] 彭建华, 刘延柱. 准 Lagrange 陀螺的混沌运动. 非线性动力学学报, 1996, **3** (4): 333-337

[81] 彭建华, 刘延柱. 参数激励刚体的混沌运动. 固体力学学报, 1997, **18** (3): 279-282

[82] 彭建华, 刘延柱. 带偏心转子陀螺体的混沌运动. 力学季刊, 2000, **21**(2): 162-166

[83] Peng, J., Liu, Y.. Chaotic motion of a gyrostat with asymmetric rotor. Intern. J. of Nonlinear Mechanics, 2000, **35**(3) : 431-437

[84] 成功, 刘延柱, 彭建华. 万有引力场中陀螺体的混沌运动. 力学学报, 2000, **32**(3): 379-384

[85] 刘延柱, 成功. 框架陀螺仪运动的混沌性态. 力学学报, 2002, **34**(3): 475-480

[86] Liu Yanzhu, Cheng Gong. Stability, Bifurcation and Chaos of a Gyro−Pendulum on a Rotating Basis. Advances in Nonlinear Dynamics in China, Swets & Zeitlinger Publishers, 2002



附录一　矢量、并矢和四元数

A.1.1　矢量的坐标变换

将矢量的各种运算化为标量运算必须先确定参考坐标系 $(O-xyz)$. 设 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 为沿 $(O-xyz)$ 各坐标轴的单位矢量, 称为**基矢量**, 基矢量的集合称为**基**. 将基矢量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 排成列阵作为基的表达形式, 称为**基矢量列阵**, 记作

$$\underline{\boldsymbol{e}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{A.1.1}$$

在上式中, 下方增加横杠的黑斜体字母表示由矢量元素构成的矢量矩阵, 以区别于元素为标量的标量矩阵. 基矢量有以下正交特性

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1\\&\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0\end{aligned} \tag{A.1.2}$$

此特性可利用基矢量列阵 $\underline{\boldsymbol{e}}$ 简略地表示为

$$\underline{\boldsymbol{e}}\cdot\underline{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E} \tag{A.1.3}$$

其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位阵. 任意矢量 $\boldsymbol{a}$ 可表示为基矢量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 的线性组合

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k} \tag{A.1.4}$$

a_x,a_y,a_z 为矢量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\underline{\boldsymbol{e}}$ 基上的**投影**或**坐标**, 所排成的列阵为矢量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\underline{\boldsymbol{e}}$ 基上的**坐标列阵**. 在黑斜体字母的右上角增加带括号的零角标表示该矢量的坐标列阵, 写作

$$\boldsymbol{a}^{(0)}=\begin{pmatrix}a_x & a_y & a_z\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{A.1.5}$$

将矢量 $\boldsymbol{a}$ 写作基矢量行阵与坐标列阵的乘积或坐标行阵与基矢量列阵的乘积

$$\boldsymbol{a}=\underline{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}^{(0)}=\boldsymbol{a}^{(0)\mathrm{T}}\underline{\boldsymbol{e}} \tag{A.1.6}$$

则矢量的所有运算均可利用坐标矩阵的运算实现

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c} &&\boldsymbol{a}^{(0)}\pm\boldsymbol{b}^{(0)}=\boldsymbol{c}^{(0)}\\&\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c} &&\lambda\boldsymbol{a}^{(0)}=\boldsymbol{c}^{(0)}\\&\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\lambda &&a^{(0)\mathrm{T}}b^{(0)}=b^{(0)\mathrm{T}}a^{(0)}=\lambda\\&\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c} &&\tilde{\boldsymbol{a}}^{(0)}\boldsymbol{b}^{(0)}=-\tilde{\boldsymbol{b}}^{(0)}\boldsymbol{a}^{(0)}=\boldsymbol{c}\end{aligned} \tag{A.1.7}$$

其中 λ 为标量, 带波浪号矩阵 $\tilde{\boldsymbol{a}}^{(0)}$ 或 $\tilde{\boldsymbol{b}}^{(0)}$ 为矢量 $\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{b}$ 的坐标组成的 3 阶反对称方阵, 定义为

$$\tilde{\boldsymbol{a}}^{(0)}=\begin{pmatrix}0 & -a_z & a_y\\ a_z & 0 & -a_x\\ -a_y & a_x & 0\end{pmatrix} \tag{A.1.8}$$

设 $(O-x_py_pz_p)$ 和 $(O-x_qy_qz_q)$ 为以 O 为同一原点的不同坐标系, 对应的基矢量列阵为 $\underline{\boldsymbol{e}}_p$ 和 $\underline{\boldsymbol{e}}_q$, 则同一矢量 $\boldsymbol{a}$ 可用不同基的坐标列阵表示为

$$\boldsymbol{a}=\underline{\boldsymbol{e}}_p^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}^{(p)}=\underline{\boldsymbol{e}}_q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}^{(q)} \tag{A.1.9}$$

坐标列阵的上角标为坐标系的标号. 将上式两边用 $\underline{\boldsymbol{e}}_p$ 点积, 利用式 (A.1.3), 导出

$$\boldsymbol{a}^{(p)}=\boldsymbol{C}_p^q\boldsymbol{a}^{(q)} \tag{A.1.10}$$

其中 $\boldsymbol{C}_p^q$ 是 3×3 标量矩阵, 定义为

$$\boldsymbol{C}_p^q=\underline{\boldsymbol{e}}_p\cdot\underline{\boldsymbol{e}}_q^{\mathrm{T}} \tag{A.1.11}$$

$\boldsymbol{C}_p^q$ 称为 $\underline{\boldsymbol{e}}_p$ 相对 $\underline{\boldsymbol{e}}_q$ 的**方向余弦矩阵**. 如将 $\underline{\boldsymbol{e}}_p$ 与 $\underline{\boldsymbol{e}}_q$ 各轴之间的方向余弦列成表 A.1, 则方向余弦矩阵 $\boldsymbol{C}_p^q$ 即此表格的矩阵表达形式. 矩阵的每个元素等于不同坐标系的两根坐标轴夹角的余弦. 不难判断, p 与 q 互换位置后的矩阵 $\boldsymbol{C}_q^p$ 为 $\boldsymbol{C}_p^q$ 的转置矩阵

$$\boldsymbol{C}_q^p=(\boldsymbol{C}_p^q)^{\mathrm{T}} \tag{A.1.12}$$

且相同基之间的方向余弦矩阵为 3 阶单位阵

$$\boldsymbol{C}_p^p=\boldsymbol{E} \tag{A.1.13}$$

表 A.1

	x_q	y_q	z_q
x_p	c_{11}	c_{12}	c_{13}
y_p	c_{21}	c_{22}	c_{23}
z_p	c_{31}	c_{32}	c_{33}

公式 (A.1.10) 可用来进行任意矢量 $\boldsymbol{a}$ 在不同基上投影的坐标变换. 设有 3 个不同基 $\underline{\boldsymbol{e}}_p$,$\underline{\boldsymbol{e}}_q$, $\underline{\boldsymbol{e}}_s$, 连续使用式 (A.1.10), 导出

$$\boldsymbol{a}^{(p)}=\boldsymbol{C}_p^q\boldsymbol{a}^{(q)}=\boldsymbol{C}_p^s\boldsymbol{C}_s^q\boldsymbol{a}^{(q)} \tag{A.1.14}$$

将上式与式 (A.1.10) 比较, 导出 3 个基之间的方向余弦矩阵应满足的关系式

$$\boldsymbol{C}_p^q=\boldsymbol{C}_p^s\boldsymbol{C}_s^q \tag{A.1.15}$$

此性质可扩展为：在按序编号的基族中，任意二基之间的方向余弦矩阵等于一系列相邻基之间的方向余弦矩阵的连乘积，即

$$\boldsymbol{C}_p^q = \boldsymbol{C}_p^{p+1}\boldsymbol{C}_{p+1}^{p+2}\cdots\boldsymbol{C}_{q-1}^q \tag{A.1.16}$$

将式 (A.1.13) 写作

$$\boldsymbol{C}_p^p = \boldsymbol{C}_p^q\boldsymbol{C}_q^p = \boldsymbol{E} \tag{A.1.17}$$

则方向余弦矩阵的逆阵等于其转置阵，即方向余弦矩阵为正交矩阵

$$\left(\boldsymbol{C}_p^q\right)^{-1} = \boldsymbol{C}_q^p = \left(\boldsymbol{C}_p^q\right)^{\mathrm{T}} \tag{A.1.18}$$

略去 $\boldsymbol{C}_p^q$ 的上下角标，将方向余弦矩阵的一般形式写作

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \tag{A.1.19}$$

关系式 (A.1.3) 等同于方向余弦矩阵元素之间的 6 个关系式

$$\sum_{k=1}^{3} c_{ki}c_{kj} = \delta_{ij} \quad (i,j=1,2,3) \tag{A.1.20}$$

因此方向余弦矩阵的 9 个元素中只有 3 个独立参数. 作为正交矩阵，方向余弦矩阵的行列式等于 1

$$|\boldsymbol{C}| = \boldsymbol{i}\cdot(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}) = 1 \tag{A.1.21}$$

为讨论方向余弦矩阵的特征值，列出

$$(\boldsymbol{C}-\lambda\boldsymbol{E})\,\boldsymbol{a} = 0 \tag{A.1.22}$$

将特征方程 $|\boldsymbol{C}-\lambda\boldsymbol{E}| = 0$ 展开为 λ 的 3 次代数多项式，其零次项为 $|\boldsymbol{C}| = 1$，即 3 个特征根的乘积为 1，其中至少有一个等于 1 的实根，使以下方程成立

$$(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{E})\,\boldsymbol{a} = 0 \quad 或 \quad \boldsymbol{C}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \tag{A.1.23}$$

从而表明，每个方向余弦矩阵均有确定的特征矢量与之相对应，它对于变换前后的坐标系有相同的坐标.

A.1.2 并矢

依序并列的矢量称为**并矢**, 以黑斜体大写字母表示. 设矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 组成并矢 $\boldsymbol{D}$

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{ab} \tag{A.1.24}$$

规定并矢与矢量的标积为矢量, 运算规则为

$$\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{r}),\quad \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{D}=(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} \tag{A.1.25}$$

并矢与并矢的标积仍为并矢. 设 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{cd}$ 为另一并矢, 运算规则为

$$\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{d},\quad \boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{D}=\boldsymbol{c}(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} \tag{A.1.26}$$

上述运算显然不符合交换律, 但有结合律存在

$$\boldsymbol{D}\cdot(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{r})=(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{C})\cdot\boldsymbol{r} \tag{A.1.27}$$

矢量的混合积和二重矢积的计算公式为

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) \tag{A.1.28}$$

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) \tag{A.1.29}$$

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=0 \tag{A.1.30}$$

矢量的二重矢积、混合积与并矢之间存在以下关系式

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\;=\;[(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{E}-\boldsymbol{ca}]\cdot\boldsymbol{b} \tag{A.1.31}$$

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=\boldsymbol{a}\cdot[(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{E}-\boldsymbol{db}]\cdot\boldsymbol{c} \tag{A.1.32}$$

此关系式常在刚体动力学中被引用.

对于确定的基 $\underline{e}$, 可根据式 (A.1.6) 将并矢中的矢量用基矢量列阵表示, 导出

$$\boldsymbol{D}=\underline{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}^{(0)}\boldsymbol{b}^{(0)\mathrm{T}}\underline{e}=\underline{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{(0)}\underline{e} \tag{A.1.33}$$

其中三维方阵 $\boldsymbol{D}^{(0)}$ 称为并矢 $\boldsymbol{D}$ 在 $\underline{e}$ 上的**坐标矩阵**, 其 9 个元素称为 $\boldsymbol{D}$ 在 $\underline{e}$ 上的坐标

$$\boldsymbol{D}^{(0)}=\boldsymbol{a}^{(0)}\boldsymbol{b}^{(0)\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_xb_x & a_xb_y & a_xb_z \\ a_yb_x & a_yb_y & a_yb_z \\ a_zb_x & a_zb_y & a_zb_z \end{pmatrix} \tag{A.1.34}$$

并矢的运算可利用其坐标矩阵的运算代替，如

$$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{r}\quad \boldsymbol{f}^{(0)}=\boldsymbol{D}^{(0)}\boldsymbol{r}^{(0)} \tag{A.1.35}$$

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{C}\quad \boldsymbol{F}^{(0)}=\boldsymbol{D}^{(0)}\boldsymbol{C}^{(0)} \tag{A.1.36}$$

坐标矩阵为单位矩阵的并矢为**单位并矢**，记作 $\boldsymbol{E}$. 单位并矢与矢量的标积仍等于该矢量. 将组成并矢的二矢量互换次序后组成的并矢为原并矢的**共轭并矢**. $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{ab}$ 的共轭并矢为

$$\boldsymbol{D}^*=\boldsymbol{ba} \tag{A.1.37}$$

$\boldsymbol{D}^*$ 的坐标矩阵等于 $\boldsymbol{D}$ 的坐标矩阵的转置阵

$$D^{*(0)}=D^{(0)\mathrm{T}} \tag{A.1.38}$$

将式 (A.1.1) 代入式 (A.1.33)，展开后得到由基矢量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 组成的 9 个并矢的线性式，称为**并矢式**

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}=&a_xb_x\boldsymbol{ii}+a_xb_y\boldsymbol{ij}+a_xb_z\boldsymbol{ik}+a_yb_x\boldsymbol{ji}+a_yb_y\boldsymbol{jj}+a_yb_z\boldsymbol{jk}\\&+a_zb_x\boldsymbol{ki}+a_zb_y\boldsymbol{kj}+a_zb_z\boldsymbol{kk}\end{aligned} \tag{A.1.39}$$

单位并矢 $\boldsymbol{E}$ 的并矢式为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{ii}+\boldsymbol{jj}+\boldsymbol{kk} \tag{A.1.40}$$

将同一并矢用不同基 $\underline{\boldsymbol{e}}_p$ 和 $\underline{\boldsymbol{e}}_q$ 表示为

$$\boldsymbol{D}=\underline{\boldsymbol{e}}_p^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{(p)}\underline{\boldsymbol{e}}_p=\underline{\boldsymbol{e}}_q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{(q)}\underline{\boldsymbol{e}}_q \tag{A.1.41}$$

将上式两边左侧与 $\underline{\boldsymbol{e}}_p$ 点积，右侧与 $\underline{\boldsymbol{e}}_p^{\mathrm{T}}$ 点积，并利用以下关系

$$\underline{\boldsymbol{e}}_p\cdot\underline{\boldsymbol{e}}_p^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E},\quad \underline{\boldsymbol{e}}_p\cdot\underline{\boldsymbol{e}}_q^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}_p^q,\quad \underline{\boldsymbol{e}}_q\cdot\underline{\boldsymbol{e}}_p^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}_q^p \tag{A.1.42}$$

导出并矢的坐标变换公式

$$\boldsymbol{D}^{(p)}=\boldsymbol{C}_p^q\boldsymbol{D}^{(q)}\boldsymbol{C}_q^p \tag{A.1.43}$$

在张量分析中，凡可利用式 (A.1.43) 进行坐标变换的 9 个量构成一个二阶张量. 并矢属于二阶张量.

A.1.3 四元数

四元数是哈密顿于 1843 年建立的数学概念, 但仅在近数十年内才在刚体运动学中得到实际应用. 四元数是由一个实数单位 1 和 3 个虚数单位 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 组成的包含 4 个实元的超复数, 记作 $\boldsymbol{\Lambda}$

$$\boldsymbol{\Lambda}=\lambda_0+\lambda_1\boldsymbol{i}+\lambda_2\boldsymbol{j}+\lambda_3\boldsymbol{k} \tag{A.1.44}$$

若将 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 视为基矢量, 则上式的后三项组成矢量 $\boldsymbol{\lambda}$. 因此也可将四元数定义为一个标量 λ_0 和一个矢量 $\boldsymbol{\lambda}$ 的集合, 借用加法符号写作

$$\boldsymbol{\Lambda}=\lambda_0+\boldsymbol{\lambda} \tag{A.1.45}$$

标量和矢量可看作是 $\boldsymbol{\lambda}=0$ 或 $\lambda_0=0$ 时四元数的两种特例. 对于确定的基, 设 $\lambda_r(r=1,2,3)$ 为矢量 $\boldsymbol{\lambda}$ 的投影, 则四元数 $\boldsymbol{\Lambda}$ 也可定义为 4 个标量 $\lambda_r(r=0,1,2,3)$ 的集合, 用标量列阵 $\boldsymbol{\Lambda}^{(0)}$ 表示为

$$\boldsymbol{\Lambda}^{(0)}=(\lambda_0\ \ \lambda_1\ \ \lambda_2\ \ \lambda_3)^{\mathrm{T}} \tag{A.1.46}$$

四元数遵循特殊的规则进行乘法运算, 以空心圆点 “$\circ$” 作为乘法运算符号. 先定义作为特殊四元数的标量和矢量的四元数乘法运算. 标量 α 与标量 β 之间或标量 α 与矢量 $\boldsymbol{\alpha}$ 之间的四元数乘积遵从一般乘法运算规则

$$\alpha\circ\beta=\alpha\beta,\quad \alpha\circ\boldsymbol{a}=\alpha\boldsymbol{a} \tag{A.1.47}$$

矢量 $\boldsymbol{a}$ 与矢量 $\boldsymbol{b}$ 的四元数乘积等于由标量 $-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 与矢量 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 组成的四元数

$$\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} \tag{A.1.48}$$

矢量的点积和叉积可利用四元数乘积表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=-(\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\circ\boldsymbol{a})/2\\ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\circ\boldsymbol{a})/2\end{aligned} \tag{A.1.49}$$

一般情况下四元数与四元数之间的乘法规则可从式 (A.1.47), (A.1.48) 直接导出. 设四元数 $\boldsymbol{\Lambda}$, $\boldsymbol{M}$ 分别为

$$\boldsymbol{\Lambda}=\lambda_0+\boldsymbol{\lambda},\quad \boldsymbol{M}=\mu_0+\boldsymbol{\mu} \tag{A.1.50}$$

其乘积公式为

$$\boldsymbol{\Lambda}\circ\boldsymbol{M}=(\lambda_0\mu_0-\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\mu})+(\lambda_0\boldsymbol{\mu}+\mu_0\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\lambda}\times\boldsymbol{\mu}) \tag{A.1.51}$$

此运算过程也可利用矩阵运算实现. 设 $\boldsymbol{\Lambda} \circ \boldsymbol{M} = \boldsymbol{N}$, 对应的矩阵运算为

$$\boldsymbol{N}^{(0)} = \tilde{\boldsymbol{\Lambda}}^{(0)} \boldsymbol{M}^{(0)} \tag{A.1.52}$$

其中, $\boldsymbol{M}^{(0)}, \boldsymbol{N}^{(0)}$ 为 $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}$ 的标量列阵, $\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}^{(0)}$ 为 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的按以下定义的标量方阵

$$\boldsymbol{N}^{(0)} = \begin{pmatrix} \nu_0 \\ \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{\Lambda}}^{(0)} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_0 & -\lambda_1 \\ \lambda_3 & -\lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{M}^{(0)} = \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} \tag{A.1.53}$$

四元数乘法显然不存在交换律.

将四元数 $\boldsymbol{\Lambda}$ 中的矢量改变符号后形成的新四元数为 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的**共轭四元数**, 记作 $\boldsymbol{\Lambda}^*$

$$\boldsymbol{\Lambda}^* = \lambda_0 - \boldsymbol{\lambda} \tag{A.1.54}$$

四元数 $\boldsymbol{\Lambda}$ 及其共轭四元数 $\boldsymbol{\Lambda}^*$ 的乘积为标量, 称为四元数的**范数或模**, 记作 $|\boldsymbol{\Lambda}|$,

$$|\boldsymbol{\Lambda}| = \boldsymbol{\Lambda} \circ \boldsymbol{\Lambda}^* = \boldsymbol{\Lambda}^* \circ \boldsymbol{\Lambda} = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \tag{A.1.55}$$

模等于 1 的四元数为**规范四元数**. 直接验算还可证明：两个共轭四元数的乘积等于原四元数交换位置后乘积的共轭四元数

$$\boldsymbol{\Lambda}^* \circ \boldsymbol{M}^* = (\boldsymbol{M} \circ \boldsymbol{\Lambda})^* \tag{A.1.56}$$



附录二　运动稳定性理论基础

机械系统的运动规律由系统的动力学微分方程的解确定. 一般情况下, 寻求微分方程的解析积分存在数学上的严重困难. 在工程实践中, 系统的某种特定状态, 如平衡状态或周期运动常与机械系统的正常工作状态相对应. 运动稳定性理论避免对微分方程求解, 而是研究微分方程的特解在干扰作用下的稳定性条件. 满足稳定性条件的特解所对应的特定状态为可能存在的实际状态.

A.2.1　稳定性的基本概念

1) 扰动方程

设自由度为 f 的动力学系统的运动由以下 $n=2f$ 个一阶常微分方程组描述

$$\dot{y}_j = Y_j\left(y_1, y_2, \cdots, y_n, t\right) \quad (j=1,2,\cdots,n) \tag{A.2.1}$$

其中 $y_j\,(j=1,2,\cdots,n)$ 为系统的**状态变量**, 即广义坐标和广义速度 $q_j, \dot{q}_j(j=1,2,\cdots,f)$ 的集合或正则变量 $q_j, p_j(j=1,2,\cdots,f)$ 的集合. 引入 n 维列阵 $\boldsymbol{y}=(y_j)$, $\boldsymbol{Y}=(Y_j)$, 将方程 (A.2.1) 写作矩阵形式

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{Y}\left(\boldsymbol{y}, t\right) \tag{A.2.2}$$

此方程的特解 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}_{\mathrm{s}}(t)$ 对应于系统的特定运动状态, 如平衡状态或周期运动, 称为系统的**未扰运动**或**稳态运动**. 如状态变量的初值满足 $\boldsymbol{y}(t_0)=\boldsymbol{y}_{\mathrm{s}}(t_0)$, 此稳态运动即能具体实现. 若初值 $\boldsymbol{y}(t_0)$ 偏离 $\boldsymbol{y}_{\mathrm{s}}(t_0)$, 系统的运动将偏离稳态运动, 称为该稳态运动的**受扰运动**. 受扰运动 $\boldsymbol{y}(t)$ 与未扰运动 $\boldsymbol{y}_{\mathrm{s}}(t)$ 为同一方程 (A.2.2) 的解, 但对应于不同的初始条件. 受扰运动与未受扰运动的差值称为**扰动**, 作为新的变量 $\boldsymbol{x}(t)$

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{y}_{\mathrm{s}}(t) \tag{A.2.3}$$

$\boldsymbol{x}(t)$ 的初值 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 称为**初扰动**. 从方程 (A.2.2) 导出扰动应满足的微分方程, 称为**扰动方程**

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{X}(x, t) \tag{A.2.4}$$

其中

$$\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{x}, t\right) = \boldsymbol{Y}\left(\boldsymbol{y}_{\mathrm{s}}+\boldsymbol{x}, t\right) - \boldsymbol{Y}\left(\boldsymbol{y}_{\mathrm{s}}, t\right) \tag{A.2.5}$$

系统的未扰运动解 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}_{\mathrm{s}}(t)$ 与扰动方程的零解 $\boldsymbol{x}(t)=0$ 完全等价.

2) 李雅普诺夫稳定性定义

判断系统的稳态运动是否稳定, 即判断当状态变量受到微小初扰动后, 其受扰运动规律是否仍接近未扰运动规律. 或判断扰动方程的解是否保持在零值附近. 1892 年李雅普诺夫首先给出稳定性概念的严格数学定义.

定义一: 若给定任意小的正数 ε, 存在正数 δ, 对于一切受扰运动, 只要初扰动满足 $|x(t_0)| \leqslant \delta$, 对于所有 $t > t_0$ 均有 $|\boldsymbol{x}(t)| < \varepsilon$, 则称未扰运动 $\boldsymbol{y}_s(t)$ 为**稳定**. 上述稳定性定义的几何解释为: 相空间内以零点为中心作 $|\boldsymbol{x}| = \varepsilon$ 的球面 S_ε 和 $|\boldsymbol{x}| = \delta$ 的球面 S_δ, 从 S_δ 内出发的每一条相轨迹限制在 S_ε 以内 (图 A.1 曲线 a).

定义二: 若未扰运动稳定, 且当 $t \to \infty$ 时均有 $|\boldsymbol{x}(t)| \to 0$, 则称未扰运动 $\boldsymbol{y}_s(t)$ 为**渐近稳定**. 渐近稳定的几何解释为: 相空间内从 S_δ 出发的每一条相轨迹都渐近地向原点趋近 (图 A.1 曲线 b).

定义三: 若存在正数 ε, 对任意小正数 δ, 存在受扰运动 $\boldsymbol{y}(t)$, 当其初扰动满足 $|\boldsymbol{x}(t_0)| \leqslant \delta$ 时, 存在时刻 $t_1 > t_0$, 满足 $|\boldsymbol{x}(t_1)| = \varepsilon$, 则称未扰运动 $\boldsymbol{y}_s(t)$ 为**不稳定**. 不稳定的几何解释为: 无论相空间内的 S_δ 选择如何小, 总有一条从 S_δ 内出发的相轨迹最终达到 S_ε 的边界 (图 A.1 曲线 c).

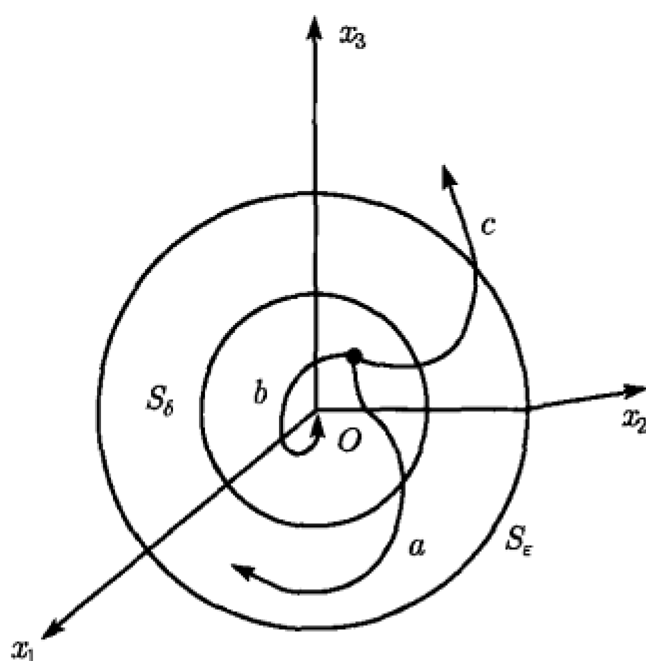


图 A.1　李雅普诺夫稳定性的几何解释

A.2.2　李雅普诺夫直接方法

1892 年李雅普诺夫提出无需对扰动方程求解, 而是根据扰动方程本身直接判断其零解稳定性的直接方法. 李雅普诺夫直接方法要求构造具有某种性质的函数, 称为**李雅普诺夫函数**, 计算该函数沿扰动方程解的全导数, 使之与扰动方程相联系, 从而估计受扰运动解随时间推移的变化趋势.

1) 定号、半定号和不定号函数

设函数 $V(\boldsymbol{x})$ 为 n 维状态空间 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的原点邻域内定义的单值连续实函数,

定义一: 若 $V(\boldsymbol{x})$ 当且仅当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 时取零值, $V(\boldsymbol{0})=0$, 而对 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的邻域内任何 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 的值恒取正值 (或负值), 即 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 时 $V(\boldsymbol{x})>0$ (或 <0), 则称 $V(\boldsymbol{x})$ 为正定 (或负定) 函数. 正定与负定函数统称为**定号函数**.

定义二: 若 $V(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 时取零值, $V(\boldsymbol{0})=0$, 而对 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的邻域内任何 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 的值均不小于 (或不大于) 零, 即 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 时 $V(\boldsymbol{x})\geqslant 0$(或 $\leqslant 0$), 则称 $V(\boldsymbol{x})$ 为半正定(或半负定)函数. 半正定与半负定函数统称为**半定号函数**.

定义三: 若 $V(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 时取零值, $V(\boldsymbol{0})=0$, 而对 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的任意小邻域内任何 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 的值既可取正值, 也可取负值, 则称 $V(\boldsymbol{x})$ 为**不定号函数**.

2) 李雅普诺夫定理

不显含时间变量 t 的系统称为**自治系统**, 其扰动方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) \tag{A.2.6}$$

其中 n 维列向量 $\boldsymbol{x}=(x_j)$ 为稳态运动的扰动, 函数列阵 $\boldsymbol{X}=(X_j)$ 不显含时间 t. 关于自治系统的李雅普诺夫直接方法基于以下 3 个基本定理:

定理一: **若能构造一个可微正定函数$V(\boldsymbol{x})$, 使沿扰动方程 (A.2.6)解曲线计算的全导数$\dot{V}$为半负定或等于零, 则系统的未扰运动稳定.**

定理二: **若能构造一个可微正定函数$V(\boldsymbol{x})$, 使沿扰动方程 (A.2.6)解曲线计算的全导数$\dot{V}$为负定, 则系统的未扰运动渐近稳定.**

定理三: **若能构造一个可微正定、半正定或不定号函数$V(\boldsymbol{x})$, 使沿扰动方程(A.2.6)解曲线计算的全导数$\dot{V}$为正定, 则系统的未扰运动不稳定.**

从几何观点出发作不严格但直观的证明. 设扰动变量为二维, $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)$. 在 (x_1,x_2,V) 三维空间内作正定的函数曲面 Σ. 此曲面在原点处与 (x_1,x_2) 平面相切. 以原点为中心, 在 (x_1,x_2) 相平面内作半径为 ε 的圆 S_ε. 过 S_ε 作柱面与 Σ 交于 S_1, 过 S_1 曲线的最低点作平面 $V=$ 常数 与 Σ 相交于 S_2, S_2 在相平面上的投影 S_3 是与 S_ε 相切的封闭曲线, 选择此封闭曲线的内切圆为 S_δ(图 A.2). 若 V 沿扰动方程 (3.1.5) 解曲线计算的全导数 $\dot{V}$ 为半负定或等于零, 则从 S_δ 出发的任意相点 P 在 Σ 上的对应点 P' 的运动不可能上行而必局限于 S_2 曲线的下方, 因此从 S_δ 内出发的每一条扰动方程的相轨迹均不能越出 S_ε. 根据李雅普诺夫的定义一, 未扰运动稳定. 若 $\dot{V}$ 为负定, 则 P' 的运动必沿 Σ 曲面下降至最低点, 在相平面内对应的 P 点必向原点趋近. 根据李雅普诺夫的定义二, 未扰运动渐近稳定. 若 V 不定而 $\dot{V}$ 为正定, 则在 $V>0$ 区域内出发的 P' 的运动必沿 Σ 曲面上升, 相平面内的 P 点必相应地不断远离原点而达到任意指定的 S_ε 的边界 (图 A.3). 根据李雅普诺夫的定义三, 未扰运动不稳定.

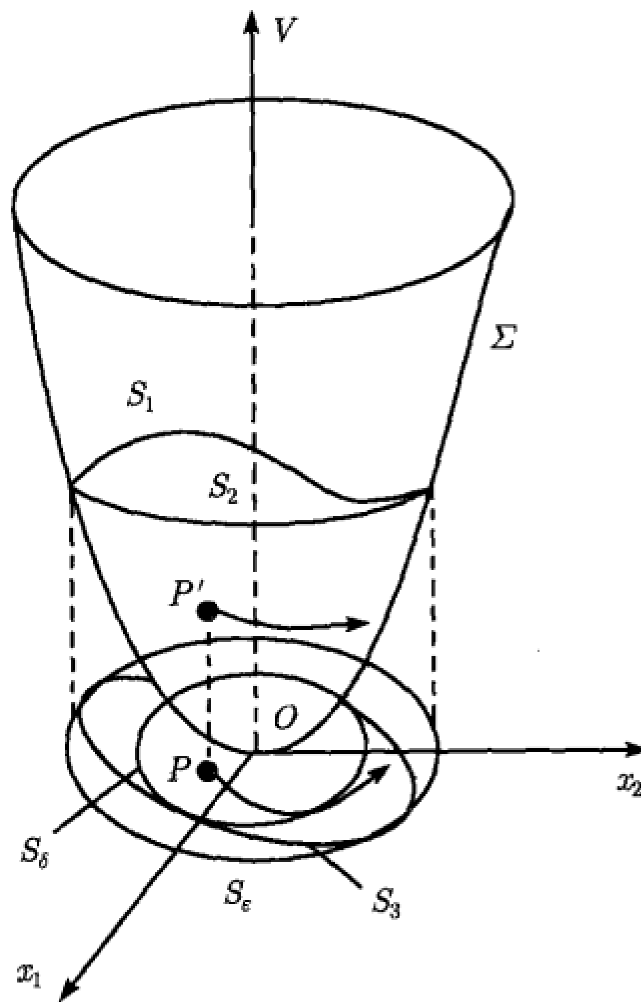


图 A.2　李雅普诺夫定理一、二的几何解释

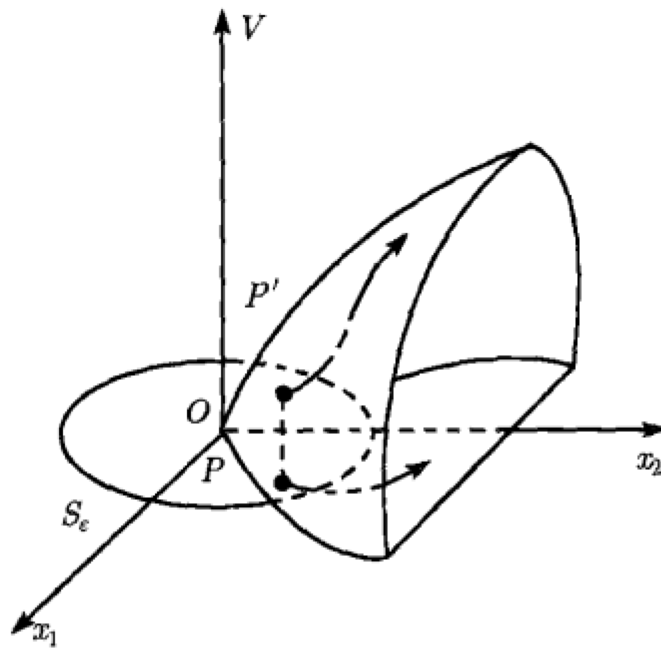


图 A.3　李雅普诺夫定理三的几何解释

3) 拉格朗日定理

对于任意自由度的保守系统, 取系统的哈密顿函数 $\mathscr{H}=T+V$ 为李雅普诺夫函数, 其中的动能 T 为广义速度的正定二次齐函数. 将平衡位置作为势能的零点, 若势能 V 在平衡位置取孤立极小值, 则 V 为广义坐标的正定函数. 因此 $\mathscr{H}=T+V$ 为包含广义坐标和广义速度在内的全部扰动变量的正定函数. 由于保守系统存在

能量积分, 任何受扰运动对应的 $T + V$ 均保持常数, 其沿扰动方程解曲线的全导数 $\dot{\mathscr{H}}$ 必等于零. 根据李雅普诺夫的定理一, 平衡位置稳定. 从而证明: **若势能V在平衡位置取孤立极小值, 则保守系统的平衡稳定.**

作为拉格朗日定理适用范围的推广, 对于参考坐标系做匀速转动的非定常约束情形, 存在广义能量积分 $\mathscr{H} = T_2 + V^*$, 即第 3 章中的式 (3.4.19). 可理解为系统在动坐标系内运动的相对动能与相对势能之和守恒. 因此若选择 $T_2 + V^*$ 为李雅普诺夫函数, 不难证明以下推论: **匀速转动坐标系内系统相对平衡稳定性的充分条件为相对势能 V^* 取孤立极小值.**

A.2.3 一次近似稳定性理论

虽然李雅普诺夫直接方法理论上适用于一切非线性系统, 但由于缺乏普遍适用的构造李雅普诺夫函数的方法, 因此在实际应用时存在困难. 线性系统是一种特殊的动力学系统, 由于线性常系数常微分方程组的数学理论已发展得十分完善, 可以提供更简便的稳定性判断方法. 因此在工程设计中, 常将原系统的非线性项略去, 近似地化作线性系统, 称为**一次近似系统**. 但原系统和简化的线性系统是两个不同的系统, 仅在满足确定的条件下, 方能利用一次近似系统的分析结果判断原非线性系统的稳定性.

1) 线性系统的稳定性准则

包含 n 个状态变量的定常系统 (A.2.6) 当扰动足够微小时, 将其右项展成泰勒级数, 略去扰动的二次以上微量, 化作原系统的**一次近似方程**

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{A.2.7}$$

其中 $n \times n$ 系数矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 为在 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 处函数 $\boldsymbol{X}$ 相对变量 $\boldsymbol{x}$ 的雅可比矩阵

$$a_{ij} = \left.\frac{\partial X_i}{\partial x_j}\right|_{x=0} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n) \tag{A.2.8}$$

设方程 (3.4.3) 的解为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\mathrm{e}^{st} \tag{A.2.9}$$

其中 $\boldsymbol{B} = (B_j)$ 为 n 维常值列阵, 代入方程 (A.2.7), 得到

$$(\boldsymbol{A} - s\boldsymbol{E})\boldsymbol{B} = 0 \tag{A.2.10}$$

$\boldsymbol{B}$ 有非零解的充分必要条件为系数行列式等于零

$$|\boldsymbol{A} - s\boldsymbol{E}| = 0 \tag{A.2.11}$$

展开后得到 s 的 n 次代数方程, 即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程. 此方程的根为矩阵的特征值. 方程组 (A.2.7) 的零解稳定性可根据特征值的实部符号判定. 归纳为以下定理:

定理一：　若所有特征值的实部为负，则线性方程组的零解渐近稳定.

定理二：　若至少有一特征值的实部为正，则线性方程组的零解不稳定. 具有正实部特征值的数目称为不稳定度.

定理三：　若存在零实部的特征值，且为单根，其余根无正实部，则线性方程组的零解稳定，但不是渐近稳定. 若为重根，则零解不稳定.

2) 李雅普诺夫一次近似理论

在线性方程 (A.2.7) 的推导过程中，由于略去高次项已完全不同于原方程 (A.2.6). 李雅普诺夫一次近似理论分析从一次近似方程推断原方程稳定性的条件. 归纳为以下定理.

定理一：　若一次近似方程的所有特征值实部均为负，则原方程的零解渐近稳定.

定理二：　若一次近似方程至少有一特征值实部为正，则原方程的零解不稳定.

定理三：　若一次近似方程存在零实部的特征值，其余根无正实部，则不能判断原方程的零解稳定性.

上述第一种和第二种情况与线性方程组的零解渐近稳定和不稳定的条件完全一致，因此可直接根据一次近似方程判断原方程的零解稳定性. 第三种情况为介于前两种情况之间的临界情况，虽满足线性方程组的零解稳定性条件，但不能判断原方程的零解稳定性.

3) 劳斯–赫尔维茨判据

以上分析表明，一次近似方程的全部特征值实部为负是一次近似方程的，也是原方程的零解渐进稳定的充分条件. 1895 年提出的**劳斯–赫尔维茨判据**是判断此条件是否满足的实用方法. 设线性方程组的特征方程 (A.2.11) 展开后的一般形式为

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0 \tag{A.2.12}$$

规定其中 $a_0 > 0$. 将此方程的系数按以下规则构成 n 阶方阵 $\boldsymbol{D}$：

1) 将 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 依次排列为对角线元素.

2) 任意第 k 行内，自对角线元素 a_k 向左的元素依次按 $a_{k+1}, a_{k+2}, \cdots, a_n$ 排列，a_n 以后的元素为零.

3) 自 a_k 向右的元素依次按 $a_{k-1}, a_{k-2}, \cdots, a_0$ 排列，a_0 以后的元素为零.

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ & & & \cdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \tag{A.2.13}$$

$\boldsymbol{D}$ 矩阵的 n 个主子行列式 $\Delta_i(i=1,2,\cdots,n)$ 称为多项式 (3.4.14) 的**赫尔维茨行列式**

$$\Delta_1=a_1,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix},\quad \Delta_3=\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix},\quad \cdots \tag{A.2.14}$$

定理: 代数方程(A.2.12)的所有根均有负实部的充分与必要条件为所有的赫尔维茨行列式均大于零, 即

$$\Delta_k>0\quad (k=1,2,\cdots,n) \tag{A.2.15}$$

对于几种低阶情形, 上述条件可予以简化, 在表 A.2 中列出

表 A.2

n	劳斯 - 赫尔维茨判据
1	$a_0>0,\ a_1>0$
2	$a_0>0,\ a_1>0,\ a_2>0$
3	$a_0>0,\quad a_1$或$a_2>0,\ a_3>0,\quad a_1a_2-a_0a_3>0$
4	$a_0>0, a_1>0, a_2$或$a_3>0, a_4>0,\ a_3(a_1a_2-a_0a_3)-a_1^2a_4>0$
5	$a_0>0,\quad a_1$或$a_2>0,\ a_3$或$a_4>0,\ a_5>0,\quad a_1a_2-a_0a_3>0$ $(a_1a_2-a_0a_3)(a_3a_4-a_2a_5)-(a_1a_4-a_0a_5)^2>0$

附录三　相平面上的奇点理论

A.3.1　相平面上的奇点

讨论由以下一阶常微分方程组描述的动力学系统, 方程中不显含时间变量 t

$$\dot{x} = P(x, y) \tag{A.3.1a}$$

$$\dot{y} = Q(x, y) \tag{A.3.1b}$$

这类方程描述的力学系统称为**自治系统**. 确定此系统运动状态的状态变量 x, y 对应于 (x, y) 平面上点的坐标, 称为**相平面和相点**. 方程组 (A.3.1) 的解 $x(t), y(t)$ 在相平面上所确定的曲线称为**相轨迹**. 系统的运动过程可抽象为相点沿相轨迹的移动过程. 系统的全部相轨迹曲线族直观地表示出此力学系统可能发生的运动概貌.

将方程 (A.3.1a) 与 (A.3.1b) 相除消去时间微分, 得到只含未知变量 x 和 y 的一阶常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} \tag{A.3.2}$$

此方程表示相平面上各点的位置与过该点的相轨迹切线斜率之间的对应关系. 若此关系为一一对应, 则方程 (A.3.2) 唯一地确定相平面内的方向场以及由它们连成的积分曲线族.

相平面内可能存在一些特殊点 (x_s, y_s), 为以下方程的解

$$P(x_s, y_s) = 0 \tag{A.3.3a}$$

$$Q(x_s, y_s) = 0 \tag{A.3.3b}$$

在这些特殊点上, 相轨迹无确定的斜率方向. 可能有一条以上相轨迹通过或根本无相轨迹通过. (x_s, y_s) 称为方程 (A.3.2) 的**奇点**. 奇点有各种不同类型, 以下几种典型方程的奇点均位于坐标原点上:

1)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{ax}{y} \tag{A.3.4}$$

此方程可分离变量积分, 得到

$$ax^2 + y^2 = C \tag{A.3.5}$$

积分曲线的几何性质取决于常数 a 的符号. $a>0$ 时相轨迹为围绕奇点的相似椭圆族, $a=1$ 时为圆族, 这类奇点称为**中心**. $a<0$ 时相轨迹演变为双曲线族, 奇点称为**鞍点**(见图 A.4).

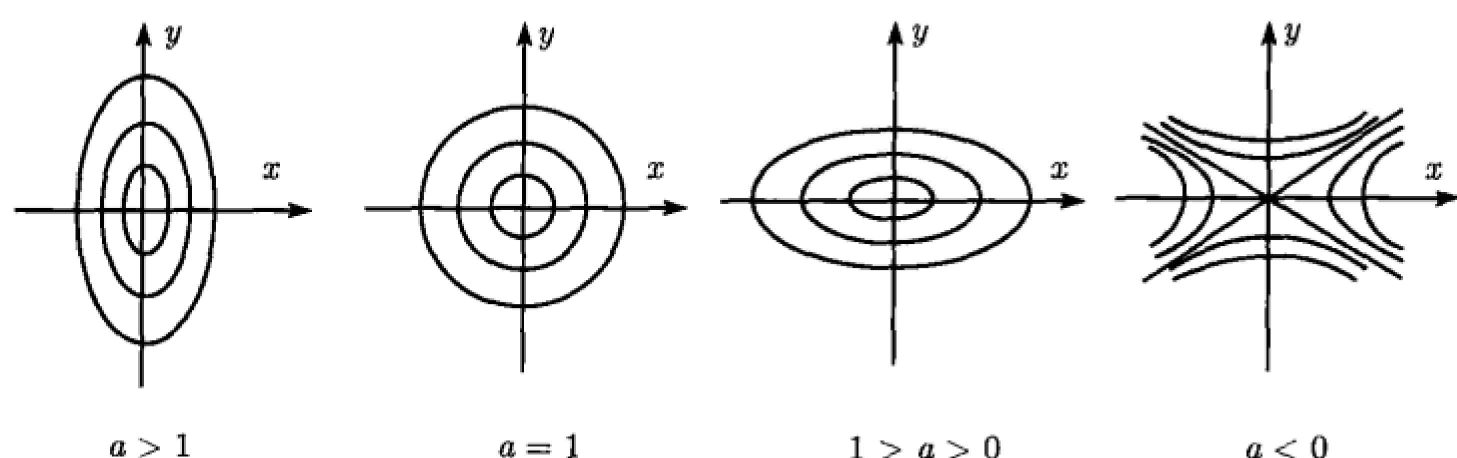


图 A.4　中心和鞍点

2)
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{ay}{x} \tag{A.3.6}$$

也可分离变量积分, 得到

$$y=Cx^{a} \tag{A.3.7}$$

积分曲线的几何性质也取决于常数 a 的符号. $a>0$ 时相轨迹为通过奇点的指数曲线族, $a=1$ 时为射线族, 这类奇点称为**结点**. $a<0$ 时相轨迹演变为双曲线族, 奇点又成为鞍点 (见图 A.5).

3)
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x+ay}{ax-y} \tag{A.3.8}$$

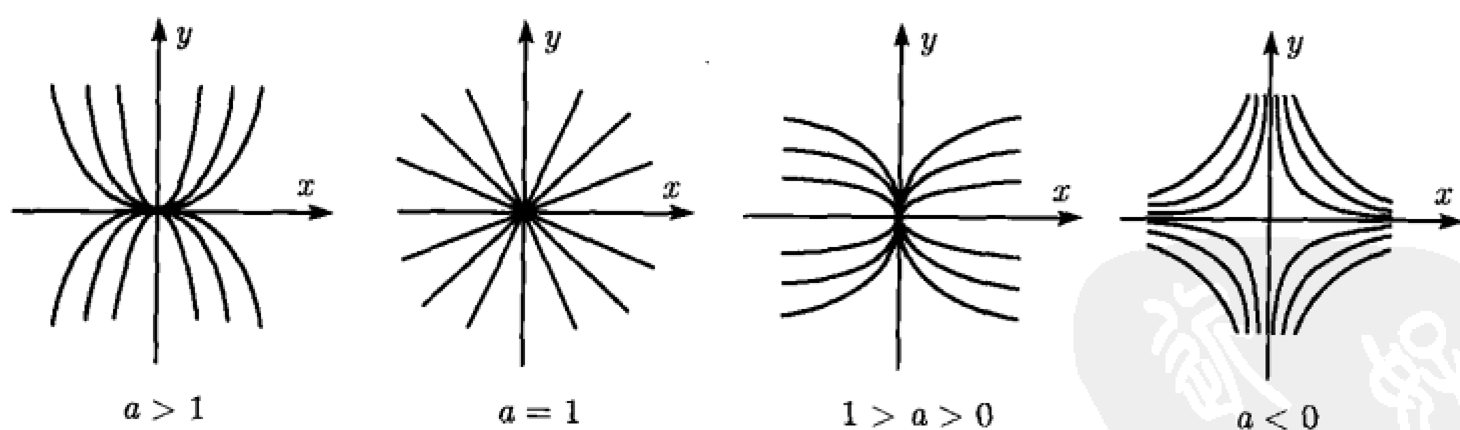


图 A.5　结点和鞍点

令 $x=r\cos\phi, y=r\sin\phi$, 将直角坐标 x,y 变换为极坐标 r,ϕ, 方程 (A.3.8) 可化作

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}=ar \tag{A.3.9}$$

分离变量积分, 得到

$$r = Ce^{a\phi} \tag{A.3.10}$$

积分曲线是围绕奇点的对数螺线族, 这类奇点称为**焦点**(见图 A.6). 在 $a=0$ 的特殊情形, 螺线转变为圆, 奇点为中心.

相平面上的奇点往往与力学系统的平衡状态相对应. 上述 4 种不同类型的奇点：中心、鞍点、结点和焦点, 其附近的相轨迹具有不同的几何特征. 4 类奇点中, 中心附近的相轨迹局限于奇点附近的某个邻域以内, 对应的平衡状态稳定. 鞍点附近的相轨迹无限远离奇点, 对应的平衡状态不稳定. 对于结点和焦点, 则必须引入时间变量, 根据相点随时间变化的运动走向判断所对应平衡状态的稳定性. 如相点沿相轨迹向奇点趋近, 则平衡状态为渐近稳定; 反之, 如相点远离奇点, 则平衡状态不稳定.

以上分析表明, 无需对微分方程作积分运算, 根据方程 (A.3.2) 的奇点分布和类型即可对动力学系统 (A.3.1) 运动性态的概貌作出定性的判断.

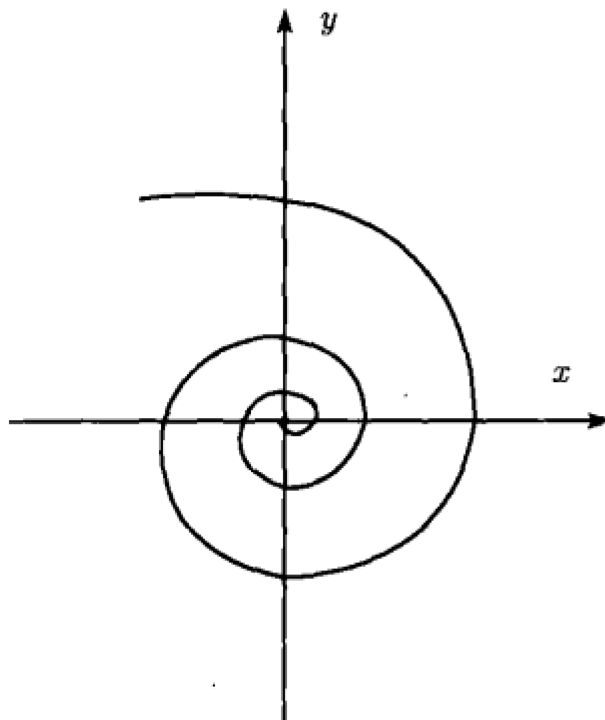


图 A.6　焦点

A.3.2　奇点的判别式

不失一般性, 将奇点 (x_s, y_s) 取作坐标原点, x, y 视为相点偏离奇点的微小增量. 将函数 $P(x,y), Q(x,y)$ 在奇点附近展成幂级数

$$\begin{aligned} P(x,y) &= ax + by + P_2(x,y) \\ Q(x,y) &= cx + dy + Q_2(x,y) \end{aligned} \tag{A.3.11}$$

系数 a,b,c,d 为 $P(x,y), Q(x,y)$ 在奇点 (x_s, y_s) 处的偏导数值

$$a=\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{x_s,y_s},\quad b=\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_{x_s,y_s}$$
$$c=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_{x_s,y_s},\quad d=\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)_{x_s,y_s} \tag{A.3.12}$$

P_2,Q_2 为 x,y 的二次以上多项式. 将式 (A.3.11) 代入方程 (A.3.1), 略去 P_2,Q_2, 导出原方程的一次近似式

$$\dot{x}=ax+by \tag{A.3.13a}$$

$$\dot{y}=cx+dy \tag{A.3.13b}$$

对应的相轨迹方程为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{cx+dy}{ax+by} \tag{A.3.14}$$

作以下线性变换

$$\xi=\alpha x+\beta y$$
$$\eta=\gamma x+\delta y \tag{A.3.15}$$

适当选择系数 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$, 使方程组 (A.3.13) 变换为

$$\dot{\xi}=S_1\xi \tag{A.3.16a}$$

$$\dot{\eta}=S_2\eta \tag{A.3.16b}$$

相轨迹方程 (A.3.14) 变换为

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}=\left(\frac{S_2}{S_1}\right)\frac{\eta}{\xi} \tag{A.3.17}$$

由于线性变换不改变奇点的类型, (x,y) 平面的奇点可根据 (ξ,η) 平面的奇点作出判断. 将 (A.3.13), (A.3.15) 等式代入方程 (A.3.16), 令 $\dot{\xi}=\dot{\eta}=0$ 导出

$$[(a-S_1)\alpha+c\beta]x+[b\alpha+(d-S_1)\beta]y=0 \tag{A.3.18a}$$

$$[(a-S_2)\gamma+c\delta]x+[b\gamma+(d-S_2)\delta]y=0 \tag{A.3.18b}$$

要使上式对 x,y 的任意值都成立, 系数必须为零. 由此导出分别包含 α,β 和 γ,δ 的两组齐次线性代数方程组

$$(a-S_1)\alpha+c\beta=0 \tag{A.3.19a}$$

$$b\alpha+(d-S_1)\beta=0 \tag{A.3.19b}$$

$$(a-S_2)\gamma+c\delta=0 \tag{A.3.20a}$$

$$b\gamma + (d - S_2)\,\delta = 0 \tag{A.3.20b}$$

为保证方程组 (A.3.19) 中的 α, β 和 (A.3.20) 中的 γ, δ 有非零解，要求 S_1, S_2 为以下特征方程的根

$$\begin{vmatrix} a - S & c \\ b & d - S \end{vmatrix} = S^2 - pS + q = 0 \tag{A.3.21}$$

解出

$$S_{1,2} = \frac{1}{2}\left(p \pm \sqrt{p^2 - 4q}\right) \tag{A.3.22}$$

参数 p, q 定义为

$$p = a + d, \quad q = ad - bc \tag{A.3.23}$$

讨论几种不同情况：

1) $p^2 - 4q \geqslant 0$

S_1, S_2 为二实根. 如 $q > 0$，则 S_1 与 S_2 同号. 与式 (A.3.6) 对照，可以判断方程组 (A.3.19) 和 (A.3.20) 的奇点为结点. 如 $q < 0$，则 S_1 与 S_2 异号，奇点为鞍点.

2) $p^2 - 4q < 0$

S_1, S_2 为一对共轭复根. 变量 ξ, η 可用极坐标表示为

$$\xi = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}, \quad \eta = r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi} \tag{A.3.24}$$

则方程 (A.3.17) 可化作与 (A.3.9) 相同的形式

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi} = \left(\frac{p}{\sqrt{4q - p^2}}\right) r \tag{A.3.25}$$

除 $p = 0$ 时奇点为中心的特殊情形以外，$p \neq 0$ 时奇点为焦点.

上述结论归纳为表 A.3.

表 A.3

$p^2 - 4q$	p	q	奇点类型
	$=0$	任意	中心
< 0	< 0	任意	稳定焦点
	> 0	任意	不稳定焦点
	< 0	> 0	稳定结点
> 0	> 0	> 0	不稳定结点
	任意	< 0	鞍点

A.3.3　复数方程的奇点类型

引入复变量 z，定义为

$$z = x + \mathrm{i}y \tag{A.3.26}$$

z 的复数平面即前面定义的相平面. 令方程 (A.3.1b) 乘 i 再与 (A.3.1a) 相加, 化作复数方程

$$\dot{z}+R(z,\bar{z})=0 \tag{A.3.27}$$

其中 $R=P+\mathrm{i}Q$, $\bar{z}$ 为 z 的共轭复数. 以复数 z_s 表示相平面的奇点, 即方程 (A.3.27) 的常值特解, 满足

$$R(z_s,\bar{z}_s)=0 \tag{A.3.28}$$

表 A.4 中列出 8 种线性复数方程的奇点 $z_s=0$ 所属类型. 只须将所列各复数方程的虚、实部分开, 利用表 A.3 一一判断, 即能证实其正确性.

表 A.4

复数方程	奇点类型
$\dot{z}\pm\mathrm{i}kz=0$	中心
$\dot{z}\pm\mathrm{i}k\bar{z}=0$	鞍点
$\dot{z}+cz=0$	稳定结点
$\dot{z}-cz=0$	不稳定结点
$\dot{z}\pm c\bar{z}=0$	鞍点
$\dot{z}+(c\pm\mathrm{i}k)z=0$	稳定焦点
$\dot{z}-(c\pm\mathrm{i}k)z=0$	不稳定焦点
$\dot{z}\pm(c\pm\mathrm{i}k)\bar{z}=0$	鞍点

如线性方程右边有常值非齐次项存在, $z_s\neq0$, 仅须将变量 z 置换为 z_1-z_s, 即化作 z_1 的齐次方程. 其奇点类型仍可根据表 A.4 判断而不受常值非齐次项的影响.



名 词 索 引

(按汉语拼音字母顺序)

E

F

G

H

J

K

L

M

N

O

P

Q

R

S

T

W

外国人名译名对照表

H. Andoyer　安道耶
R. N. Arnold　阿诺德
H. Anschütz-Kaempfe　安休茨
V. V. Beletsky
(В. В. Белецкий)　别列斯基
L. Brennan　布伦南
Bryant　布莱恩特
B. V. Bulgakov
(Б. В. Булгаков)　布尔加可夫
G. Cardano　卡尔丹
N. G. Chetayev
(Н.Г. Четаев)　切塔耶夫
R. J. Cohen　科恩
P. Contensou　康坦苏
J. d'Alembert　达朗贝尔
G. Darboux　达尔布
D. B. Debra　德布拉
R. H. Delp　德尔普
A. Deprit　德普里
Duhamel　杜哈美
L. Euler　欧拉
G. Fleuriais　弗勒里埃
J. Foucault　傅科
Gallop　盖洛普
K. F. Gauss　高斯
J. W. Geckler　盖克勒
I. F. Goodman　古德曼
R. Goodstein　古德斯坦
A. G. Greenhill　格林希尔
W. R. Hamilton　哈密顿
H. Helmholtz　亥姆霍兹
L. O. Hesse　赫赛
A. Hurwitz　赫尔维茨
A. Yu. Ishlinsky
(А.Ю. Ишлинский)　伊式林斯基
C. G. J. Jacobi　雅可比
T. R. Kane　凯恩
Lord Kelvin　开尔文
S. V. Kovalevskaya
(С.В. Ковалевская)　科瓦列夫斯卡娅
A. N. Krylov
(А. Н. Крылов)　克雷洛夫
J. L. Lagrange　拉格朗日
P. W. Likins　莱金斯
A. M. Lyapunov
(А. М. Ляпунов) 李雅普诺夫
K. Magnus　马格努斯
D. R. Merkin
(Д. Р. Меркин)　麦尔金
V. K. Melnikov
(В. К. Мельников)　梅利尼科夫
N. N. Moiseev
(Н. Н. Моисеев)　莫伊谢耶夫
I. Newton　牛顿
C. G. Neumann　诺伊曼
Parks　派克斯
F. Pfeiffer　普费弗
H. Poincaré　庞加莱
L. Poinsot　潘索
J. L. Poisseuille　泊肃叶
S. D. Poisson　泊松
R. J. Pringle　普林格尔
Resal　莱查
N. E. Rhukovsky

(H. E. Жуковский) 茹可夫斯基
B. O. Rodriques 罗德里格
E. J. Routh 劳斯
V. V. Rumjantsev
(B. B. Румянцев) 鲁缅采夫
J. A. Serret 塞莱
O. Shlick 施利克
E. A. Sppery 斯佩里
G. G. Stokes 斯托克斯
P. G. Tait 泰特
W. Thomson 汤姆孙